3
Análise de estabilidade de um escoamento newtoniano

Neste capítulo apresenta-se a análise de estabilidade de um escoamento com fluido newtoniano. Como já foi dito, encontra-se a solução do regime permanente, chamada de solução base, para depois perturbá-la com uma dependência exponencial no tempo. Os campos perturbados são aplicados nas equações transientes de Navier-Stokes. Depois de linearizadas, as equações são discretizadas, dando origem a um problema de autovalor generalizado.

Em geometrias específicas as equações podem ser trabalhadas algebricamente. Algumas variáveis podem ser apropriadamente escolhidas ou ainda podem-se usar simetrias do problema para reduzi-lo. Por exemplo, a estabilidade de escoamentos paralelos pode ser representada por um operador de quarta ordem, conhecido como Orr-Sommerfeld [5], [21]. A maioria dos trabalhos encontrados na literatura sobre análise de estabilidade hidrodinâmica de escoamentos paralelos usam a formulação de função de corrente dando origem ao operador de Orr-Sommerfeld. A discretização é feita usando métodos espectrais, como em Dongarra *et. al.*, 1996 [17] que usa Chebychev-τ. No presente trabalho, utiliza-se o método de Galerkin / elementos finitos na discretização das equações em suas variáveis primitivas. Da mesma forma que métodos espectrais, a discretização por elementos finitos origina um problema de autovalor generalizado, porém com matrizes, apesar de maiores, esparsas.

Como já foi discutido, existe um grande desafio na solução do problema de autovalor generalizado. Um novo método, tirando vantagem da estrutura das matrizes e baseado em eliminação gaussiana por blocos utilizando transformações lineares, elimina os autovalores no infinito reduzindo a dimensão do problema e o tempo computacional. A simplicidade matemática associada com um excelente ganho computacional torna o novo método uma ferramenta bastante interessante. O desenvolvimento ainda mostra que o número de autovalores no infinito é maior que o proposto por Christodoulou & Scriven, 1988 [11]. Vamos mostrar que o número de autovalores no infinito é duas vezes o número de equações de resíduo da continuidade, que é uma restrição e tem o mesmo número que as variáveis de pressão, mais o número de resíduos associados às condições de contorno essenciais.

3.1 Formulação matemática

Primeiramente obtém-se o escoamento base ($\mathbf{v_0}$, p_0), calculando a solução em regime permanente com as condições de contorno apropriadas na equação de Navier-Stokes (2-8).

O objetivo da análise de estabilidade linear é verificar a resposta da solução em regime permanente quando sujeita a perturbações infinitesimais. Os campos perturbados são escritos como a soma da solução em regime permanente e uma perturbação infinitesimal:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v_0}(\mathbf{x}) + \epsilon\ \mathbf{v}'(\mathbf{x})e^{\sigma t}, \tag{3-1}$$

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0(\mathbf{x}) + \epsilon\ p'(\mathbf{x})e^{\sigma t}. \tag{3-2}$$

Sendo $\mathbf{v_0}$ e p_0 os campos de velocidade e pressão do regime permanente. As incógnitas $\mathbf{v}'$, p' e σ descrevem a amplitude e o fator de crescimento da perturbação, respectivamente.

Os novos campos, $\mathbf{v}$ e p, são descritos pelo sistema de equações transientes de Navier-Stokes eq. (2-8) com as condições de contorno apropriadas. Supondo que as perturbações são pequenas o suficiente para que termos de $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ possam ser ignorados, chega-se ao seguinte sistema:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \tag{3-3}$$

$$Re[\sigma \mathbf{v}' + \mathbf{v_0} \cdot \nabla \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v_0}] = -\nabla p' + \nabla \cdot [\nabla \mathbf{v}' + \nabla \mathbf{v}'^T], \tag{3-4}$$

Observe que as incógnitas do sistema são as amplitudes das perturbações $\mathbf{v}'$, p' e o fator de crescimento σ caracterizando um problema de autovalor. O sistema é linear uma vez que os termos de $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ não foram considerados.

3.2
Método de Galerkin / elementos finitos

A discretização das equações (3-3), (3-4) é feita utilizando o método de Galerkin / elementos finitos com o objetivo de determinar o fator de crescimento σ, que são exatamente os autovalores, e as amplitudes das perturbações, $\mathbf{v}', p'$, são os autovetores. Usando o método de Galerkin, as mesmas funções peso usadas nas equações de quantidade de movimento e continuidade vão ser usadas para expandir o campo de velocidade e pressão, respectivamente. Foram utilizados polinômios Lagrangianos biquadráticos para os campos de velocidade, ϕ; e polinômios lineares descontínuos para a pressão, χ. O resíduo ponderado da equação da continuidade e de cada componente das equações de momento são:

$$R_c^j = \int_\Omega \left(\frac{\partial u_h'}{\partial x} + \frac{\partial v_h'}{\partial y}\right) \chi_j \; d\Omega, \tag{3-5}$$

$$R_{mx}^j = \sigma \int_\Omega Re \; u_h' \; \phi_j \; d\Omega \; + \int_\Omega Re \left[u_0 \frac{\partial u_h'}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_h'}{\partial y} + u_h' \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_h' \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] \; \phi_j + \\ \left[-p_h' + 2\frac{\partial u_h'}{\partial x} \right] \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \left[\frac{\partial u_h'}{\partial y} + \frac{\partial v_h'}{\partial x} \right] \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \; d\Omega - \int_\Gamma \left[\mathbf{n} \cdot (-p' + \mathbf{T}') \right]_x \phi_j \; d\Gamma, \tag{3-6}$$

$$R_{my}^j = \sigma \int_\Omega Re \; v_h' \; \phi_j \; d\Omega \; + \int_\Omega Re \left[u_0 \frac{\partial v_h'}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_h'}{\partial y} + u_h' \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_h' \frac{\partial v_0}{\partial y} \right] \; \phi_j + \\ \left[-p_h' + 2\frac{\partial v_h'}{\partial y} \right] \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + \left[\frac{\partial u_h'}{\partial y} + \frac{\partial v_h'}{\partial x} \right] \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \; d\Omega - \int_\Gamma \left[\mathbf{n} \cdot (-p' + \mathbf{T}') \right]_y \phi_j \; d\Gamma. \tag{3-7}$$

O escoamento é definido em um domínio bidimensional Ω limitado pela curva Γ. Cada campo do sistema de equações perturbadas é aproximado com uma combinação linear das funções base já comentadas.

$$\mathbf{u}_h' = \begin{bmatrix} u_h' \\ v_h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n U_k \phi_k \\ \sum_{k=1}^n V_k \phi_k \end{bmatrix}, \quad p_h' = \sum_{k=1}^m P_k \; \chi_k.$$

Uma vez que todos os campos são representados em termos das funções base, o sistema de equações diferenciais parciais reduz-se a equações algébricas em função dos coeficientes das funções base de cada campo e do autovalor σ. O número de equações algébricas é $N = 2n + m$, onde n é o número de funções base utilizadas para expandir cada componente da velocidade e m para expandir o campo de pressão. Na forma vetorial o sistema de equações algébricas pode ser escrito como:

$$\mathbf{R}(\mathbf{c}) = \mathbf{0},$$

onde $\mathbf{R}$ é um vetor coluna dos resíduos ponderados e $\mathbf{c}$ dos coeficientes da expansão em elementos finitos que representa os campos de velocidade e pressão.

$$\mathbf{R} = [R^1_{mx}, R^2_{mx}, ..., R^n_{mx}, R^1_{my}, R^2_{my}, ..., R^n_{my}, R^1_c, R^2_c, ..., R^m_c]^T,$$

$$\mathbf{c} = [U_1, U_2, ..., U_n, V_1, V_2, ..., V_n, P_1, P_2, ..., P_m]^T.$$

A ordem em que as equações e as variáveis se encontram nos vetores $\mathbf{R}$ e $\mathbf{c}$ é fundamental para a realização do método que será proposto, uma vez que determina a estrutura matricial. As equações algébricas, vindas do processo de discretização, são ordenadas de forma que as $2n$ primeiras equações estão relacionadas às equações de quantidade de movimento e as m últimas relacionadas à equação de continuidade. Da mesma forma, os coeficientes das funções base, que são as incógnitas, são ordenadas de forma que os $2n$ primeiros coeficientes são relacionados ao campo de velocidade e os m últimos, ao campo de pressão.

Quando o sistema de equações é expandido em série de Taylor e truncado na ordem $\mathcal{O}(\mathbf{c}^2)$, já que se trata de perturbações infinitesimais, obtém-se:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{c}}\,\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Sendo $\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{c}}$ a matriz de sensibilidade dos resíduos em relação aos coeficientes das perturbações. Por conveniência, divide-se a contribuição espacial e temporal:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{c}} = -\sigma \mathbf{M} + \mathbf{J},$$

onde $\mathbf{M}$, que é a contribuição temporal e multiplica o fator de crescimento σ, é chamada de *matriz de massa* e $\mathbf{J}$, que é a contribuição espacial, de *matriz jacobiana*. Assim, a discretização das equações perturbadas para a análise de estabilidade gera um problema de autovalor generalizado, não-Hermitiano:

$$\mathbf{J}\mathbf{c} = \sigma \mathbf{M}\mathbf{c}. \tag{3-8}$$

Chamando a contribuição espacial das equações de resíduo de $\mathbf{Rs}$ e a temporal de $\mathbf{Rt}$, escreve-se o vetor resíduo como: $\mathbf{R} \equiv \sigma\mathbf{Rt} + \mathbf{Rs}$. E a estrutura das matrizes fica sendo:

$$\mathbf{M} = -\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c|c} \dfrac{\partial Rt^j_{mx}}{\partial U_k} & \dfrac{\partial Rt^j_{mx}}{\partial V_k} = 0 & \dfrac{\partial Rt^j_{mx}}{\partial P_k} = 0 \\ \hline \dfrac{\partial Rt^j_{my}}{\partial U_k} = 0 & \dfrac{\partial Rt^j_{my}}{\partial V_k} & \dfrac{\partial Rt^j_{my}}{\partial P_k} = 0 \\ \hline \dfrac{\partial Rt^j_{c}}{\partial U_k} = 0 & \dfrac{\partial Rt^j_{c}}{\partial V_k} = 0 & \dfrac{\partial Rt^j_{c}}{\partial P_k} = 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} n \\ n \\ m \end{array} \\ \begin{array}{ccc} n & n & m \end{array} & \end{array}$$

$$\mathbf{J} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c|c} \dfrac{\partial Rs^j_{mx}}{\partial U_k} & \dfrac{\partial Rs^j_{mx}}{\partial V_k} & \dfrac{\partial Rs^j_{mx}}{\partial P_k} \\ \hline \dfrac{\partial Rs^j_{my}}{\partial U_k} & \dfrac{\partial Rs^j_{my}}{\partial V_k} & \dfrac{\partial Rs^j_{my}}{\partial P_k} \\ \hline \dfrac{\partial Rs^j_{c}}{\partial U_k} & \dfrac{\partial Rs^j_{c}}{\partial V_k} & \dfrac{\partial Rs^j_{c}}{\partial P_k} = 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} n \\ n \\ m \end{array} \\ \begin{array}{ccc} n & n & m \end{array} & \end{array}$$

3.3 Eliminação dos autovalores no infinito

Como foi visto na seção anterior, a análise de estabilidade dá origem a um problema de autovalor generalizado, equação (3-8). A matriz de massa $\mathbf{M}$ é diagonal por blocos e singular uma vez que uma linha e coluna de blocos são nulas. A linha de blocos nulos vem da equação da continuidade para líquidos incompressíveis, que não traz derivadas temporais, logo não tem valores diferentes de zero nas entradas correspondentes na matriz de massa, $\mathbf{M_{33}} = \dfrac{\partial Rs_c^j}{\partial P_k} = \mathbf{0}$. Conseqüentemente, o número de autovalores finitos da equação (3-8) é menor que a dimensão do problema $N = 2n + m$. Os autovalores que restam são os chamados autovalores no infinito, pois uma pequena perturbação na matriz de massa com o objetivo de torná-la não singular, isto é $\mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \epsilon\mathbf{I}$, origina autovalores de módulo extremamente grandes no espectro que crescem ilimitadamente quando $\epsilon \to 0$. Erros de truncamento cometidos ao resolver o problema de autovalor, equação (3-8), reflete como pequenas perturbações na matriz de massa e gera autovalores infinitos. De acordo com Christodoulou & Scriven, 1988 [11], o número de autovalores no infinito é igual ao número de restrições algébricas do problema discreto, ou seja, equações que não têm a derivada no tempo e são linhas igualmente nulas na matriz de massa. Ou seja, acreditavam que a dimensão do núcleo de $\mathbf{M}$ fosse exatamente o número de linhas nulas na matriz. No caso de um escoamento viscoso com líquido incompressível, as restrições são representadas pelas equações vindas da continuidade (número de graus de liberdade associados à pressão) e ainda as condições de contorno essenciais, Dirichlet. Veremos, entretanto, que o número de autovalores em infinito aparecem em maior número do que os previstos, somando ao todo duas vezes o número de restrições (duas vezes o número de graus de liberdade associados a pressão) além das condições de contorno essenciais, ou seja, a dimensão do núcleo de $\mathbf{M}$ é maior que a soma de suas linhas identicamente nulas.

A presença de autovalores no infinito dificulta os cálculos numéricos, pois a maioria das técnicas iterativas para encontrar os autovalores favorece os de maior módulo. Os autovalores no infinito devem ser eliminados ou identificados de forma que o espectro seja confiavelmente encontrado. Como vimos na seção 2.3, encontram-se na literatura técnicas para obter os autovalores mesmo com a presença de autovalores no infinito. Algumas técnicas envolvem alto custo computacional como é o caso da transformação exponencial, [11]; outras requerem um conhecimento prévio do espectro, como quando se usa a transformação inversa com deslocamento cujos autovalores encontrados são os próximos ao parâmetro de deslocamento, que tem que ser adequadamente escolhido, [15].

Na próxima sessão, um novo método para filtrar os autovalores no infinito do problema (3-8) é proposto. A estrutura das matrizes massa e jacobiana vindas da análise de estabilidade são usadas para eliminar os autovalores no infinito.

3.3.1 Método proposto para solução do problema de autovalor generalizado

Seguindo a ordenação das incógnitas e equações já discutida, isto é, primeiro velocidades e depois a pressão, tanto a matriz de massa como a jacobiana são divididas nos seguintes blocos:

$$\mathbf{M} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{M_{11}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{M_{22}} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right) & \begin{array}{c} n \\ n \\ m \end{array} \\ \begin{array}{ccc} n & n & m \end{array} & \end{array} \qquad \mathbf{J} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{J_{11}} & \mathbf{J_{12}} & \mathbf{J_{13}} \\ \hline \mathbf{J_{21}} & \mathbf{J_{22}} & \mathbf{J_{23}} \\ \hline \mathbf{J_{31}} & \mathbf{J_{32}} & \mathbf{0} \end{array}\right) & \begin{array}{c} n \\ n\,, \\ m \end{array} \\ \begin{array}{ccc} n & n & m \end{array} & \end{array} \tag{3-9}$$

Os autovalores σ do problema generalizado (3-8) são as raízes do determinante $p(\sigma)$ da matriz $\mathbf{A} = \mathbf{J} - \sigma\mathbf{M}$, $p(\sigma) = \det(\mathbf{A})$. Dito de forma diferente, estamos interessados nos valores de σ para os quais o sistema homogêneo $(\mathbf{J} - \sigma\mathbf{M})\mathbf{c} = 0$ tenha solução não trivial $\mathbf{c}$. Em particular, se as matrizes $\mathbf{J}$ e $\mathbf{M}$ fossem substituídas por duas outras $\tilde{\mathbf{J}}$ e $\tilde{\mathbf{M}}$, o problema de autovalor $\tilde{\mathbf{J}}\mathbf{d} = \sigma\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{d}$ teria os mesmos autovalores (generalizados) σ que o sistema original se o correspondente sistema homogêneo $(\tilde{\mathbf{J}} - \sigma\tilde{\mathbf{M}})\mathbf{d} = 0$ tem uma solução não trivial $\mathbf{d}$. Modificações convenientes estão relacionadas com o processo de resolver esse sistema homogêneo com eliminação gaussiana por blocos dos dois lados, operando em linhas e também em colunas. Algebricamente, essas modificações são feitas através da multiplicação de $\mathbf{J}$ e $\mathbf{M}$ por duas matrizes inversíveis $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ independentes de σ.

As b equações algébricas associadas com as condições de contorno essenciais, não dependem do tempo e os campos de velocidade perturbados são zero na fronteira. Vetorialmente, as equações que estão no contorno representam zero nas linhas da matriz de massa e um apenas na diagonal da jacobiana. Essas equações por serem aplicadas nas velocidades estão nos dois primeiros blocos de $\mathbf{J}$ e $\mathbf{M}$. Assim, as linhas e colunas relacionadas às condições de contorno essenciais podem ser retiradas sem alterar as raízes do polinômio $p(\sigma)$. As novas matrizes, quase iguais às antigas, mas sem as linhas e colunas relacionadas às condições de contorno, são chamadas: $\mathbf{J^b}, \mathbf{M^b}$ e $\mathbf{A^b} = \mathbf{J^b} - \sigma\mathbf{M^b}$ de dimensão $2n + m - b$ e com o mesmo determinante $p^b(\sigma) = p(\sigma)$. É conveniente redividir os blocos de $\mathbf{A^b}$:

$$
\begin{array}{cc}
\mathbf{A^b} = \left(\begin{array}{c|c|c}
\mathbf{A^b_{11}}(\sigma) & \mathbf{A^b_{12}}(\sigma) & \mathbf{A^b_{13}} \\ \hline
\mathbf{A^b_{21}}(\sigma) & \mathbf{A^b_{22}}(\sigma) & \mathbf{A^b_{23}} \\ \hline
\mathbf{A^b_{31}} & \mathbf{A^b_{32}} & \mathbf{0}
\end{array}\right) & \begin{array}{c} m \\ 2n-m-b \\ m \end{array} \\
\begin{array}{ccc} \quad\quad\quad m & 2n-m-b & m \end{array} &
\end{array}
\tag{3-10}
$$

Os blocos $\mathbf{A^b_{13}}$, $\mathbf{A^b_{23}}$, $\mathbf{A^b_{31}}$ e $\mathbf{A^b_{32}}$ não têm nenhuma contribuição da matriz de massa, conseqüentemente não dependem do fator de crescimento σ, o autovalor. Observe também que esses blocos são independentes do número de Reynolds, Re.

Queremos verificar que a submatriz retangular formada por $\left(\begin{array}{ccc} \mathbf{A^b_{31}} & \mathbf{A^b_{32}} & \mathbf{0} \end{array}\right)$ tem posto máximo, ou seja, todas as linhas são linearmente independentes entre si. A única maneira de fazer $\mathbf{J}$ singular é através do número de Reynolds, Re. Como a submatriz não depende de Re, caso tivesse posto menor seria para qualquer valor de Re, o que não ocorre, uma vez que a matriz original $\mathbf{J}$ para a maioria dos Re é inversível.

O mesmo raciocínio se aplica à submatriz $\left(\begin{array}{c} \mathbf{A^b_{13}} \\ \mathbf{A^b_{23}} \\ \mathbf{0} \end{array}\right)$. Para uma perturbação que deixe livre o escoamento na direção x e usando o método de Galerkin no caso bidimensional, pode-se ver pelas equações (3-5) – (3-7) que o bloco $\left(\begin{array}{ccc} \mathbf{A^b_{31}} & \mathbf{A^b_{32}} & \mathbf{0} \end{array}\right) = -\left(\begin{array}{c} \mathbf{A^b_{13}} \\ \mathbf{A^b_{23}} \\ \mathbf{0} \end{array}\right)^T$.

Assim, é sempre possível encontrar permutações de forma que os blocos $\mathbf{A^b_{13}}$ e $\mathbf{A^b_{31}}$ sejam inversíveis. Chamando $\mathbf{A^b_{perm}}$ a matriz obtida após permutar $\mathbf{A^b}$. Usando as matrizes definidas abaixo, que realizam eliminações Gaussianas por blocos nas linhas e colunas, para zerar $\mathbf{A^b_{23}}$ e $\mathbf{A^b_{32}}$. Mais precisamente, define-se:

$$
\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{c|c|c}
\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{11}}(\sigma) & \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{12}}(\sigma) & \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{13}} \\ \hline
\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{21}}(\sigma) & \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{22}}(\sigma) & \mathbf{0} \\ \hline
\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{31}} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{array}\right) = \mathbf{T}_\ell \; \mathbf{A^b_{perm}} \; \mathbf{T_r},
\tag{3-11}
$$

onde

$$
\mathbf{T}_\ell = \left(\begin{array}{c|c|c}
\mathbf{I}_{[m]} & 0 & 0 \\ \hline
-\mathbf{A^b_{23}}{\mathbf{A^b_{13}}}^{-1} & \mathbf{I}_{[2n-m-b]} & 0 \\ \hline
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{[m]}
\end{array}\right), \quad
\mathbf{T_r} = \left(\begin{array}{c|c|c}
\mathbf{I}_{[m]} & -{\mathbf{A^b_{31}}}^{-1}\mathbf{A^b_{32}} & \mathbf{0} \\ \hline
\mathbf{0} & \mathbf{I}_{[2n-m-b]} & \mathbf{0} \\ \hline
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{[m]}
\end{array}\right).
$$

Sendo as matrizes $\mathbf{T}_\ell$ e $\mathbf{T_r}$ triangulares inferior e superior respectivamente e contendo um em todas as entradas da diagonal, o valor de seus determinantes é um. O polinômio $p_1(\sigma)$ da matriz transformada $\widetilde{\mathbf{A}}$ é

$$p_1(\sigma) = \det(\widetilde{\mathbf{A}}) = \det(\mathbf{T}_\ell)\ \det(\mathbf{A^b_{perm}})\ \det(\mathbf{T_r}) = \det(\mathbf{A^b_{perm}}) = p(\sigma). \tag{3-12}$$

A multiplicação de $\mathbf{A^b_{perm}}$ por $\mathbf{T}_\ell$ e $\mathbf{T_r}$ não muda o espectro do problema original. E ainda, repare que a matriz transformada, $\widetilde{\mathbf{A}}$, é triangular por blocos na direção da diagonal secundária, logo seu determinante é igual a: $-\det(\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{13}})\ \det(\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{31}})\ \det(\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{22}}(\sigma))$. Somente $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{22}}(\sigma)$ depende do autovalor, e assim $p(\sigma)$, que é o polinômio original, tem as mesmas raízes que o polinômio $p_2(\sigma) = \det(\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{22}}(\sigma))$.

A matriz $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{22}} = -\sigma\widetilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{22}} + \widetilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{22}}$ é não singular, no sentido de que $\widetilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{22}}$ tem inversa. Assim, o número de raízes do polinômio é exatamente $2n-m-b$ que é a dimensão da matriz $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{22}}$ e o número de autovalores finitos no problema original. Com isso, tem-se que o número de autovalores que estão no infinito é duas vezes os graus de liberdade associados à continuidade mais os que vêm das condições de contorno essenciais, $2m + b$.

Como conseqüência, a porção finita do espectro do problema de autovalor generalizado (3-8) pode ser calculada resolvendo o problema reduzido:

$$\left(-\sigma\ \widetilde{\mathbf{M}}_{22} + \widetilde{\mathbf{J}}_{22}\right)\mathbf{c_2} = 0, \tag{3-13}$$

onde $(2n - m - b) \times (2n - m - b)$ matrizes $\widetilde{\mathbf{M}}_{22}$ e $\widetilde{\mathbf{J}}_{22}$ são dadas por:

$$\widetilde{\mathbf{J}}_{22} = (-\mathbf{J^b_{23}}\mathbf{J^b_{13}}^{-1}\mathbf{J^b_{11}} + \mathbf{J^b_{21}})(-\mathbf{J^b_{31}}^{-1}\mathbf{J^b_{32}}) + (-\mathbf{J^b_{23}}\mathbf{J^b_{13}}^{-1})\mathbf{J^b_{12}} + \mathbf{J^b_{22}}; \tag{3-14}$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}_{22} = (-\mathbf{J^b_{23}}\mathbf{J^b_{13}}^{-1}\mathbf{M^b_{11}} + \mathbf{M^b_{21}})(-\mathbf{J^b_{31}}^{-1}\mathbf{J^b_{32}}) + (-\mathbf{J^b_{23}}\mathbf{J^b_{13}}^{-1})\mathbf{M^b_{12}} + \mathbf{M^b_{22}}. \tag{3-15}$$

Porque $\widetilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{22}}$ é inversível, existe um problema clássico de autovalor correspondente,

$$\underbrace{\widetilde{\mathbf{M}}_{22}^{-1}\widetilde{\mathbf{J}}_{22}}_{\mathbf{D}}\,\mathbf{c_2} = \sigma\mathbf{c_2}. \tag{3-16}$$

Repare que o problema transformado requer a inversa de algumas submatrizes. Uma delas é a matriz $m \times m$, que vem do fato de ${\mathbf{J^b_{13}}}^{-1}$ aparecer na definição de $\mathbf{T}_\ell$. A submatriz ${\mathbf{J^b_{31}}}^{-1}$ que aparece na definição de $\mathbf{T_r}$ vai ser calculada apenas quando $\mathbf{J^b_{13}} \neq -{\mathbf{J^b_{31}}}^{\mathbf{T}}$. Ou seja, em alguns casos basta calcular uma só matriz inversa de tamanho $m \times m$. E ainda, para transformar o problema de autovalor generalizado reduzido em um clássico, uma outra inversa de tamanho $(2n - m - b) \times (2n - m - b)$, relativa à submatriz $\widetilde{\mathbf{M}}_{22}$, também é necessária. Existem muitas situações em que é melhor calcular o autovalor generalizado do problema reduzido, ao invés de inverter $\widetilde{\mathbf{M}}_{22}$, melhor não apenas no sentido de custo computacional, mas também, e principalmente, no sentido de precisão. Claramente, para muitos processos iterativos relacionados com a computação de autovalores, inversões podem ser substituídas pela solução de sistemas lineares com estruturas especiais.

O método proposto elimina os autovalores que estão no infinito vindos de sistema de equações com restrições e transforma o problema de autovalor generalizado em um menor de autovalor clássico, no qual o espectro corresponde à parte finita do espectro do problema original. Além dos autovalores, os autovetores $\mathbf{c}$ do problema original $(\mathbf{J} - \sigma\mathbf{M})\mathbf{c} = 0$ são computados em função do autovetor $\mathbf{c_2}$ do problema transformado $\left(-\sigma\, \widetilde{\mathbf{M}}_{22} + \widetilde{\mathbf{J}}_{22}\right) \mathbf{c_2} = \mathbf{0}$.

O primeiro passo é eliminar as linhas e colunas relacionadas com as condições de contorno essenciais. O autovetor correspondente $\mathbf{c^b}$, do problema $\mathbf{A^b c^b} = \mathbf{0}$, é o mesmo que o original apenas sem algumas entradas nulas que correspondem às condições de contorno.

Depois, faz-se uma permutação para garantir que os blocos $\mathbf{A^b_{13}}$ e $\mathbf{A^b_{31}}$ sejam inversíveis, o autovetor também sofre as mesmas permutações. Para eliminar os blocos $\mathbf{A^b_{23}}$ e $\mathbf{A^b_{32}}$ a matriz sofre a seguinte transformação:

$$\mathbf{T}_\ell \mathbf{A^b_{perm}} \mathbf{T_r} = \widetilde{\mathbf{A}}$$

Usando o fato de que o $\det(\mathbf{T}_\ell) = 1$ e $\det(\mathbf{T_r}) = 1$, o problema de autovalor pode ser reescrito como:

$$\mathbf{T}_\ell \mathbf{A^b_{perm}} \underbrace{\mathbf{T_r d}}_{\mathbf{c^b}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{d} = \mathbf{0}\ , \tag{3-17}$$

onde $\mathbf{d} \equiv {\mathbf{T_r}}^{-1}\mathbf{c_b}$ é o autovalor do problema depois de transformado. Por conveniência, divide-se o autovetor da mesma forma que a matriz $\widetilde{\mathbf{A}}$:

$$\mathbf{d} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{d_1} \\ \hline \mathbf{d_2} \\ \hline \mathbf{d_3} \end{array} \right) \begin{array}{c} m \\ 2n - m - b. \\ m \end{array}$$

Multiplicando a matriz $\widetilde{\mathbf{A}}$ pelo vetor $\mathbf{d}$, tem-se:

$$\begin{cases} \mathbf{A_{11}}\ \mathbf{d_1} + \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{12}}\ \mathbf{d_2} + \mathbf{A_{13}}\ \mathbf{d_3} & = \mathbf{0} \\ \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{21}}\ \mathbf{d_1} + \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{22}}\ \mathbf{d_2} & = \mathbf{0} \\ \mathbf{A_{31}}\ \mathbf{d_1} & = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Porque $\mathbf{A_{31}}$ é inversível, a única solução para $\mathbf{A_{31}}\ \mathbf{d_1} = \mathbf{0}$ é a trivial $\mathbf{d_1} = 0$. Conseqüentemente, a segunda equação torna-se $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{22}}\ \mathbf{d_2} = \mathbf{0}$, que é exatamente o problema reduzido, eq. (3-13). A solução não trivial é o autovalor do problema reduzido final $\mathbf{c_2}$. Finalmente o bloco $\mathbf{d_3}$ pode ser facilmente obtido calculando $\mathbf{d_3} = -\mathbf{A_{13}}^{-1}\ \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{12}}\ \mathbf{c_2}$.

Assim, o autovetor do problema após as transformações a direita e a esquerda, $\mathbf{d}$, pode ser escrito em função do autovetor do problema reduzido $\mathbf{c_2}$:

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{c_2} \\ -\mathbf{A_{13}}^{-1}\ \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{12}}\ \mathbf{c_2} \end{pmatrix}. \qquad (3\text{-}18)$$

Facilmente cria-se um algoritmo relacionando os autovetores do problema original, $\mathbf{c}$, com o problema reduzido três vezes menor, $\mathbf{c_2}$.

Uma vez com o autovetor do problema reduzido, $\mathbf{c_2}$, usa-se a relação (3-18) para encontrar $\mathbf{d}$. Lembrando que o autovetor do problema original sem as entradas relacionadas às condições de contorno de Dirichlet, $\mathbf{c_b}$, está relacionado a $\mathbf{d}$ da seguinte forma:

$$\mathbf{c_b} = \mathbf{T_r}\ \mathbf{d}. \qquad (3\text{-}19)$$

Finalmente, acrescentando zeros nas entradas relacionadas às condições de contorno essenciais do autovetor $\mathbf{c_b}$, tem-se o autovetor do problema original (3-8), $\mathbf{c}$.

Nos próximos capítulos, o método proposto vai ser utilizado na solução do problema de autovalor generalizado resultante da análise de estabilidade linear de um escoamento unidimensional (capítulo 4) e bidimensional (capítulo 5).