

4

Escoamento de Couette de líquido Newtoniano: Formulação unidimensional

Como um primeiro exemplo, a estabilidade de um escoamento simples, puramente cisalhante e bastante explorado na literatura, o escoamento de Couette, vai ser estudada. As equações vão ser discretizadas segundo o método de elementos finitos e a solução do problema de autovalor será obtida pelo novo método e pelos métodos já existentes. O espectro do problema reduzido, obtido pela nova metodologia, vai ser comparado não só com o do original, mas também com espectros de outras formulações descritas em artigos na literatura.

4.1

Escoamentos paralelos

Os escoamentos paralelos formam uma classe muito interessante e importante dentre os diversos escoamentos de interesse, isso porque são escoamentos protótipos que representam simplificações de alguns experimentos modelos e é uma das poucas classes onde se consegue solução analítica.

Com o objetivo de construir o escoamento base a ser perturbado, resolve-se o escoamento de Couette entre duas placas. A geometria e condições de contorno estão ilustrados na figura 4.1: líquido escoando entre duas placas paralelas com velocidades opostas localizadas em $y = \pm 1$ a velocidade das placas são $U = \pm 1$, respectivamente.

As equações adimensionais de conservação de massa e quantidade de movimento, dadas em (2-8):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ Re \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u}, \end{cases}$$

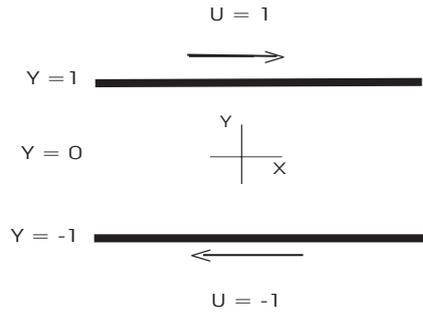


Figura 4.1: Couette

Sujeito às seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(y = 1) = (1, 0, 0), \\ \mathbf{u}(y = -1) = (-1, 0, 0). \end{cases} \quad (4-1)$$

A solução analítica, em regime permanente é:

$$\mathbf{u}_0 = (y, 0, 0), \quad e \quad p_0 = 0.$$

Tem-se, então, o escoamento base a ser perturbado. Perturbando o escoamento seguindo a teoria de modos normais:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}' e^{i(\alpha x + \beta z) + \sigma t}, \quad p = \epsilon p' e^{i(\alpha x + \beta z) + \sigma t}. \quad (4-2)$$

Substituindo (4-2) nas equações de conservação adimensionais (2-8) e supondo perturbações suficientemente pequenas para que os termos de ordem $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ sejam ignorados, chega-se a um sistema linear de equações diferenciais nas variáveis perturbadas e com mais um escalar, σ , como incógnita, caracterizando o problema de autovalor.

Observe que as condições de contorno (4-1) tornam-se de Dirichlet homogêneas para o campo perturbado: $\mathbf{u}(y = 1) = (1, 0, 0) \Rightarrow \mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}' e^{i(\alpha x + \beta z) + \sigma t} = (1, 0, 0)$, como

$$\mathbf{u}_0(y = 1) = (1, 0, 0) \Rightarrow \mathbf{u}' = \mathbf{0}. \quad (4-3)$$

Assim, lembrando que $\mathbf{u}'(y) = (u'(y), v'(y), w'(y))$, as equações são:

$$i\alpha u' + \frac{dv'}{dy} + i\beta w' = 0, \quad (4-4)$$

$$Re[(\sigma + i\alpha y)u' + v'] = -i\alpha p' + \frac{d^2 u'}{dy^2} - (\alpha^2 + \beta^2)u',$$

$$Re[(\sigma + i\alpha y)v'] = -\frac{dp'}{dy} + \frac{d^2 v'}{dy^2} - (\alpha^2 + \beta^2)v',$$

$$Re[(\sigma + i\alpha y)w'] = -i\beta p' + \frac{d^2 w'}{dy^2} - (\alpha^2 + \beta^2)w',$$

Uma notável simplificação no problema de estabilidade foi revelada por Squire (1933). Ele mostrou que, para toda instabilidade 3D existe uma correspondente 2D mais instável, podendo assim trabalhar em duas dimensões ($w' = 0$ e $\beta = 0$), [21]. Para isso, considere a seguinte transformação:

$$(\alpha^*)^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \sigma^* = \sigma, \quad \frac{p^*}{\alpha^*} = \frac{p}{\alpha} \quad (4-5)$$

$$\alpha^* u'^* = \alpha u' + \beta w', \quad v'^* = v', \quad \alpha^* Re^* = \alpha Re.$$

As equações (4-4), depois da transformação, tornam-se:

$$i\alpha u'^* + \frac{dv'^*}{dy} = 0, \quad (4-6)$$

$$Re^*[(\sigma^* + i\alpha^* y)u'^* + v'^*] = -i\alpha p' + \frac{d^2 u'^*}{dy^2} - (\alpha^*)^2 u'^*, \quad (4-7)$$

$$Re^*[(\sigma^* + i\alpha^* y)v'^*] = -\frac{dp'}{dy} + \frac{d^2 v'^*}{dy^2} - (\alpha^*)^2 v'^*. \quad (4-8)$$

Operando as equações de forma a eliminar a pressão (formulação de vorticidade), derivando (4-7) com relação a y e multiplicando (4-8) por $(-i\alpha)$, somando-as e ainda usando a relação entre u' e v' dada pela continuidade ($u' = \frac{i}{\alpha} \frac{dv'}{dy}$), as três equações podem ser reduzidas a uma equação diferencial de quarta ordem:

$$Re^* \left(\frac{i\sigma^*}{\alpha^*} - y \right) \left[\frac{d^2 v'^*}{dy^2} - \alpha^{*2} v'^* \right] - i\alpha^{*3} v'^* + 2i\alpha^* \frac{d^2 v'^*}{dy^2} - \frac{i}{\alpha^*} \frac{d^4 v'^*}{dy^4} = 0. \quad (4-9)$$

Ou ainda, sendo o problema incompressível e 2D pode-se introduzir uma função de corrente - ψ onde, $\hat{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ e $\hat{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, lembrando

que, $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}'(y)e^{i(\alpha x + \beta z) + \sigma t}$ e escrevendo a função de corrente do mesmo modo, $\psi = \phi(y)e^{i(\alpha x + \beta z) + \sigma t}$, então:

$$u' = \frac{d\phi}{dy}; \quad v' = -i\alpha\phi.$$

Chega-se então ao famoso operador Orr-Sommerfeld, [5]:

$$(i\alpha y + \sigma)\left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right)\phi = \frac{1}{Re}\left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right)^2\phi. \quad (4-10)$$

Dado o operador, encontra-se com frequência na literatura uma discretização da equação e das condições de contorno por métodos espectrais, como Chebyshev- τ . Gerando, assim, um problema de autovalor generalizado.

Com o objetivo de investigar a estabilidade deste mesmo problema, porém com uma metodologia que possa ser estendida para escoamentos complexos, faz-se a formulação fraca nas variáveis primitivas e discretizam-se as equações seguindo o método de Galerkin de elementos finitos.

Observe que as equações podem ser discretizadas em estágios diferentes nas manipulações algébricas. Para testar o método proposto na seção 3.3.1 vamos discretizar as equações (4-6) – (4-8). Mais tarde, o sistema (4-4) também é discutido.

4.2

O método de solução

Para um número de onda fixo α , as amplitudes das perturbações u' , v' e p' e o fator de crescimento σ podem ser encontrados usando o método de Galerkin com bases de elementos finitos nas equações (4-6) – (4-8), seguindo o que se apresentou na seção 3.2.

O campo de velocidade é aproximado com polinômios lagrangeanos quadráticos por elemento, ϕ_j , enquanto que o campo de pressão com polinômios lineares descontínuos, χ_j , também por elemento. Seguindo a idéia do método de Galerkin, as mesmas funções base usadas para expandir o campo de velocidade serão usadas como peso nos resíduos ponderados relativos às equações de momento, ϕ_j . E a mesma função χ_j usada pra expandir a pressão é usada como a função peso do resíduo relativo à equação da continuidade.

As funções base/peso, em termos da variável local ξ , são mostradas em (4-11) e ilustradas pelas figuras 4.2 e 4.3:

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= \frac{\xi(\xi - 1)}{2}, & \chi_1(\xi) &= 1, \\ \phi_2(\xi) &= \frac{\xi(\xi + 1)}{2}, & \chi_2(\xi) &= \xi. \\ \phi_3(\xi) &= -(\xi + 1)(\xi - 1). \end{aligned} \tag{4-11}$$

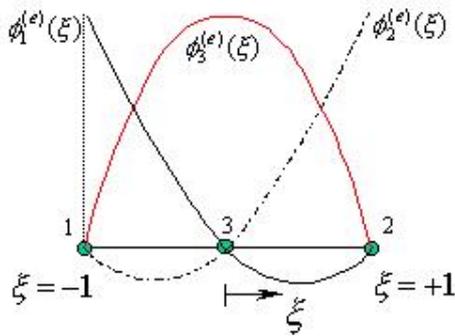


Figura 4.2: Elemento quadrático.

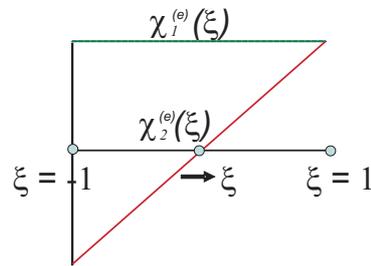


Figura 4.3: Elemento linear.

Lembrando que a escolha dos espaços usados para expandir os campos não pode ser qualquer, isto é, existe uma condição que determina se uma certa combinação de espaços de funções para a velocidade e pressão é válida. Essa condição é conhecida como: Condição de Babuska-Brezzi. A condição verifica a consistência das aproximações das derivadas. A interpolação de \mathbf{u} e p não podem ser escolhidas arbitrariamente.

$$\forall \chi_i; \left[\phi_i \sup \frac{\int_{\Omega} \chi_i \nabla \cdot \phi_i \, d\Omega}{\left\{ \int_{\Omega} |\nabla \phi_i|^2 \, d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}}} \geq c \left\{ \int_{\Omega} \chi_i^2 \, d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \right]$$

As matrizes resultantes da discretização têm a mesma estrutura das apresentadas em (3-9). Com cada entrada dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{11} &= -\frac{\partial R t_{mx}^j}{\partial U_k} = -\int_{-1}^1 Re \phi_j \phi_k \, dy; \\ \mathbf{M}_{22} &= -\frac{\partial R t_{my}^j}{\partial V_k} = -\int_{-1}^1 Re \phi_j \phi_k \, dy; \end{aligned}$$

$$\mathbf{J}_{11} = \frac{\partial R s_{mx}^j}{\partial U_k} = \int_{-1}^1 \left((Re \, i \, \alpha \, y + \alpha^2) \phi_j \phi_k + \frac{d\phi_j}{dy} \frac{d\phi_k}{dy} \right) dy;$$

$$\mathbf{J}_{12} = \frac{\partial R s_{mx}^j}{\partial V_k} = \int_{-1}^1 Re \phi_j \phi_k dy;$$

$$\mathbf{J}_{13} = \frac{\partial R s_{mx}^j}{\partial P_k} = \int_{-1}^1 i \alpha \chi_j \phi_k dy;$$

$$\mathbf{J}_{22} = \frac{\partial R s_{my}^j}{\partial V_k} = \int_{-1}^1 \left((Re i \alpha y + \alpha^2) \phi_j \phi_k + \frac{d\phi_j}{dy} \frac{d\phi_k}{dy} \right) dy;$$

$$\mathbf{J}_{23} = \frac{\partial R s_{my}^j}{\partial P_k} = - \int_{-1}^1 \chi_j \frac{d\phi_k}{dy} dy;$$

$$\mathbf{J}_{31} = \frac{\partial R s_c^j}{\partial U_k} = \int_{-1}^1 i \alpha \phi_j \chi_k dy;$$

$$\mathbf{J}_{32} = \frac{\partial R s_c^j}{\partial V_k} = \int_{-1}^1 \frac{d\phi_j}{dy} \chi_k dy;$$

os blocos que não aparecem são nulos. Para cada linha correspondente à condição de contorno de Dirichlet, faz-se $u' = 0$ e $v' = 0$, isto significa todas as entradas das matrizes massa e jacobiana são iguais a zero com exceção das diagonais da jacobiana que são iguais a um.

4.2.1

Filtrando os autovalores no infinito.

Apresenta-se agora as etapas descritas na secção 3.3.1 para uma discretização com três elementos. Para esse nível de discretização, o número de coeficientes usados na expansão da base de elementos finitos para representar o campo de velocidade perturbado é $n = 7$, e para a pressão é $m = 6$. O número total de graus de liberdade é $N = 2n + m = 20$. A figura 4.4 mostra o esquema de numeração das variáveis que gera a estrutura matricial. Observe que Ck é o coeficiente do campo aproximado relativo ao grau de liberdade k ; assim, $Ck = Uk$, $k = 1 \dots 7$ aproxima o campo de velocidade u' ; $Ck = V(k - 7)$, $k = 8 \dots 14$ o campo de velocidade v' ; e $Ck = P(k - 14)$, $k = 15 \dots 20$ a pressão.

A estrutura da matriz original $\mathcal{A} = -\sigma \mathbf{M} + \mathbf{J}$ é mostrada na figura 4.5. As linhas 1, 6, 8 e 13 estão associadas às condições de contorno essenciais e são diferentes de zero e iguais a um somente na diagonal da matriz jacobiana, \mathbf{J} .

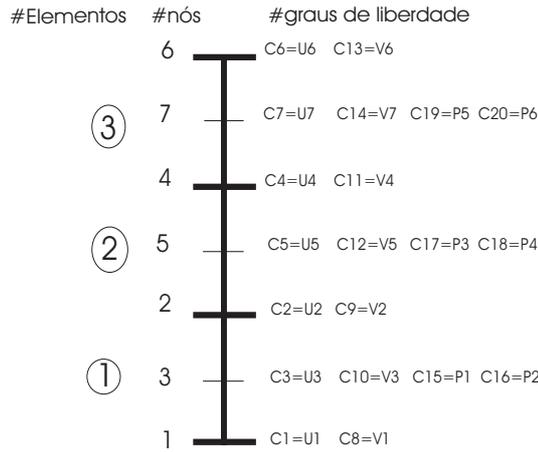


Figura 4.4: Exemplo da numeração dos elementos, nós e graus de liberdade para uma malha com três elementos, onde Ck é o coeficiente do campo aproximado relativo ao grau de liberdade k ; assim, $Ck = U_k$ de $k = 1 \dots 7$ aproxima o campo de velocidade u' ; $Ck = V(k - 7)$ de $k = 8 \dots 14$ o campo de velocidade v' e $Ck = P(k - 14)$ de $k = 15 \dots 20$ a pressão.

Como já foi explicado, o primeiro passo é eliminar as linhas e colunas associadas às condições de contorno essenciais. A estrutura da matriz sem as condições de contorno pode ser vista na Fig. 4.6.

O próximo passo é eliminar os blocos \mathbf{A}_{32} e \mathbf{A}_{23} usando as transformações definidas na equação (3-11). Por construção, as matrizes \mathbf{T}_ℓ e \mathbf{T}_r trazem as inversas de \mathbf{A}_{13} e \mathbf{A}_{31} . Nesse caso particular unidimensional, permutações podem ser feitas para transformar os blocos \mathbf{A}_{13} e \mathbf{A}_{31} em submatrizes diagonais e evitar o cálculo da inversa. A figura 4.7 mostra a estrutura da matriz com três elementos depois das permutações feitas. No apêndice A apresenta-se os programas das transformações aplicadas nas matrizes com e sem as permutações.

Depois de transformada, a estrutura da matriz, $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}_\ell \mathbf{A} \mathbf{T}_r$, pode ser vista na figura 4.8. Toda a informação do espectro da matriz original, ou seja, os autovalores finitos do problema estão no bloco central de tamanho $(2n - m - b) \times (2n - m - b)$ na matriz transformada (4×4 no caso de 3 elementos).

4.2.2 Resultados para a validação do novo método

Para poder validar o espectro calculado utilizando o método de elementos finitos e o método proposto neste trabalho para solução do problema de autovalor, foi escolhido o trabalho apresentado por Bottaro,

2003 [31], que calculou o espectro usando o método QZ no problema de autovalor generalizado obtido com a técnica de colocação de Chebyshev. Os parâmetros usados foram $Re = 500$ e $\alpha = 1.5$.

Um teste de malha foi feito para garantir a convergência dos autovalores calculados. O espectro do problema de autovalor generalizado na matriz original, equação (3-8), foi obtido para dois diferentes números de elementos e ainda comparados com o espectro apresentado por Bottaro, 2003 [31] na figura 4.9. No intervalo de $-3.5 < \mathcal{R}(\sigma) < 0$, dobrando o número de elementos de 100 para 200 o espectro encontrado coincide na ordem $\mathcal{O}(10^{-5})$. Com isso, uma malha com 100 elementos foi considerada suficientemente fina para calcular os autovalores.

Para checar o desempenho da formulação por elementos finitos, o espectro com um número de Reynolds alto foi também calculado. Dongarra *et. al.*, 1996 [17] apresentaram o espectro calculado com $Re = 13000$ e $\alpha = 1$, onde a discretização do operador de Orr-Sommerfeld foi feita pelo método de colocação Chebyshev e o problema de autovalor foi calculado por QZ. A tabela 4.1 apresenta a comparação dos quatorze pares mais próximos ao eixo imaginário do presente trabalho e do apresentado em [17]. Como já foi comentado, a formulação do presente trabalho baseia-se nas variáveis primitivas, velocidade e pressão, e as equações diferenciais são discretizadas usando o método de Galerkin / elementos finitos. Obtém-se excelente concordância com resultados apresentados na literatura, tanto o espectro calculado no problema original, como o espectro obtido depois de usar as transformações apresentadas na secção 3.3.1. Com 100 elementos, o número de graus de liberdade do problem original é de $N = 602$, onde $n = 201$, $m = 200$ e $b = 4$. Depois de usar as transformações, a submatriz em que toda a informação do espectro se encontra, tem dimensão $2n - m - b = 198$.

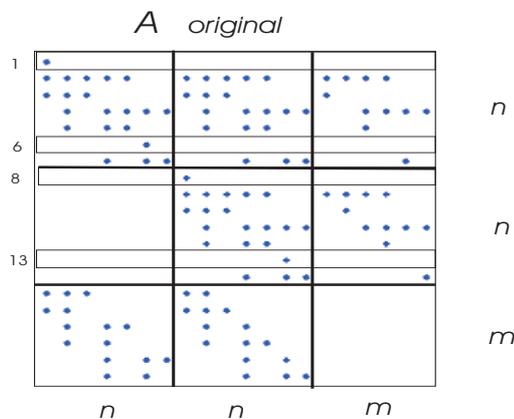


Figura 4.5: Exemplo da estrutura da matriz original com 3 elementos.

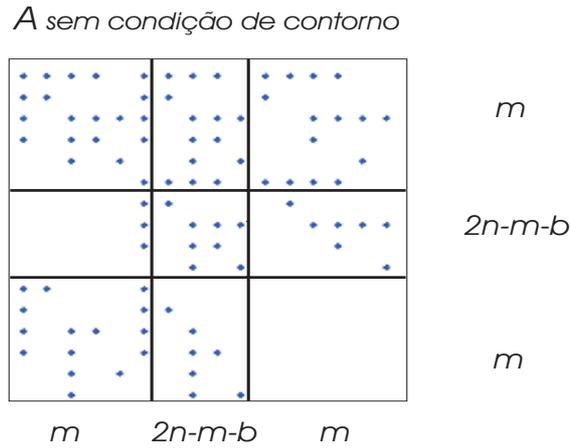


Figura 4.6: Matriz \mathbf{A}^b (\mathbf{A} sem condição de contorno), com 3 elementos.

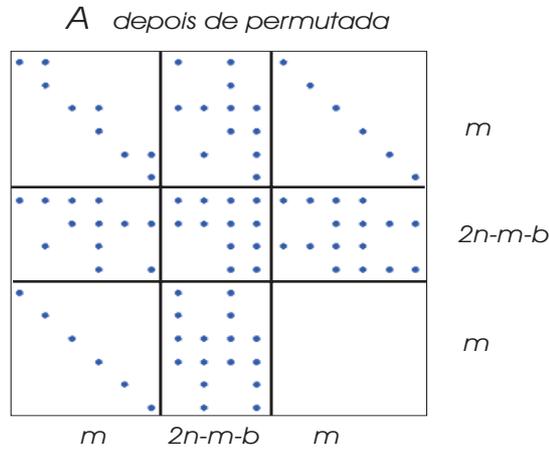


Figura 4.7: Estrutura da matriz depois de permutações que diagonalizaram as submatrizes: \mathbf{A}_{13} e \mathbf{A}_{31} .

Considerando que tipicamente $\mathcal{O}(n) \simeq \mathcal{O}(m)$, a dimensão do problema de autovalor generalizado original é $N = 2n + m \simeq \mathcal{O}(3n)$. Sendo o número de condições de contorno essenciais desprezíveis, comparando com o número de graus de liberdade associados a uma das direções de velocidade, $b \ll n$, a dimensão do problema de autovalor reduzido final, EVP é $2n - m - b \simeq \mathcal{O}(n)$, ou seja, aproximadamente 1/3 do tamanho do problema original.

O problema reduzido, eq. (3-16), e o problema original, eq.(3-8), foram resolvidos pela rotina **ZGEEV** do pacote LAPACK (para matrizes não hermitianas). Quando o problema é de autovalor generalizado, o método **QZ** é usado. Como esperado, o problema reduzido tem a porção finita dos autovalores do problema original. Os autovalores foram calculados para o problema original e também para o reduzido. A figura 4.9 mostra concordância de até 7^a casa decimal dos autovalores que se encontram

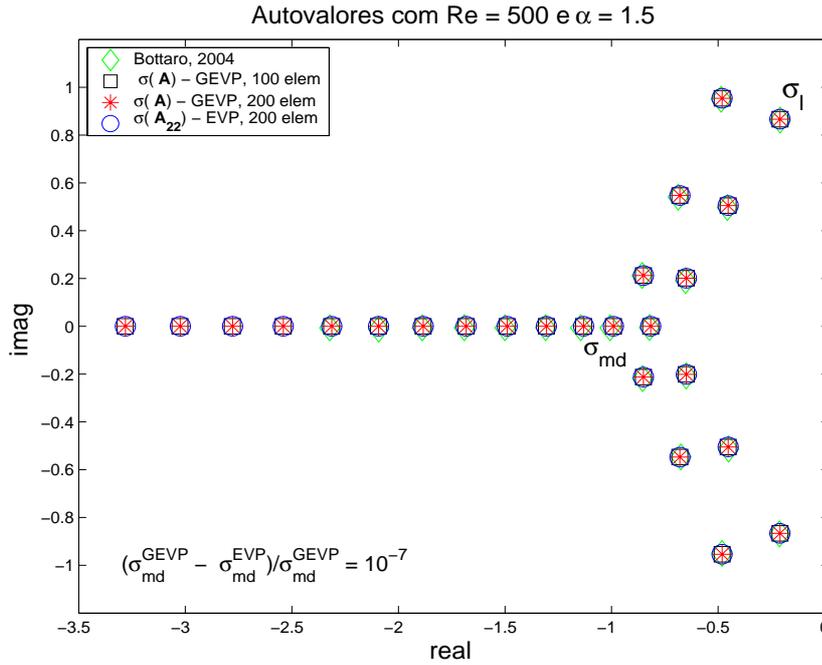


Figura 4.9: Espectro próximo do eixo imaginário relativo ao escoamento de Couette com $Re = 500$ e $\alpha = 1.5$. Comparação entre o espectro apresentado por Bottaro; o espectro calculado no problema original, usando método QZ, com 100 e 200 elementos e o espectro do problema transformado com 200 elementos.

duas direções e pressão. Como esperado, os autovetores calculados a partir do problema reduzido e no problema original são praticamente os mesmos, com um erro relativo da ordem menor que $\mathcal{O}(10^{-7})$. Assim o novo método que elimina os autovalores no infinito se mostrou eficiente no cálculo do autopar: (σ, \mathbf{c}_2) .

O efeito da discretização nos autovetores calculados também foi avaliado. Duas diferentes malhas foram testadas: 100 e 200 elementos, que correspondem a 602 e 1202 graus de liberdade respectivamente. Alguns valores de y foram escolhidos, já que a dimensão do autovetor com 200 elementos é maior, para que o erro relativo pudesse ser calculado. De 100 pra 200 elementos o erro relativo ficou na ordem de $\mathcal{O}(10^{-5})$.

Além da dimensão do problema, o método aqui apresentado reduz significativamente o tempo computacional. A tabela 4.2 apresenta o tempo de CPU em segundos para o cálculo do problema de autovalor original, usando QZ, e o tempo necessário para transformar o problema e calcular o autovalor do problema reduzido. A contagem de tempo inclui as transformações feitas no processo de redução do problema, ou seja, inclui a inversa dos blocos \mathbf{A}_{13} e \mathbf{A}_{31} , de tamanho $m \times m$, que aparecem na definição de \mathbf{T}_r e \mathbf{T}_l e

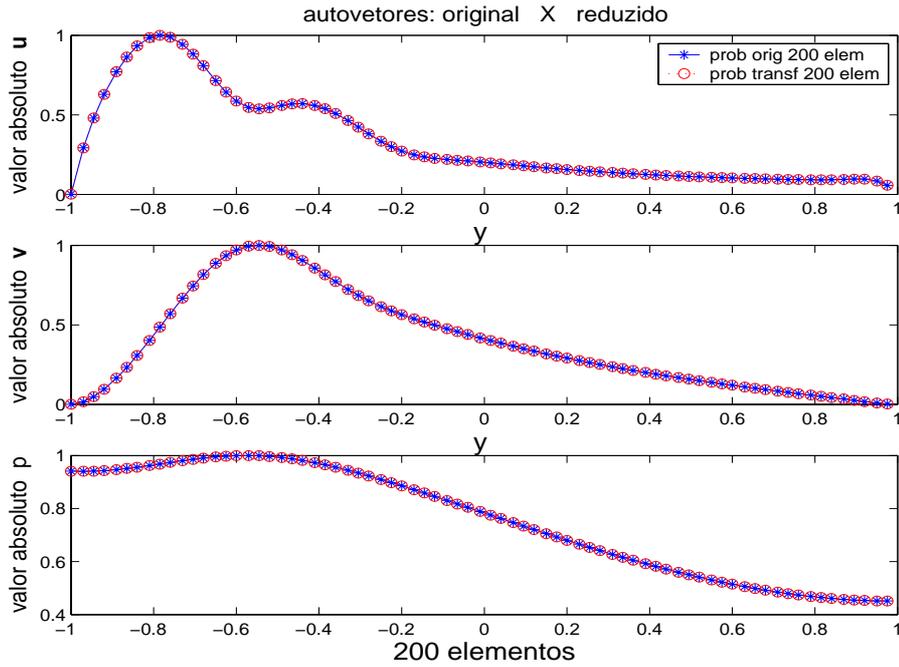


Figura 4.10: Autovetores do problema original GEVP são recuperados a partir dos autovetores do problema reduzido EVP, como esperado. Os cálculos foram feitos com 200 elementos e a maior diferença, para um mesmo y em todos os campos, foi da ordem de $\mathcal{O}(10^{-5})$.

também da matriz \mathbf{M}_{22} de tamanho $(2n - m - b) \times (2n - m - b)$, além de produtos de matrizes. Todos os cálculos levam em conta a esparsidade das matrizes. Para $N_{\text{original}} > 600$, o método proposto é mais rápido por um fator de aproximadamente 30. Nesse caso particular unidimensional, permutações podem ser usadas para diagonalizar os blocos \mathbf{A}_{13} e \mathbf{A}_{31} evitando assim o cálculo de suas inversas. Sendo esse caso muito particular e com matrizes especialmente esparsas, não existiu ganho em tempo computacional ao fazer as permutações ao invés das inversas, mas é visível o ganho em precisão. Aumentando o número de elementos os erros numéricos crescem e a figura 4.11 mostra os autovalores calculados pelo método reduzido em dois contextos: 1) Usando a inversa das duas submatrizes \mathbf{A}_{13} e \mathbf{A}_{31} e 2) Evitando a inversa através de permutações que diagonalizam as submatrizes \mathbf{A}_{13} e \mathbf{A}_{31} . Comparando as duas formas diferentes de transformar o problema com resultados da literatura, percebe-se que aparece um distúrbio no espectro em torno de $\mathcal{R}(\sigma) \approx -1$ para o caso onde a inversa dos blocos é calculada, enquanto o espectro calculado nas matrizes que foram permutadas permanece intacto.

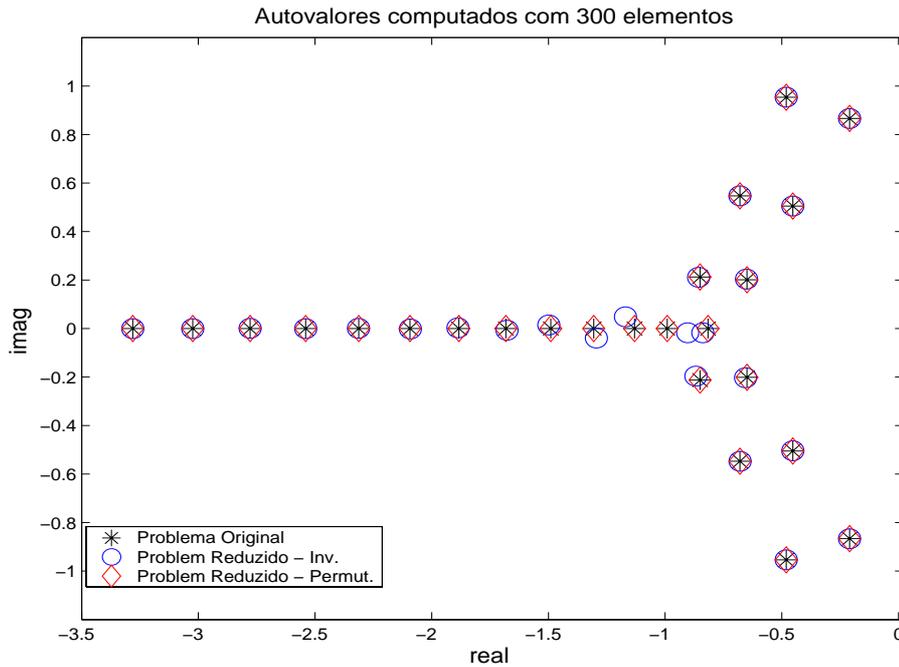


Figura 4.11: Espectro calculado com 300 elementos. Comparando a precisão dos autovalores calculados: 1) Usando a inversa das submatrizes e 2) Evitando a inversa através de permutações

Tabela 4.2: Comparando o tempo de CPU, em segundos, e a dimensão das matrizes ao calcular os autovalores (a) resolvendo o problema original GEVP com o método QZ; (b) resolvendo o problema reduzido EVP.

# ele	$N_{\text{original}} = 2n + m$	$N_{\text{reduzido}} = 2n - m - b$	GEVP tempo	EVP tempo	$\frac{t_{\text{GEVP}}}{t_{\text{EVP}(i)}}$
50	302	98	3.57	0.27	13.22
100	602	198	28.70	0.891	32.21
150	902	298	98.25	3.36	29.3
200	1202	398	242.84	7.89	30.78
300	1802	598	836.86	27.67	30.24
350	2102	698	1435.51	40.734	35.27

4.2.3

Como variam os autovalores em função dos parâmetros Re e α

A teoria linear prevê que o escoamento de Couette é incondicionalmente estável, [4]. Isso significa que para qualquer que seja o valor de Re ou de α impostos dentro da teoria linear, o espectro estará todo ao lado esquerdo do eixo imaginário. Porém observa-se que o espectro se aproxima do eixo imaginário quando o número de Reynolds cresce. Assim como Re , a variação do número de onda α também influencia o espectro, mas nesse

caso quanto menor for o valor de α mais os autovalores se aproximam do eixo imaginário. Mostra-se a seguir alguns espectros para diferentes valores do número de Reynolds Re e número de onda α da perturbação.

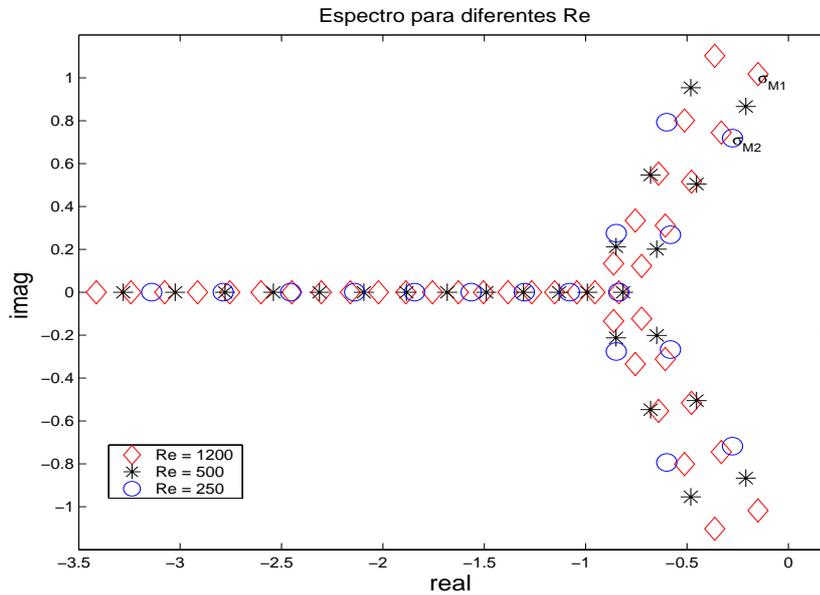


Figura 4.12: Observando como o espectro responde a variação do número de Reynolds. Quanto maior o número de Re o espectro fica mais próximo do eixo imaginário.

O escoamento de Couette é estável. Contudo, experimentos revelam transição, como no trabalho de Tillmark de 1992 [13], para dado valor de Re . Esta aparente discordância provavelmente se deve ao fato de ser muito complicado garantir perturbações infinitesimais nos experimentos, fugindo então da teoria linear. Porém, natural que o espectro se aproxime do eixo imaginário quando Re cresce, pois indica que o efeito das forças viscosas é baixo em relação às inerciais.

A figura 4.12 mostra o espectro para três diferentes números de Reynolds: $Re = 1200$, $Re = 500$ e $Re = 250$. Repare que ao diminuir o número de Reynolds o número de autovalores complexos conjugados diminui e o autovalor com maior parte real se afasta do eixo imaginário. No caso de $Re = 1200$, o espectro é composto por autovalores distribuídos no eixo real e dez pares de autovalores complexos conjugados formando os dois ramos mais próximos do eixo imaginário, onde o autovalor σ_{M1} destacado na figura 4.12 tem parte real: $\mathcal{R}(\sigma_{M1}) = -0.150$. No caso $Re = 250$, os dois ramos são compostos de apenas quatro pares de autovalores complexos conjugados e o mais próximo do eixo imaginário, destacado na figura 4.12 como σ_{M2} , tem parte real: $\mathcal{R}(\sigma_{M2}) = -0.276$, mais distante.

Como ao diminuir o número de Reynolds o espectro perde autovalores complexos conjugados, vai existir então, um determinado número de Reynolds em que todos os autovalores deixam de ter componente complexo, ou seja, tornam-se puramente reais. A figura 4.13 mostra como variam os autovalores diminuindo o número de Reynolds de $Re = 36$ para $Re = 35$. Para $\alpha = 1.5$ e $Re \leq 35$ o espectro é real e se afasta do eixo imaginário para Re menores, como mostra o espectro referente a $Re = 10$.

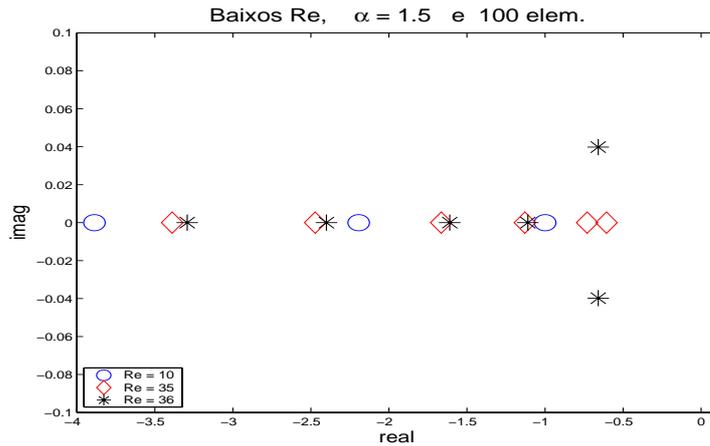


Figura 4.13: Diminuindo de $Re = 36$ para $Re = 35$ o espectro torna-se puramente real.

Para analisar a variação do espectro em função do número de onda, α , é importante lembrar que o número de onda é o inverso do comprimento de onda. A figura 4.14 mostra o espectro para três números de onda: $\alpha = 3$, $\alpha = 1.5$ e $\alpha = 0.5$. Para α s muito pequenos os autovalores também perdem pares conjugados em favor de autovalores puramente reais. Observando as equações (4-6) - (4-8), percebe-se que ao fazer $\alpha \rightarrow 0$, o problema torna-se $-u'' = \lambda u$, com $u(\pm 1) = 0$ e $\lambda = Re \sigma$, logo os autovetores e autovalores têm solução analítica. A figura 4.15 mostra os autovalores puramente reais calculados com 100 e 200 elementos comparando com a solução analítica do problema limite $\alpha \rightarrow 0$. O erro relativo do autovalor mais próximo do eixo imaginário entre o valor calculado com 200 elementos e o valor analítico está na ordem $\mathcal{O}(10^{-7})$. Os 63 primeiros autovalores têm erro relativo menor que $\mathcal{O}(10^{-3})$, isso significa autovalores até $\sigma \simeq -19$. Depois disso o erro aumenta, mostrando uma faixa de confiabilidade dependendo da precisão esperada, que varia de acordo com o refinamento da malha.

Repare que no limite $\alpha \rightarrow 0$, sendo $\sigma = \lambda/Re$, o autovalor que mais se aproxima do eixo imaginário acontece para valores de Re altos, ou seja, $Re \rightarrow \infty$.

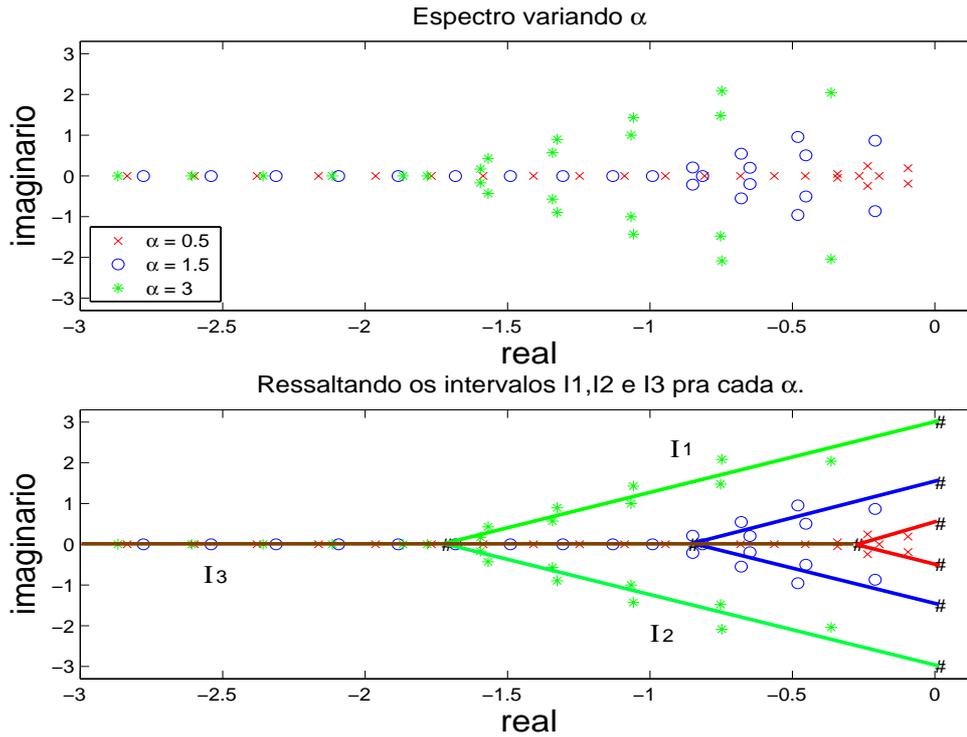


Figura 4.14: Espectro calculado com $Re = 500$ e variando $\alpha = 0.5$, $\alpha = 1.5$, $\alpha = 3$. Pelo gráfico de cima, nota-se que para menores α s o espectro se aproxima do eixo imaginário. No gráfico de baixo estão traçadas as curvas críticas para cada α .

No antigo trabalho de Morawetz, 1952 [1], ele mostra que os autovalores de Orr-Sommerfeld para o escoamento de Couette se encontram na vizinhança de curvas que chamou de críticas. Essas curvas são a junção de três segmentos, no caso dos parâmetros $\alpha = 1$ e $Re = 3000$ definidos em seu trabalho [1], eles seriam: $I_1 = [i, -1/\sqrt{3}]$, $I_2 = [-1/\sqrt{3}, -i]$, $I_3 = [-1/\sqrt{3}, -\infty]$.

Note pela figura 4.12 que dado um α fixo, as curvas críticas serão as mesmas para todo $Re \geq 36$. Entretanto, as curvas críticas são sensíveis ao número de onda α e podem ser escritas em função do mesmo. Os segmentos acompanham α da seguinte forma: $I_1 = [\alpha i, -\alpha/\sqrt{3}]$, $I_2 = [-\alpha/\sqrt{3}, -i \alpha]$, $I_3 = [-\alpha/\sqrt{3}, -\infty]$. A figura 4.14 mostra o espectro e também as curvas críticas para diferentes α 's. Observando os intervalos, quando $\alpha \rightarrow 0$, os autovalores tendem à curva crítica $I_3^{\alpha \rightarrow 0} = [0, -\infty]$, o que concorda com o resultado analítico das equações para $\alpha \rightarrow 0$.

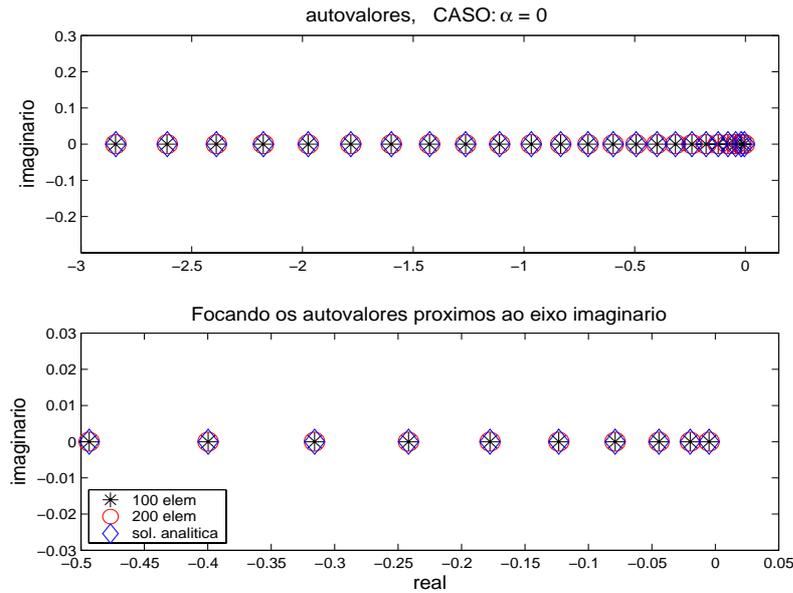


Figura 4.15: No caso de $\alpha \rightarrow 0$ o espectro é puramente real e a solução numérica recupera a analítica.

4.2.4 Autovetores - escoamento Newtoniano

Nesta seção os autovetores relativos aos autovalores destacados na figura 4.16 são analisados.

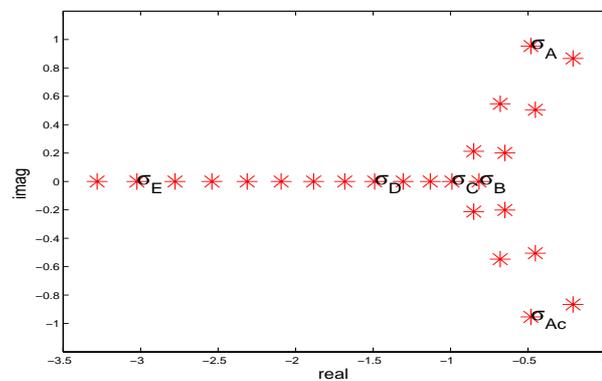


Figura 4.16: Autovalores cujos autovetores serão analisados.

Devido à geometria simétrica, os autovalores σ_A e σ_{Ac} são praticamente conjugados e seus autovetores então próximos de serem espelhados, como mostra a figura 4.17.

Outra observação interessante é que os autovetores apresentam uma oscilação suave na direção transversal ao escoamento (coordenada y) e a frequência aumenta à medida que o autovalor se afasta do eixo imaginário, como mostra o campo de perturbação de pressão para diferentes autovalores

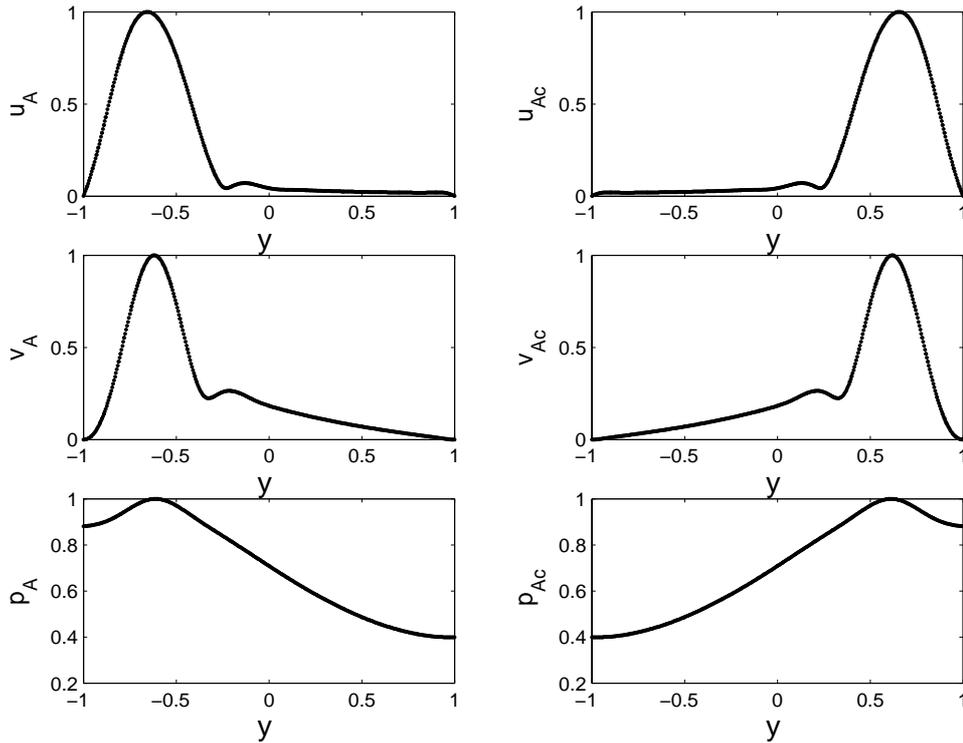


Figura 4.17: Autovetores correspondentes aos autovalores σ_A e σ_{Ac}

na figura 4.18. A partir do ponto em que essa frequência ultrapassa o refinamento da malha, ela deixa de ser suficiente para capturar todas as oscilações do autovetor. Isso ocorre nos autovetores relativos aos autovalores afastados do eixo imaginário.

Ao analisarmos o espectro como um todo, os autovalores cujos autovetores têm alta frequência, não convergem com a malha, como mostra a figura 4.19, na qual o espectro não muda para autovalores próximos ao eixo imaginário e continua dependendo da discretização para autovalores mais distantes. Esses autovalores são ditos espúrios e seus autovetores têm frequência além do nível de discretização da malha. Por isso, quanto mais elementos, os autovalores espúrios aparecem mais distantes do eixo imaginário, como mostra a terceira parte da figura 4.19.

Com a preocupação de responder à questão da estabilidade para um determinado escoamento, torna-se fundamental diferenciar quais os autovalores que são genuínos do problema e quais são produzidos pela discretização, chamados de espúrios. Talvez os autovetores sejam uma indicação de como filtrar os autovalores espúrios. Nesse exemplo, em particular, os autovalores espúrios apareceram distante da região de perigo. Lembrando que a região próxima ao eixo imaginário é de perigo uma vez que os autovalores podem cruzá-lo e se algum autovalor tiver parte real pos-

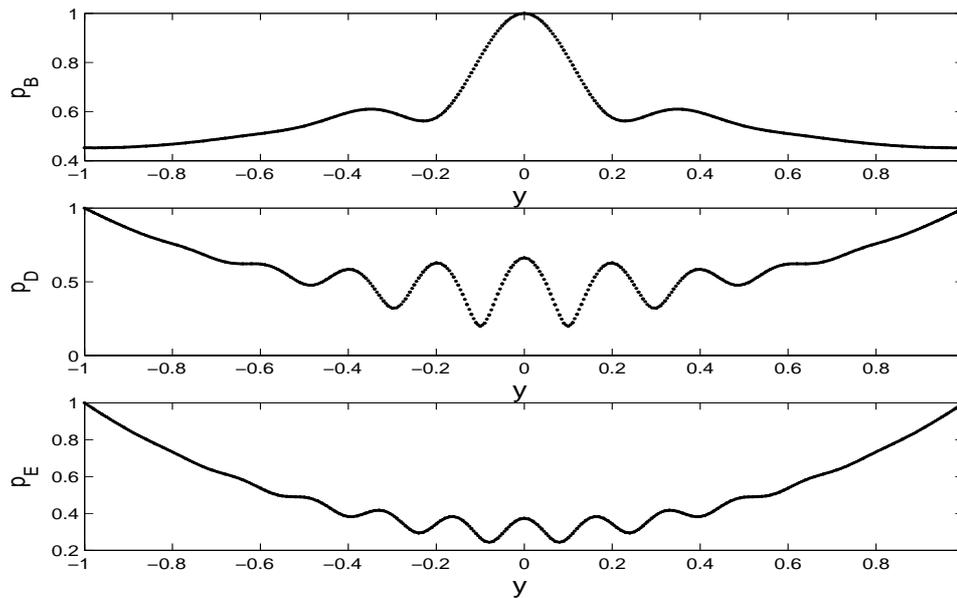


Figura 4.18: Autovetores correspondentes ao campo de pressão dos autovalores σ_B , σ_D e σ_E . A frequência aumenta à medida que o autovalor se afasta do eixo imaginário.

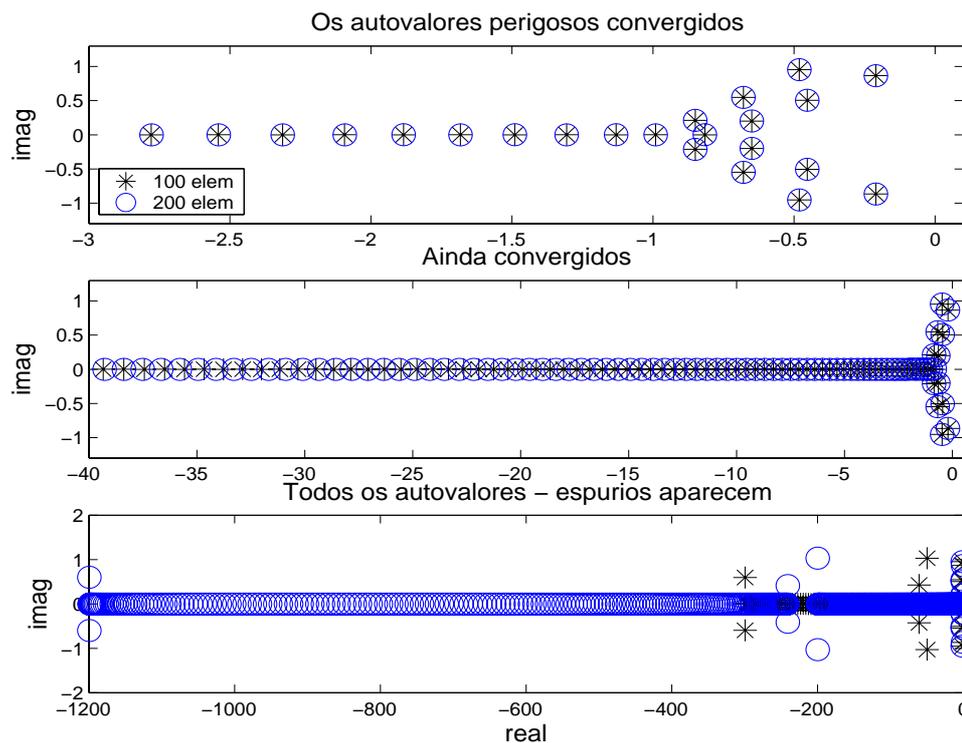


Figura 4.19: Autovalores convergidos próximos ao eixo imaginário e os espúrios, não convergidos, distantes ao eixo.

itiva, isso indica que o escoamento é instável. Porém vão existir situações em que os autovalores espúrios aparecem na região de perigo, como veremos

mais tarde.

Outra curiosidade sobre os autovetores surgiu ao discretizarmos as equações antes da utilização do teorema de Squire. Vamos encontrar o autopar do mesmo problema, porém usando a formulação apresentada em (4-4), que chamaremos de formulação 3D. Fazendo $\beta = 0$ para relacionar a formulação 3D com a apresentada nas equações (4-6) - (4-8), até então utilizada, que chamaremos a partir de agora de formulação 2D.

Os autovalores da formulação 3D, com $Re = 500$, $\alpha = 1.5$ e $\beta = 0$, e os autovalores da formulação 2D, com $Re = 500$ e $\alpha = 1.5$ são apresentados na figura 4.20.

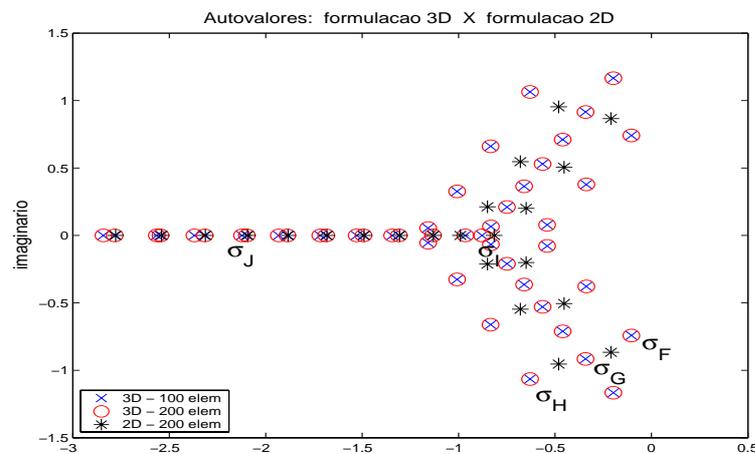


Figura 4.20: Autovalores: Formulação 3D × Formulação 2D

Qualitativamente as duas formulações são equivalentes ainda que os autovalores não sejam os mesmos. Note que na formulação 3D os autovalores formam três ramos próximos ao eixo imaginário enquanto que na formulação 2D formam dois ramos entre os três da outra. E ambos se encontram na vizinhança das curvas críticas de Morawetz, 1952 [1].

Observando os autovetores relacionados aos autovalores destacados na figura 4.20 ($\sigma_F, \sigma_G, \sigma_H, \sigma_I, \sigma_J$), percebe-se uma independência de w , que é a velocidade na direção z , com relação aos componentes u e v , que são as velocidades nas direções x e y respectivamente. O ramo do meio, onde aparece o autovalor σ_G , corresponde a perturbações na direção da velocidade transversal w e por isso $u = v = 0$. Já os autovetores relacionados a autovalores nos dois outros ramos estão relacionados a perturbações no plano xy , como os autovetores relativos a σ_F e σ_H que têm $w = 0$, figura 4.21.

Como no caso da formulação 2D, a frequência de oscilação aumenta nos autovetores relativos a autovalores mais distantes do eixo imaginário.

Compare o autovetor de σ_I com o de σ_J na figura 4.21. E ainda pode-se inferir que o autovetor relativo ao σ_I vem do ramo do meio, já que $u' = v' = 0$ e que o relativo ao σ_J vem de um dos ramos laterais, já que $w' = 0$.

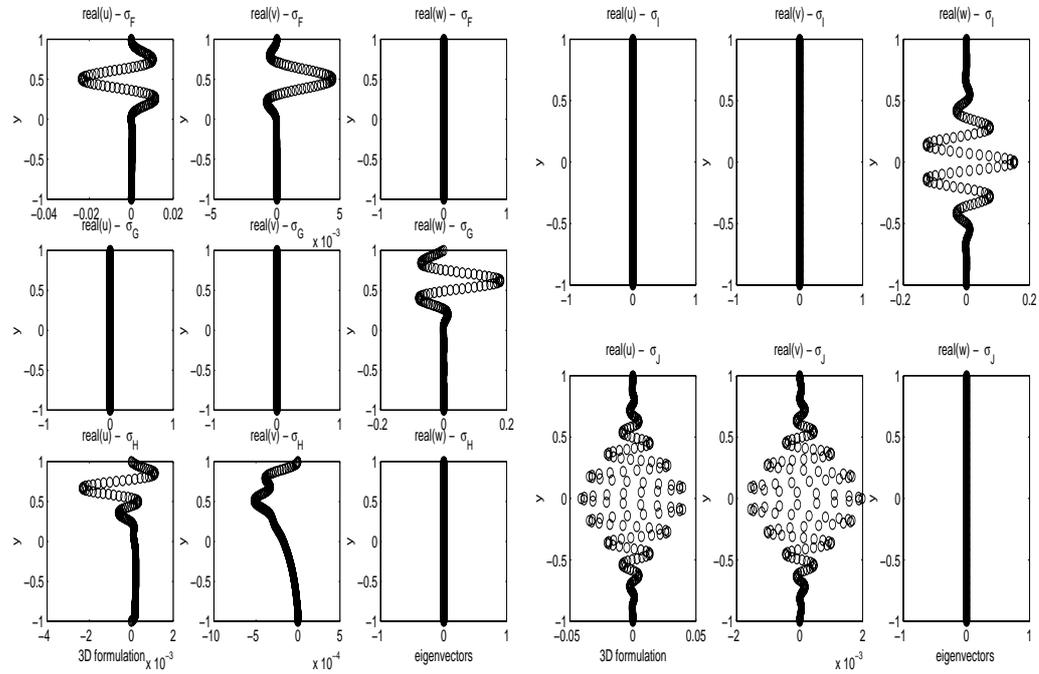


Figura 4.21: Autovetores da formulação 3D. Observe a independência das perturbações da direção z em relação a x y .