

Juliana Vianna Valério

**Análise de Estabilidade de
Escoamentos Viscosos e
Viscoelásticos**

TESE DE DOUTORADO

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA
MECÂNICA**

**Programa de Pós-graduação em
Engenharia Mecânica**

Rio de Janeiro
março de 2007

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Juliana Vianna Valério

**Análise de Estabilidade de Escoamentos
Viscosos e Viscoelásticos**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Márcio da Silveira Carvalho
Co-Orientador: Prof. Carlos Tomei

Rio de Janeiro
março de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Juliana Vianna Valério

Bacharelou-se em Matemática na *Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro* - PUC (Rio de Janeiro, Brasil) em 1999. Concluiu o Mestrado na PUC (Rio de Janeiro, Brasil) em 2001 na área de Matemática Aplicada à Dinâmica dos Fluidos, estudando as equações de Navier-Stokes em um referencial não uniforme e não estacionário.

Ficha Catalográfica

Vianna Valério, Juliana

Análise de Estabilidade de escoamentos Viscosos e Viscoelásticos/ Juliana Vianna Valério; orientador: Márcio da Silveira Carvalho; co-orientador: Carlos Tomei. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Engenharia Mecânica, 2007.

v., 137 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica.

Inclui referências bibliográficas.

I. . II. . III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDD: 621



Juliana Vianna Valério

**Análise de Estabilidade de Escoamentos
Viscosos e Viscoelásticos**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Márcio da Silveira Carvalho

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica — PUC-Rio

Prof. Carlos Tomei

Co-Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Abimael Fernando Dourado Loula

Coordenação de Matemática Aplicada e Computacional
— LNCC

Prof. Max de Oliveira Souza

Instituto de Matemática— UFF

Prof. Paulo Roberto de Souza Mendes

Departamento de Engenharia Mecânica — PUC-Rio

Prof. Ângela Niekele

Departamento de Engenharia Mecânica — PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico —
PUC-Rio

Rio de Janeiro, 09 de março de 2007

Agradecimentos

Agradeço muito a todos que nesses quatro anos estiveram diretamente ou indiretamente envolvidos comigo e com o trabalho da tese. Professores, funcionários e alunos do departamento de mecânica e também de matemática da PUC-Rio. Familiares e amigos queridos.

Dentre esses, um agradecimento super especial ao Márcio. Sua extrema competência e dedicação fez desse trabalho tecnicamente interessante e muito prazeroso. Agradeço também a oportunidade e incentivo à iteração com outros departamentos, inclusive em outro país, me proporcionando uma experiência sem igual.

Ao Carlos, que abriu as portas da sua sala e nunca mais a fechou! Seu abrangente conhecimento e exímia didática forneceram elementos fundamentais para o sucesso do trabalho.

Ao CNPq, pelo financiamento nos dois primeiros anos, à CAPES, pela oportunidade de participar do programa PDEE (estágio de doutorado/sanduiche) e à FAPERJ, pela bolsa nota dez nos dois últimos anos.

Resumo

Vianna Valério, Juliana; **Análise de Estabilidade de Escoamentos Viscosos e Viscoelásticos**. Rio de Janeiro, 2007. 137p.

Tese de Doutorado — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

As informações sobre a sensibilidade da solução de um dado escoamento mediante a perturbações infinitesimais é importante para o seu completo entendimento. A análise de estabilidade de escoamentos pode ser utilizada na otimização de processos industriais. Na indústria de revestimento o controle da estabilidade é fundamental, uma vez que o escoamento na região de aplicação da camada de líquido sobre o substrato, de um modo geral, tem que ser laminar, bidimensional e em regime permanente. O objetivo é determinar, dentro do espaço de parâmetros de operação, a região onde o escoamento é estável e conseqüentemente a camada a ser revestida uniforme. Porém, por ser uma análise complexa, só é usada na indústria em estudos mais apurados. O sistema linear que descreve a estabilidade vai ser discretizado com o método de Galerkin / elementos finitos, dando origem a um problema de autovalor generalizado. Tanto para escoamentos com líquidos newtonianos como para escoamentos com líquidos viscoelásticos, uma das matrizes do problema de autovalor generalizado é singular e alguns autovalores se encontram no infinito. No escoamento com líquidos viscoelásticos parte do espectro é contínuo, aumentando o grau de dificuldade da análise numérica para encontrá-lo. Nesse trabalho, vamos apresentar um método baseado em transformações lineares tirando vantagem das estruturas matriciais e transformando-as em um problema de autovalor clássico com dimensão, pelo menos, três vezes menor que o original. O método elimina os autovalores infinitos do problema com um baixo custo computacional. A estabilidade de um escoamento de Couette unidimensional de líquido newtoniano é analisada como um primeiro exemplo. Depois, o início do estudo da estabilidade em um escoamento de Couette bidimensional e também um escoamento pistonado com o mesmo líquido. Generaliza-se o método para o escoamento de Couette de um líquido viscoelástico, os resultados para o escoamento de um líquido cujo comportamento mecânico é descrito pelo modelo de Maxwell são apresentados e comparados com a solução analítica de Gorodtsov & Leonov, 1967. A relação entre os autovetores do problema transformado e do original é apresentada.

Palavras-chave

autovalores, análise de estabilidade, transformações matriciais, escoamentos incompressíveis, escoamentos viscoelásticos.

Abstract

Vianna Valério, Juliana; **Linear Stability Analysis of Viscous and Viscoelastic Flows**. Rio de Janeiro, 2007. 137p. PhD. Thesis

— Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Steady state, two-dimensional flows may become unstable under two and three-dimensional disturbances, if the flow parameters exceed some critical values. In many practical situations, determining the parameters at which the flow becomes unstable is essential. The complete understanding of viscous and viscoelastic flows requires not only the steady state solution of the governing equations, but also its sensitivity to small perturbations. Linear stability analysis leads to a generalized eigenvalue problem, GEVP. Solving the GEVP is challenging, even for Newtonian liquids, because the incompressibility constraint creates singularities that lead to nonphysical *eigenvalues at infinity*. For viscoelastic flows, the difficulties are even higher because of the continuous spectrum of eigenmodes associated with differential constitutive equations. The complexity and high computational cost of solving the GEVP have probably discouraged the use of linear stability analysis of incompressible flows as a general engineering tool for design and optimization. The Couette flow of UCM liquids has been used as a classical problem to address some of the important issues related to stability analysis of viscoelastic flows. The spectrum consists of two discrete eigenvalues and a continuous segment of eigenvalues with real part equal to $-1/We$ (We is the Weissenberg number). Most of the numerical approximation of the spectrum of viscoelastic Couette flow presented in the literature were obtained using spectral expansions. The eigenvalues close to the continuous part of the spectrum show very slow convergence. In this work, the linear stability of Couette flow of a Newtonian and UCM liquids were studied using finite element method, which makes it easier to extend the analysis to complex flows. A new procedure to eliminate the *eigenvalues at infinity* from the GEVP that come from differential equations is also proposed. The procedure takes advantage of the structure of the matrices involved and avoids the computational effort of common mapping techniques. With the proposed procedure, the GEVP is transformed into a smaller simple EVP, making the computations more efficient. Reducing the computational memory and time. The relation between the eigenvector from the original problem and the reduced one is also presented.

Keywords

eigenvalues, stability analysis, matrix transformation, incompressible flows, viscoelastic flows.

Conteúdo

1	Introdução	15
1.1	A motivação	15
1.2	Um breve histórico . . .	17
1.3	Organização da tese	21
2	Desenvolvimento teórico	23
2.1	As equações de movimento	23
2.2	Perturbando o escoamento nos limites da estabilidade linear	28
2.3	Resolvendo problemas de autovalor generalizado	29
3	Análise de estabilidade de um escoamento newtoniano	35
3.1	Formulação matemática	36
3.2	Método de Galerkin / elementos finitos	37
3.3	Eliminação dos autovalores no infinito	39
3.3.1	Método proposto para solução do problema de autovalor generalizado	41
4	Escoamento de Couette de líquido Newtoniano: Formulação unidimensional	46
4.1	Escoamentos paralelos	46
4.2	O método de solução	49
4.2.1	Filtrando os autovalores no infinito.	51
4.2.2	Resultados para a validação do novo método	52
4.2.3	Como variam os autovalores em função dos parâmetros Re e α	58
4.2.4	Autovetores - escoamento Newtoniano	62
5	Escoamento retilíneo de líquido Newtoniano: Formulação bidimensional	67
5.1	Couette bidimensional	68
5.2	Solução do problema de autovalor em um escoamento bidimensional	74
5.3	A influência das condições de contorno	76
6	Escoamento de Couette de líquido viscoelástico: Formulação unidimensional	81
6.1	Formulação matemática	81
6.2	Resultados analíticos de Gorodtsov & Leonov	85
6.3	Solução pelo método de Galerkin / elementos finitos	86
6.4	Resposta para o caso limite de $We = 0$ - escoamento Newtoniano	89
6.4.1	Nova combinação de funções base	94
6.5	Estrutura das matrizes para escoamento viscoelástico	95
6.6	Generalização das transformações propostas	98
6.7	Resultados - escoamento viscoelástico	105
6.7.1	Autovalores - escoamento viscoelástico	106
6.7.2	Autovetores - escoamento viscoelástico	109

6.7.3	Comparando os resultados das formulações \mathbf{T}_{lc} e \mathbf{T}_{ld} para líquidos viscoelásticos	114
7	Conclusão	119
	Referências Bibliográficas	120
A	Formulação com líquido Newtoniano	125
A.1	Programa do método proposto para a solução do problema de autovalor generalizado vindo da análise de estabilidade de um escoamento de Couette com líquido Newtoniano.	125
A.2	Varição do programa do método proposto para a solução do problema de autovalor generalizado vindo da análise de estabilidade de um escoamento de Couette com líquido Newtoniano.	128
A.3	Recuperação dos autovetores originais a partir do problema reduzido vindo da formulação unidimensional com líquido Newtoniano.	130
B	Formulação com líquido viscoelástico	132
B.1	Programa do método proposto para a solução do problema de autovalor generalizado vindo da análise de estabilidade de um escoamento de Couette com líquido viscoelástico.	132
B.2	Recuperação dos autovetores originais a partir do problema reduzido vindo da formulação unidimensional com líquido viscoelástico.	135

Lista de Figuras

1.1	Experiência Reynolds	18
1.2	Taylor-Couette	19
2.1	Estabilidade de uma partícula	28
4.1	Couette	47
4.2	Elemento quadrático.	50
4.3	Elemento linear.	50
4.4	Exemplo da numeração dos elementos, nós e graus de liberdade para uma malha com três elementos, onde C_k é o coeficiente do campo aproximado relativo ao grau de liberdade k ; assim, $C_k = U_k$ de $k = 1 \dots 7$ aproxima o campo de velocidade u' ; $C_k = V(k - 7)$ de $k = 8 \dots 14$ o campo de velocidade v' e $C_k = P(k - 14)$ de $k = 15 \dots 20$ a pressão.	52
4.5	Exemplo da estrutura da matriz original com 3 elementos.	53
4.6	Matriz \mathbf{A}^b (\mathbf{A} sem condição de contorno), com 3 elementos.	54
4.7	Estrutura da matriz depois de permutações que diagonalizaram as submatrizes: \mathbf{A}_{13} e \mathbf{A}_{31} .	54
4.8	A estrutura final da matriz depois das transformações $\tilde{\mathbf{A}}$. Toda a informação do espectro está no bloco central destacado de tamanho $(2n - m - b) \times (2n - m - b)$.	55
4.9	Espectro próximo do eixo imaginário relativo ao escoamento de Couette com $Re = 500$ e $\alpha = 1.5$. Comparação entre o espectro apresentado por Bottaro; o espectro calculado no problema original, usando método QZ, com 100 e 200 elementos e o espectro do problema transformado com 200 elementos.	56
4.10	Autovetores do problema original GEVP são recuperados a partir dos autovetores do problema reduzido EVP, como esperado. Os cálculos foram feitos com 200 elementos e a maior diferença, para um mesmo y em todos os campos, foi da ordem de $\mathcal{O}(10^{-5})$.	57
4.11	Espectro calculado com 300 elementos. Comparando a precisão dos autovalores calculados: 1) Usando a inversa das submatrizes e 2) Evitando a inversa através de permutações	58
4.12	Observando como o espectro responde a variação do número de Reynolds. Quanto maior o número de Re o espectro fica mais próximo do eixo imaginário.	59
4.13	Diminuindo de $Re = 36$ para $Re = 35$ o espectro torna-se puramente real.	60
4.14	Espectro calculado com $Re = 500$ e variando $\alpha = 0.5$, $\alpha = 1.5$, $\alpha = 3$. Pelo gráfico de cima, nota-se que para menores α s o espectro se aproxima do eixo imaginário. No gráfico de baixo estão traçadas as curvas críticas para cada α .	61
4.15	No caso de $\alpha \rightarrow 0$ o espectro é puramente real e a solução numérica recupera a analítica.	62

4.16	Autovalores cujos autovetores serão analisados.	62
4.17	Autovetores correspondentes aos autovalores σ_A e σ_{A_c}	63
4.18	Autovetores correspondentes ao campo de pressão dos autovalores σ_B , σ_D e σ_E . A frequência aumenta à medida que o autovalor se afasta do eixo imaginário.	64
4.19	Autovalores convergidos próximos ao eixo imaginário e os espúrios, não convergidos, distantes ao eixo.	64
4.20	Autovalores: Formulação 3D \times Formulação 2D	65
4.21	Autovetores da formulação 3D. Observe a independência das perturbações da direção z em relação a x y .	66
5.1	Elemento biquadrático de 9 nós.	68
5.2	Funções base biquadráticas.	69
5.3	Escoamento de Couette bidimensional.	70
5.4	As possíveis ondas para dois elementos em x .	71
5.5	Velocidade u_0 .	72
5.6	Espectro da formulação 2D com número fixo de elementos em x , $NEX = 2$ e variando o número de elementos em y , $NEY = 80$ e $NEY = 120$ elementos.	72
5.7	Espectro da formulação 2D com 80 e 100 elementos.	73
5.8	Autovetor relativo ao autovalor σ_{\max}	74
5.9	Escoamento pistonado.	75
5.10	Espectro do escoamento pistonado numa cavidade 1×1 e $Re = 100$. Comparando os autovalores calculados antes e depois das transformações para 2×80 elementos e ainda refinando na direção y , 2×100 elementos.	76
5.11	Espectro do escoamento pistonado num domínio de dimensão 1×1 e $Re = 100$. Comparando os autovalores calculados antes e depois das transformações para 2 elementos fixos em y , $NEY = 2$, e variando os elementos em x ; $NEX = 6$ em A, $NEX = 9$ em B. Em C os espectros calculados com 9×2 e 11×2 elementos são comparados. Observe que os autovalores mais próximos do eixo imaginário, como mostra D, começam a convergir mesmo com poucos elementos.	77
5.12	Condições de contorno.	78
5.13	Espectro para as condições de contorno: perfil de velocidade imposto na entrada e escoamento desenvolvido na saída, (A). Repare que os autovalores mais próximos do eixo imaginário são um par conjugado.	78
5.14	Espectro para as condições de contorno: escoamento desenvolvido na entrada e na saída, (B). Repare que o autovalor mais próximo do eixo imaginário é puramente real.	79
5.15	Autovetor relativo ao autovalor mais próximo do eixo imaginário em 5.14 que é puramente real.	79
6.1	Autovalores divididos entre um par conjugado discreto e um segmento contínuo encontrados analiticamente por Gorodtsov & Leonov, 1967.	86
6.2	Elemento linear contínuo	87

6.3	Comparando o espectro apresentado por Bottaro com o espectro da presente formulação, que considera os componentes do tensor das tensões como variáveis independentes e discretizadas com uma função base linear contínua, $\mathbf{T}_{\ell c}$	90
6.4	Autovetores	91
6.5	Autovetores espúrios	91
6.6	Como o espectro contínuo responde à variação dos parâmetros do problema.	92
6.7	Comparação entre os autovalores calculados pela formulação $\mathbf{T}_{\ell d}$ e os da literatura.	93
6.8	Os autovetores calculados pela formulação $\mathbf{T}_{\ell d}$ condizem com os encontrados na formulação Newtoniana.	93
6.9	Espectro calculado pela formulação $\mathbf{T}_{\ell d}$ com $We = 10, \alpha = 1$ e $Re = 0$. Observa-se a convergência ao aumentar o número de elementos.	94
6.10	Exemplo da numeração da malha. Cada coeficiente Ck indica uma amplitude a ser aproximada, de C1 a C6 são as pressões, C7 até C24 os três componentes do tensor das tensões, as velocidades nas duas direções são C25 a C38 e os quatro componentes do gradiente de velocidade, C39 a C62.	96
6.11	Exemplo da estrutura da matriz original com quatro elementos.	104
6.12	Exemplo da estrutura da matriz sem as condições de contorno de Dirichlet.	104
6.13	Exemplo da matriz depois da transformação $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{T}_r$. O bloco destacado é o relevante para o espectro finito nesse estágio, chamado \mathbf{B} .	105
6.14	A estrutura do bloco \mathbf{B} destacado na figura 6.13 .	106
6.15	A estrutura do bloco final depois de transformado $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{M}_l \mathbf{B} \mathbf{M}_r$. Todos os autovalores finitos do problema original migraram para o bloco central, $(4N + 2) \times (4N + 2)$ marcado em $\tilde{\mathbf{B}}$, com as transformações.	106
6.16	Espectro calculado com 60 e 800 elementos. As transformações foram feitas e o resultado coincidente. Com 60 elementos os autovalores discretos já estão convergido na ordem de $\mathcal{O}(10^{-4})$, porém a parte do espectro contínuo não atingiu uma independência com a malha. Os ramos que se aproximam do segmento contínuo distam 0.0041 para cada lado mesmo com 800 elementos.	108
6.17	Espectro calculado usando a discretização de Chebyshev para o escoamento de Couette com líquido UCM, com $We = 10, \alpha = 1$. Resultados apresentados com $N = 65(\diamond)$ e $N = 129(+)$ - tradução livre da legenda vinda na figura 8 do artigo [23]	108
6.18	Espectro calculado com 100 e 300 elementos mostrando a convergência do espectro contínuo.	110
6.19	Espectro calculado usando 50 e 60 modos de Chebyshev na discretização para o escoamento de Couette com líquido UCM, com $We = 1, \alpha = 1$. Resultados apresentados com $N = 50(+)$ e $N = 60(o)$ - tradução livre da legenda vinda na figura de [24]	110

6.20	Autovetores calculados com 80 elementos no problema original e no transformado.	111
6.21	Autovalores calculados com 120 elementos.	112
6.22	Autovetores calculados com 125 elementos relativos aos autovalores destacados na figura 6.21 do ramo da esquerda e do meio.	113
6.23	Autovetores calculados com 125 elementos relativos aos autovalores destacados na figura 6.21 do ramo da direita e do meio.	114
6.24	Autovetores calculados com 125 elementos relativos aos autovalores destacados na figura 6.21 do ramo do meio.	115
6.25	Espectro calculado com as formulações \mathbf{T}_{lc} e \mathbf{T}_{ld} .	116
6.26	Espectro calculado com as formulações $\mathbf{T}_{lc}^{\eta_a=1}$ e \mathbf{T}_{ld} .	117
6.27	Espectro calculado com as formulações $\mathbf{T}_{lc}^{\eta_a=1}$ e \mathbf{T}_{ld} , ambas com 2102 graus de liberdade. No primeiro gráfico estão todos os autovalores finitos. Nos outros a janela se aproxima da solução analítica.	118

Lista de Tabelas

4.1	Os 14 primeiros pares de autovalores comparados com os apresentados por Dongarra <i>et. al.</i> , 1996 [17].	55
4.2	Comparando o tempo de CPU, em segundos, e a dimensão das matrizes ao calcular os autovalores (a) resolvendo o problema original GEVP com o método QZ; (b) resolvendo o problema reduzido EVP.	58
6.1	Número de elementos, dimensão das matrizes e tempo de CPU, em segundos, necessário para calcular os autovalores com diferentes malhas.	109

Lista de Símbolos

- grandezas vetoriais são apresentadas em negrito,
- \mathbf{u} e \mathbf{v} são usados para representar (u, v, w) campo de velocidade,
- o símbolo ∇ é apenas espacial, ou seja $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, a partir daí os operadores gradiente e divergente são tomados nas variáveis espaciais,

– o gradiente é definido como: $\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$,

- U velocidade característica,
- L comprimento característico,
- μ viscosidade,
- ρ massa específica do fluido,
- $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ viscosidade cinemática,
- θ tempo de relaxação,
- λ^t tempo de retardamento,
- α fator de mobilidade,
- a fator de mobilidade modificado,
- τ tensor das tensões,
- p pressão (parte isotrópica do tensor das tensões),
- \mathbf{T} extra tensão,
- \mathbf{I} identidade,
- $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ tensor deformação,
- $\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}^T \dot{\boldsymbol{\gamma}})}$ taxa de deformação,
- $Re = \frac{UL}{\nu}$ número de Reynolds,
- $We = \frac{U\theta}{L}$ número de Wessenberg.