

6

Escoamento de Couette de líquido viscoelástico: Formulação unidimensional

Nesse capítulo a análise de estabilidade é estendida para escoamentos com líquido viscoelástico. Como exemplo, vamos analisar o escoamento de Couette de um líquido cujo comportamento mecânico é descrito pela equação de Maxwell.

Como já apresentado na seção 2.1, o sistema de equações que descreve o escoamento de um líquido viscoelástico, modelado com a equação constitutiva de Maxwell é dado pelo sistema de equações (2-14).

Sabemos que para o escoamento de Couette com o líquido de Maxwell existem resultados teóricos de Gorodtsov & Leonov, 1967 [3]. O que o torna um excelente problema teste. Em seu trabalho, Gorodtsov & Leonov apresentam o espectro analítico para o escoamento de Stokes ($Re = 0$) usando o modelo de Maxwell (UCM). Reproduzir esse espectro numericamente é um desafio ainda hoje.

6.1

Formulação matemática

Seguindo a mesma idéia do caso Newtoniano, vamos repetir as equações apresentadas na seção (2-14).

As equações em regime permanente, cuja solução vai ser o escoamento base a ser perturbado, são:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$Re \, \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}.$$

lembrando que $Re \equiv \rho V L / \mu$, com ρ sendo a densidade e μ , viscosidade. $\mathbf{T}$ o tensor extra-tensão para um líquido viscoelástico.

O modelo escolhido foi o de Maxwell devido ao trabalho analítico de Gorodtsov & Leonov, 1967 [3], como já foi dito. Em regime permanente o

modelo de Maxwell é:

$$\mathbf{T} + We \mathbf{T}_{(1)} = \dot{\boldsymbol{\gamma}},$$

onde $\mathbf{T}_{(1)} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{T} - (\nabla \mathbf{v})\mathbf{T} - \mathbf{T}(\nabla \mathbf{v})^T$ é a derivada convectada e $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$ é o tensor taxa de deformação. $We \equiv V\theta/L$ é o número de Weissenberg e θ o tempo de relaxação do líquido. O gradiente de velocidade é definido como $\nabla \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} e_i e_j$.

A geometria usada aqui continua sendo a mesma apresentada pela figura 4.1, escoamento entre duas placas paralelas e infinitas com velocidade $U = \pm 1$ nas fronteiras $y = \pm 1$. Essa não é exatamente a mesma geometria usada por Gorodtsov & Leonov, 1967 [3], que consideram somente a metade superior. Levando essa informação em consideração os resultados podem ser comparados sem nenhuma perda.

A solução do escoamento de Couette, de um fluido de Maxwell, pode ser obtida analiticamente:

$$\mathbf{v}_0 = (y, 0, 0), \quad p_0 = 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} 2We & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6-1)$$

O principal objetivo do estudo da estabilidade é determinar se o escoamento em regime permanente pode se tornar instável ao sofrer perturbações infinitesimais. Como já foi explicado, a estabilidade vai ser analisada resolvendo o sistema transiente para o comportamento a longo prazo da solução em regime permanente perturbada com uma dependência exponencial no tempo. Escrevendo os campos como sendo o escoamento base mais uma perturbação seguindo a teoria de modos normais, apresentada na seção (2-16), uma onda de amplitude $\mathbf{v}', p'$ ou $\mathbf{T}'$ e comprimento de onda $1/\alpha$ na direção do escoamento x , tem-se:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{v}'(y) e^{i\alpha x + \sigma t}, \quad (6-2)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0(\mathbf{x}) + \epsilon p'(y) e^{i\alpha x + \sigma t}, \quad (6-3)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}_0(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{T}'(y) e^{i\alpha x + \sigma t}, \quad (6-4)$$

lembrando que $\mathbf{v}_0$, p_0 e $\mathbf{T}_0$ são os campos de velocidade, pressão e tensão do escoamento base já conhecido e apresentado na equação (6-1). O número

de onda α é um parâmetro escolhido varrendo a faixa de interesse. As amplitudes $\mathbf{v}'$, p' , $\mathbf{T}'$ e o fator de crescimento da perturbação σ são as incógnitas caracterizando um problema de autovalor. Procura-se o sinal da parte real dos autovalores para prever se o escoamento, com dados parâmetros (α, Re) , é ou não estável.

A velocidade $\mathbf{v}$, pressão p e tensor das tensões $\mathbf{T}$ do escoamento perturbado satisfazem as equações transientes, apresentadas em (2-14) e repetidas aqui:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$Re \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T},$$

$$\mathbf{T} + We \left[\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{T} - (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{T} - \mathbf{T} (\nabla \mathbf{u})^T \right] = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T,$$

Lidar com líquidos viscoelásticos numericamente é bastante complicado, especialmente o modelo de Maxwell. Muitas instabilidades numéricas são encontradas. Com isso, estudos anteriores sugerem alguns tratamentos nas equações a serem discretizadas. No caso do escoamento de Couette com líquido de Maxwell, mesmo a solução em regime permanente sendo encontrada analiticamente, a análise de estabilidade é realizada numericamente. Os resultados obtidos quando a discretização foi feita no sistema (2-14) não foram satisfatórios, por isso, optou-se por seguir algumas alterações no sistema de equações propostas nos últimos anos na literatura.

Seguindo a sugestão de Szady *et al*, 1995, [16], uma variável adicional é acrescentada na modelagem. O gradiente de velocidade, $\nabla \mathbf{v}$, vai ser tratado como uma variável independente, $\mathbf{G}$. Isso permite que a relação entre tensor das tensões e do gradiente de velocidade, que aparece na equação constitutiva, seja melhor representada, uma vez que as variáveis envolvidas, $\mathbf{T}$ e $\mathbf{G}$, podem ser modeladas em um mesmo espaço base.

Veremos que a escolha adequada das funções base para discretização dos campos é fundamental para o sucesso do modelo numérico. A discretização utilizada pode introduzir autovalores espúrios no problema, que não fazem parte do operador original.

Sendo um escoamento incompressível, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, então, Pasquali & Scriven, 2002, [30] sugerem que a relação de $\nabla \mathbf{v}$ e $\mathbf{G}$ seja:

$$\mathbf{G} - \nabla \mathbf{v} + \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I}}{tr(\mathbf{I})} = \mathbf{0}. \quad (6-5)$$

Com o objetivo de recuperar a solução analítica apresentada por

Gorodtsov & Leonov, 1967, [3], o número de Reynolds vai ser zero, $Re = 0$.

Assim, o sistema modificado torna-se:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\ Re \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] + \nabla p - \nabla \cdot \mathbf{T} = 0, \\ \mathbf{T} + We \left[\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{T} - (\mathbf{G})\mathbf{T} - \mathbf{T}(\mathbf{G})^T \right] - (\mathbf{G} + \mathbf{G}^T) = 0, \\ \mathbf{G} - \nabla \mathbf{v} + \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I}}{tr(\mathbf{I})} = 0. \end{cases} \quad (6-6)$$

O sistema de equações lineares encontrado depois de substituir os campos perturbados eqs.(6-2)–(6-4) no sistema de equações transientes eqs.(6-6) e desprezando os termos de ordem superior é dado por:

Continuidade:

$$\left\{ i\alpha u' + \frac{dv'}{dy} = 0; \right. \quad (6-7)$$

Modelo de Maxwell (UCM):

$$\begin{cases} (\sigma We + S)T'_{xx} - 2WeT'_{xy} - (4We^2 + 2)G_{xx} - 2WeG_{xy} = 0, \\ (\sigma We + S)T'_{xy} - WeT'_{yy} - WeG_{xx} - G_{xy} - (2We^2 + 1)G_{yx} - WeG_{yy} = 0, \\ (\sigma We + S)T'_{yy} - 2WeG_{xy} - 2G_{yy} = 0; \end{cases} \quad (6-8)$$

onde $S = [1 + Wei\alpha y]$.

Equações de balanço de quantidade de movimento:

$$\begin{cases} Re [(\sigma + i\alpha y)u' + v'] = -i\alpha p' + \frac{dT'_{xy}}{dy} + i\alpha T'_{xx} = 0, \\ Re [(\sigma + i\alpha y)v'] = -\frac{dp'}{dy} + \frac{dT'_{yy}}{dy} + i\alpha T'_{xy} = 0; \end{cases} \quad (6-9)$$

Equações do gradiente de velocidade interpolado:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}i\alpha u' + \frac{1}{2}\frac{dv'}{dy} + G_{xx} = 0, \\ -\frac{du'}{dy} + G_{xy} = 0, \\ -i\alpha v' + G_{yx} = 0, \\ \frac{1}{2}i\alpha u' - \frac{1}{2}\frac{dv'}{dy} + G_{yy} = 0. \end{cases} \quad (6-10)$$

Assim, as incógnitas do problema perturbado são: p' , $\mathbf{T}'$, $\mathbf{v}'$ e $\mathbf{G}$ que são as autofunções e ainda o fator de crescimento da perturbação σ que é o autovalor.

Note que, assim como no caso Newtoniano (equação (4-3)) as condições de contorno para o sistema modificado que descreve os campos perturbados são de Dirichlet homogêneas, pois as condições de contorno de não-deslizamento e impermeabilidade do líquido nas paredes sólidas são satisfeitas pelo escoamento base.

6.2

Resultados analíticos de Gorodtsov & Leonov

Voltamos às equações governantes originais para um líquido de Maxwell, sistema (2-14). Repare que, seguindo a idéia usada para chegar ao operador Orr-Sommerfeld (4-10), podemos manipular algebricamente as equações acrescidas da equação constitutiva e chegar a um operador similar para líquido viscoelástico. Esse operador de Orr-Sommerfeld generalizado pode ser encontrado nos trabalhos de Gorodtsov & Leonov, 1967 [3] e Renardy & Renardy, 1986 [9], por exemplo. Em nossa notação o operador é:

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{S}^2 \frac{d^2}{dy^2} - 2i\alpha We S \frac{d}{dy} - 2\alpha^2 We^2 - \alpha^2 \mathbf{S}^2 \right] \\ & \left[\frac{d^2}{dy^2} + 2i\alpha We S \frac{d}{dy} - \alpha^2 - 2\alpha^2 We^2 \right] \phi = \\ & = \mathbf{S}^3 \text{Re}(i\alpha y + \sigma) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) \phi \end{aligned} \quad (6-11)$$

onde, $S = 1 + We(\sigma + i\alpha y)$.

Observe que se a contribuição elástica for eliminada, $We = 0$, a equação do fluido de Maxwell se reduz à lei constitutiva dos fluidos Newtonianos, e assim o operador que sobra quando se faz $We = 0$ na equação (6-11) está em negrito e é exatamente o operador de Orr-Sommerfeld (eq.(4-10)), como esperado.

Assim como no caso Newtoniano, encontra-se com frequência na literatura a discretização do operador e condições de contorno por métodos espectrais, como por exemplo nos trabalhos de Sureshkumar & Beris, 1995 [15], Wilson *et. al.*, 1999 [24].

Gorodtsov & Leonov, 1967 [3] desenvolvem um estudo analítico também usando o operador. Segundo eles, para o limite $Re \rightarrow 0$, o escoamento de Couette para o líquido de Maxwell é estável. O espectro é composto por uma parte discreta e outra contínua. Adaptado para a nossa

geometria e ilustrado pela figura 6.1, o espectro contínuo localiza-se no intervalo entre $\sigma = -\frac{1}{We} + i\alpha$ e $\sigma = -\frac{1}{We} - i\alpha$ e o discreto é dado por: $\sigma = -(i\alpha)c$ e seu conjugado, onde c é:

$$c = \frac{1}{2} + iA + \sqrt{1/4 - A^2 + B} \quad \text{sendo } \beta = \sqrt{1 + We(-2)}$$

$$A = \frac{\alpha We \sinh(\alpha) \sinh(\alpha\beta We) - \alpha^2 \beta We \sin(\alpha We)}{2\alpha^2 \beta We [\cosh(\alpha) \cosh(\alpha\beta We) - \cos(\alpha We) - \beta We \sinh(\alpha) \sinh(\alpha\beta We)]}$$

$$B = \frac{\alpha We \beta \sinh(\alpha) \cosh(\alpha\beta We) + \alpha^2 \beta We \cos(\alpha We) - (\alpha \cosh(\alpha) + \sinh(\alpha)) \sinh(\alpha\beta We)}{2\alpha^2 \beta We [\cosh(\alpha) \cosh(\alpha\beta We) - \cos(\alpha We) - \beta We \sinh(\alpha) \sinh(\alpha\beta We)]}$$

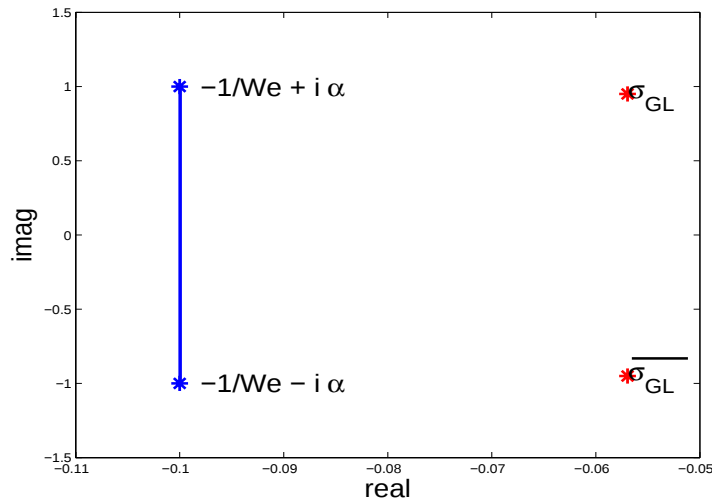


Figura 6.1: Autovalores divididos entre um par conjugado discreto e um segmento contínuo encontrados analiticamente por Gorodtsov & Leonov, 1967.

Veremos que os autovalores discretos são recuperados com facilidade se comparados com a parte do espectro que é contínua que apresenta uma convergência mais lenta. A presença do espectro contínuo agrega dificuldades no cálculo numérico e é o responsável pela dificuldade de obtenção numérica do espectro previsto por Gorodstov e Leonov, 1967.

6.3

Solução pelo método de Galerkin / elementos finitos

Como no caso Newtoniano, a escolha do método de elementos finitos para discretização do sistema de equações se deve principalmente à possibilidade de extensão dessa análise para escoamentos complexos.

O sistema de equações diferenciais a ser discretizado é dado pelas equações (6-7) - (6-10), lembrando que o gradiente de velocidade $\nabla \mathbf{v}$ foi considerado como uma variável independente $\mathbf{G}$.

Assim como na seção 3.2, as funções peso usadas nas equações de momento são as mesmas usadas para expandir os campos de velocidade e são polinômios quadráticos lagrangianos ϕ_i , que localmente podem ser vistos na figura 4.2. As funções peso usadas na continuidade vão ser os mesmos polinômios lineares descontínuos χ_i usados para expandir o campo de pressão, mostrado para cada elemento na figura 4.3. No caso do líquido viscoelástico as funções peso da equação constitutiva que serão as mesmas funções base usadas para expandir o tensor das tensões $\mathbf{T}$ também têm que ser escolhidas. Seguindo uma das combinações de espaços possíveis para a solução de escoamentos viscoelásticos por elementos finitos, escolhemos inicialmente polinômios lineares contínuos ψ_i , mostrados pela equação (6-12) e na figura 6.2, no ponto de vista elementar.

$$\psi_1(\xi) = \frac{-(\xi - 1)}{2}, \quad \psi_2(\xi) = \frac{(\xi + 1)}{2}. \quad (6-12)$$

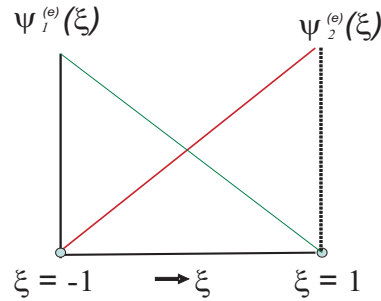


Figura 6.2: Elemento linear contínuo

Lembramos que a escolha dos espaços usados para expandir os campos não pode ser qualquer. Baaijens, 1998 [22], faz uma revisão comparando resultados de algumas possíveis combinações de espaços e métodos de estabilização numérica bem sucedidos na solução do regime permanente de escoamentos com líquidos viscoelásticos. A variável $\mathbf{G}$ foi introduzida para que na equação constitutiva os campos de tensão e o gradiente de velocidade fossem bem descritos. Logo usaremos o mesmo polinômio usado em $\mathbf{T}$ para expandir $\mathbf{G}$, ou seja, $\varphi_i = \psi_i$, ainda que essa não seja uma exigência para estabilidade da combinação dos espaços, existem outras combinações estáveis.

Como exemplo, são apresentados os resíduos ponderados da equação (6-7), e os primeiros componentes dos sistemas de equações (6-8), (6-9) e (6-10), respectivamente:

$$R_c^j = \int_{-1}^1 \left(i\alpha u'_h + \frac{dv'_h}{dy} \right) \chi_j dy \quad (6-13)$$

$$R_{T_{xx}}^j = \sigma \int_{-1}^1 (We T'_{xxh}) \psi_j dy + \int_{-1}^1 \left(ST'_{xxh} - 2We T'_{xyh} - (4We^2 + 2)G_{xxh} - 2We G_{xyh} \right) \psi_j dy \quad (6-14)$$

$$R_{mx}^j = \sigma \int_{-1}^1 (Re u'_h) \phi_j dy + \int_{-1}^1 (Re (i\alpha y u'_h + v') + i\alpha p'_h - i\alpha T'_{xxh}) \phi_j dy + \int_{-1}^1 (T'_{xyh}) \frac{d\phi_j}{dy} dy. \quad (6-15)$$

$$R_{G_{xx}}^j = \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2}i\alpha u'_h + \frac{1}{2} \frac{dv'_h}{dy} + G_{xxh} \right) \varphi_j dy \quad (6-16)$$

onde os campos são expandidos, dentro de cada elemento, pelos seguintes polinômios:

$$p'_h = \sum_{k=1}^m P_k \chi_k, \quad \mathbf{T}'_h = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m T_{11k} \psi_k & \sum_{k=1}^m T_{12k} \psi_k \\ \sum_{k=1}^m T_{12k} \psi_k & \sum_{k=1}^m T_{22k} \psi_k \end{bmatrix},$$

linear descontínuo

linear contínuo

$$\mathbf{u}'_h = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n U_k \phi_k \\ \sum_{k=1}^n V_k \phi_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_h = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m \mathcal{G}_{11k} \varphi_k & \sum_{k=1}^m \mathcal{G}_{12k} \varphi_k \\ \sum_{k=1}^m \mathcal{G}_{12k} \varphi_k & \sum_{k=1}^m \mathcal{G}_{22k} \varphi_k \end{bmatrix}$$

quadrático

linear contínuo.

Observe que, neste caso unidimensional, não aparecem derivadas nos componentes do tensor extra-tensão referentes ao termo convectivo da

equação constitutiva de Maxwell. Por esse motivo, não é necessária a realização de uma integração por partes na formulação fraca dos resíduos dessa equação.

Fazendo exatamente a mesma análise do caso newtoniano depois de discretizado o sistema se transforma em um problema de autovalor generalizado: $\mathbf{J}\mathbf{c} = \sigma\mathbf{M}\mathbf{c}$.

Antes mesmo de adaptarmos o método de solução apresentado anteriormente para eliminar os infinitos para o caso de escoamento viscoelástico, o método QZ foi utilizado para obter o espectro do problema de autovalor generalizado. O objetivo é comparar a discretização por elementos finitos desenvolvida neste trabalho com a discretização por métodos espectrais apresentada na literatura. Novamente a matriz massa apresenta blocos de zeros e conseqüentemente introduz autovalores no infinito. Por isso, uma generalização das transformações propostas na seção 3.3.1 vai ser feita para o líquido de Maxwell posteriormente.

6.4

Resposta para o caso limite de $We = 0$ - escoamento Newtoniano

Com o objetivo de validar o método, vamos usar os parâmetros apropriados para que o espectro Newtoniano apresentado por Bottaro, 2003 [31] e o obtido com o modelo Newtoniano no capítulo 4 seja recuperado. O parâmetro elástico $We = 0$ já que o líquido é Newtoniano, $Re = 500$ e $\alpha = 1.5$, como no trabalho a ser comparado.

O espectro apresentado por Bottaro, 2003, mostrado na figura 4.9, é composto por autovalores discreto, todos com parte real negativa. A maior parte do espectro se encontra distribuída pelo eixo real, sendo que próximo ao eixo imaginário os autovalores deixam de ser reais para aparecerem em pares conjugados, formando dois ramos. A formulação apresentada nessa seção considera os componentes do tensor das tensões variáveis independentes relacionadas algebricamente com as velocidades, já que no programa o líquido pode ser de Maxwell. Os componentes do tensor das tensões estão sendo aproximados por funções base que são polinômios lineares contínuos. Por isso, ao se referir a essa formulação, usaremos o nome: formulação $\mathbf{T}_{\ell c}$ (Tensão linear contínua). A formulação $\mathbf{T}_{\ell c}$ recuperou parte do espectro de Bottaro, 2003, porém introduziu um segmento de autovalores, parecendo a discretização de um segmento de espectro contínuo. Diferente dos autovalores espúrios encontrados na seção 4, com essa formulação eles aparecem na região de perigo, com parte real praticamente zero, ou seja,

indicando que escoamento está próximo de se tornar instável, o que não é verdade. A figura 6.3 mostra o espectro encontrado juntamente com o apresentado por Bottaro, 2003. A figura também ressalta alguns autovalores cujos autovetores serão estudados. Acreditamos, com base no estudo do caso Newtoniano, que os autovetores podem ser indicativos de autovalores espúrios, por isso vamos estudar alguns autovetores.

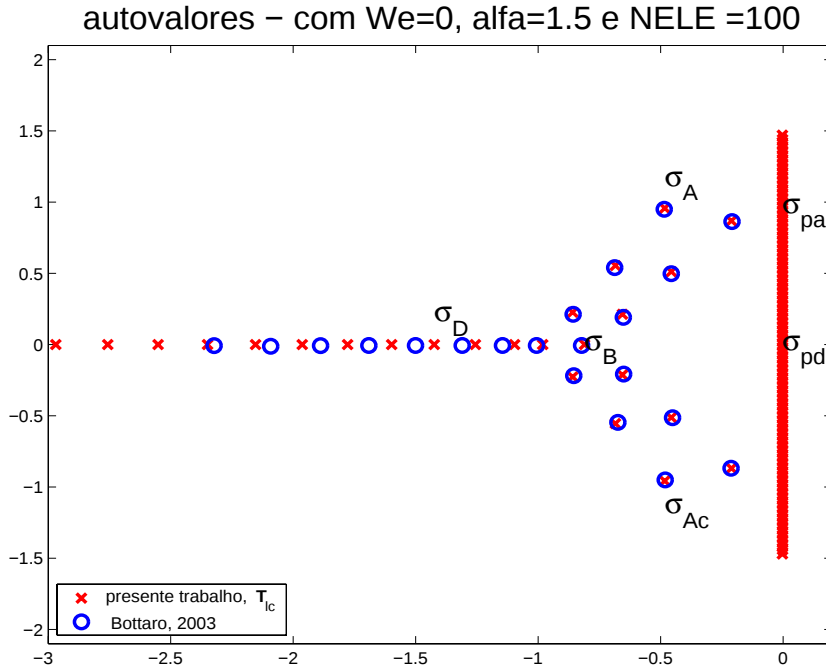


Figura 6.3: Comparando o espectro apresentado por Bottaro com o espectro da presente formulação, que considera os componentes do tensor das tensões como variáveis independentes e discretizadas com uma função base linear contínua, $\mathbf{T}_{lc}$

O primeiro componente normal do tensor das tensões foi escolhido para ilustrar o que acontece com autovetores relativos a autovalores de diferentes partes do espectro. Note que para essa análise de estabilidade, baseada em modos normais, a dependência em x das variáveis é conhecida, já que os campos foram perturbados segundo as equações (6-2) - (6-4). Então, na verdade, o primeiro componente do tensor das tensões T'_{xx} é um múltiplo de u' . Mais especificamente, se $We = 0 \Rightarrow T'_{xx} = i2\alpha u'$.

Quatro autovalores foram escolhidos na parte do espectro coincidente com a literatura ($\sigma_A, \sigma_{Ac}, \sigma_B, \sigma_D$) e dois no segmento espúrio (σ_{pa}, σ_{pd}) indicados na figura 6.3. Os autovetores associados a esses autovalores são analisados a seguir.

Os autovetores relativos aos autovalores localizados na parte do espectro que coincide com a literatura seguem o mesmo comportamento que

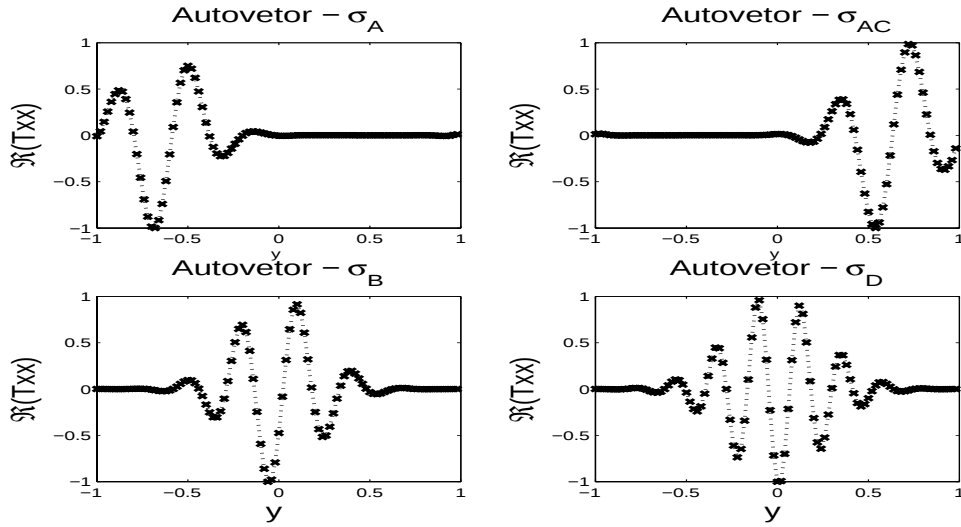


Figura 6.4: Autovetores

no caso Newtoniano, apresentado na seção 4.2.4. Os pares conjugados σ_A e σ_{Ac} têm autovetores próximos de serem espelhados. Todos apresentam oscilações suaves cuja frequência aumenta de acordo com o afastamento do autovalor em relação ao eixo imaginário. O autovetor relativo ao autovalor σ_D , que é o mais distante, apresenta uma frequência maior se comparada a qualquer dos demais autovetores mostrados na figura 6.4.

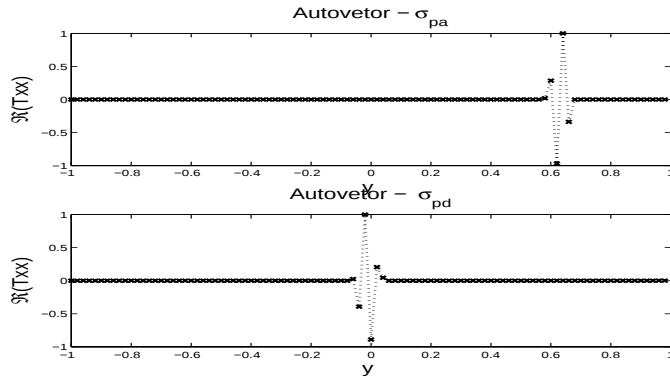


Figura 6.5: Autovetores espúrios

Os autovetores cujos autovalores se encontram no segmento do espectro espúrio σ_{pa} e σ_{pd} apresentam um comportamento diferente. O autovetor é praticamente zero, e em um valor pontual do domínio ganha magnitude, como se fosse um ruído, como mostra a figura 6.5. É curioso também notar que o valor diferente de zero tem alguma relação com a parte imaginária do autovalor cujo autovetor está sendo analisado. Se a parte imaginária $\Im(\sigma) = 0$ o autovetor apresenta um salto em $y = 0$. Se $\Im(\sigma) < 0$ o salto

acontece em $y < 0$, como pode ser constatado na figura 6.5.

Observamos também que o espectro espúrio se aproxima de zero com o crescimento de Re , o mesmo acontece com o espectro genuíno do problema, visto em 4.2.3. O α , além de influenciar o espectro espúrio da mesma maneira que influencia o original (quanto menor α mais o espectro se aproxima do eixo imaginário), ele também determina o tamanho do segmento contínuo, que vai exatamente de $-i\alpha$ até $i\alpha$, como ilustrado na figura 6.6.

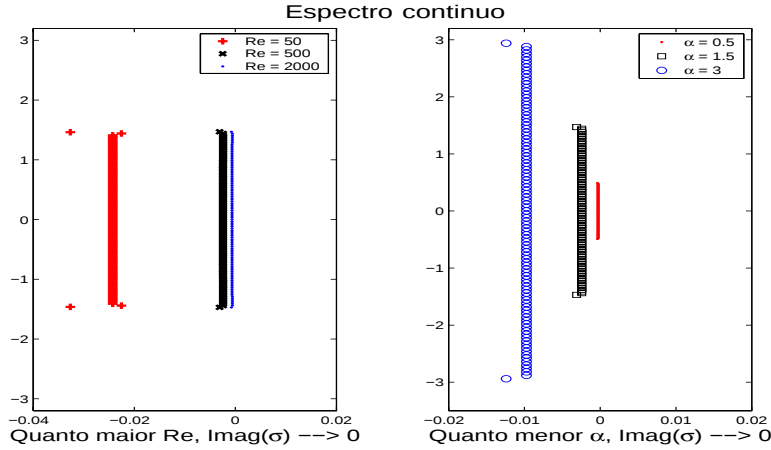


Figura 6.6: Como o espectro contínuo responde à variação dos parâmetros do problema.

Existem características do espectro contínuo espúrio, introduzido artificialmente pela discretização, que são encontradas no espectro contínuo original do escoamento de Couette com líquido de Maxwell descrito por Gorodtsov & Leonov, 1967 [3]. A dependência do tamanho do segmento com α , a relação do outro parâmetro envolvido (Re ou We) com a proximidade do espectro ao eixo imaginário são exemplos dessas semelhanças. Porém sabemos que ele não faz parte do auto-espço original do problema no caso limite de escoamento Newtoniano.

Certamente as funções base não estão aproximando satisfatoriamente os campos. Por isso, com o objetivo de aumentar os graus de liberdade, deixando mais livre a representação do tensor das tensões e do gradiente de velocidade, as funções base usadas nesses dois campos foram substituídas de polinômios lineares contínuos, figura 6.2, para lineares descontínuos, figura 4.3. Essa nova formulação origina um problema de autovalor generalizado com matrizes maiores e vai ser chamada de formulação $\mathbf{T}_{\ell d}$: Tensão linear descontínua.

Como foi comentado, não aparecem derivadas nos componentes do tensor extra-tensão referentes ao termo convectivo da equação constitutiva

de Maxwell para o caso unidimensional. Por isso, a formulação fraca usada anteriormente permite o uso de funções descontínuas aumentando o número de graus de liberdade do problema.

Os resultados foram ótimos, o autovalor σ_A comparado com o resultado Newtoniano está na ordem de $\mathcal{O}(10^{-7})$. E ainda os autovalores distribuídos no eixo real coincidem para mais valores do que o espectro encontrado com a formulação $\mathbf{T}_{\ell c}$. No espectro mostrado na figura 6.3 autovalores com parte real $\simeq -1$ apresentam um erro relativo de $\mathcal{O}(10^{-2})$ enquanto que os mesmos autovalores encontrados com a formulação $\mathbf{T}_{\ell d}$ apresentam um erro relativo de $\mathcal{O}(10^{-4})$ comparados com o resultado Newtoniano, mostrados na figura 6.7. Os autovetores estudados foram os mesmos das outras seções e também apresentam as mesmas características, como pode ser visto na figura 6.8.

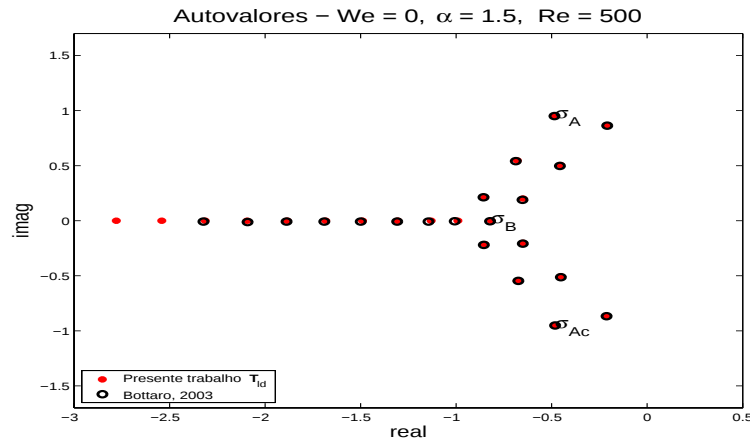


Figura 6.7: Comparação entre os autovalores calculados pela formulação $\mathbf{T}_{\ell d}$ e os da literatura.

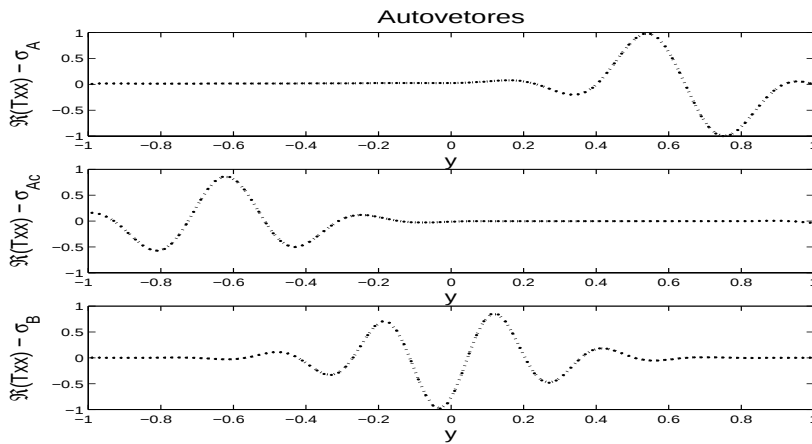


Figura 6.8: Os autovetores calculados pela formulação $\mathbf{T}_{\ell d}$ condizem com os encontrados na formulação Newtoniana.

A formulação $\mathbf{T}_{\ell d}$ apresentou um melhor resultado para os parâmetros apropriados para simular um escoamento Newtoniano .

6.4.1

Nova combinação de funções base

Fazendo $We = 10, \alpha = 1, Re = 0$ de acordo com o resultado apresentado por Gorodtsov & Leonov, 1967 [3], o espectro deveria ser:

- discreto: $\sigma_{GL} = -0.05694760147304 - 0.95022529988669i$ e seu conjugado.
- contínuo: um segmento indo de $-\frac{1}{10} - i\alpha$ até $-\frac{1}{10} + i\alpha$.

Usando a formulação $\mathbf{T}_{\ell d}$, chega-se a um espectro próximo do previsto. Com 125 elementos, o que significa matrizes com dimensão dada pelos graus de liberdade, então de tamanho 2502, a diferença do autovalor discreto analítico para o encontrado está na ordem de $\mathcal{O}(10^{-3})$. O espectro contínuo é recuperado com uma precisão de até ordem de $\mathcal{O}(10^{-4})$, porém aparecem autovalores numa distância de (10^{-1}) do segmento contínuo nas duas direções. O espectro mostrado na figura 6.9 calculado com 60 e 125 elementos mostra que os autovalores mais afastados do segmento analítico se aproximam aumentando o número de elementos.

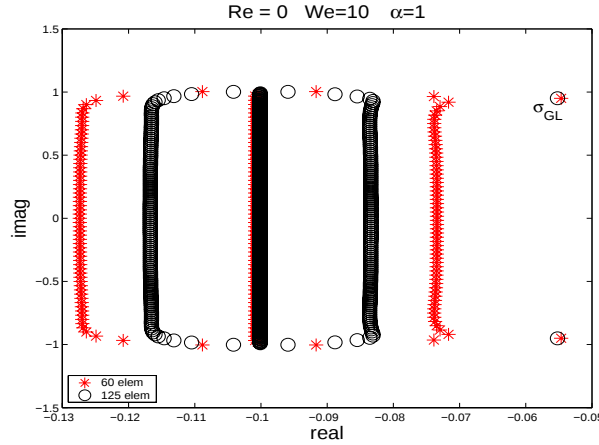


Figura 6.9: Espectro calculado pela formulação $\mathbf{T}_{\ell d}$ com $We = 10, \alpha = 1$ e $Re = 0$. Observa-se a convergência ao aumentar o número de elementos.

O resultado é bastante animador, tendo em vista os resultados apresentados na literatura. Os trabalhos de dois grupos de pesquisadores, Sureshkumar ([15],[28], [32]) e Renardy ([9], [24]) mostram intensas tentativas de recuperação do espectro contínuo com diferentes métodos. Em

todos esses, balões ao redor do segmento contínuo são encontrados no lugar do segmento em si. Vamos descrever mais tarde alguns desses trabalhos e compará-los ao desenvolvido aqui. Porém antes, com o objetivo de aumentar o número de elementos para que o espectro não dependa da malha, vamos generalizar as transformações apresentadas em 3.3.1 para um escoamento sem inércia ($Re = 0$) e com líquido de Maxwell. Espera-se que a dimensão e o tempo computacional sejam reduzidos, e com isso mais elementos possam ser utilizados na discretização com os mesmos recursos computacionais.

6.5

Estrutura das matrizes para escoamento viscoelástico

Usando a formulação $\mathbf{T}_{\ell d}$ no sistema de equações lineares dada pelas equações (6-7) - (6-10), o número de equações algébricas é $N_{\text{total}} = 2n + 8m$, onde n é o número de funções base usado para expandir cada componente do campo de velocidade perturbado e m é o número de funções base para expandir o campo de pressão, três componentes do tensor das tensões (que é simétrico) e quatro componentes do gradiente de velocidade, totalizando $(1+3+4)m = 8m$. Em termos de número de elementos N , $n = 2N + 1$ e $m = 2N$. A figura 6.10 mostra a numeração dos nós e graus de liberdade para uma discretização com três elementos. Os campos expandidos por polinômios lineares têm dois nós por elemento (exemplo pressão: P1 e P2) e os expandidos por polinômios quadráticos têm três nós (exemplo, U1, U2, U3). Cada coeficiente, representado por C_k , corresponde a um coeficiente da expansão dos campos em função de suas respectivas funções base. Por exemplo, $C1 = P1$ e $C2 = P2$ no primeiro elemento. Levando em conta os três elementos, a ordem das incógnitas fica da seguinte forma: as pressões: C1 até C6, os três componentes do tensor das tensões: C7 até C24, as velocidades nas duas direções: C25 a C38 e finalmente os quatro componentes do gradiente de velocidade: C39 a C62; como mostra a figura 6.10.

A ordem das variáveis influencia na estrutura das matrizes. Neste caso é conveniente ordenar da seguinte forma: primeiro as $m = 2N$ equações associadas ao resíduo da continuidade, depois $3m = 6N$ associados ao resíduo da equação constitutiva, seguido de $2n = 4N + 2$ associados aos resíduos dos momentos nas duas direções e as últimas $4m = 8N$ relativas às equações de resíduo do gradiente interpolado de velocidade. Conseqüentemente, os coeficientes da expansão em elementos finitos vão ser ordenados primeiramente com os $m = 2N$ coeficientes da pressão, $3m = 6N$ coeficientes dos componentes do tensor das tensões, seguidos de $2n = 4N + 2$

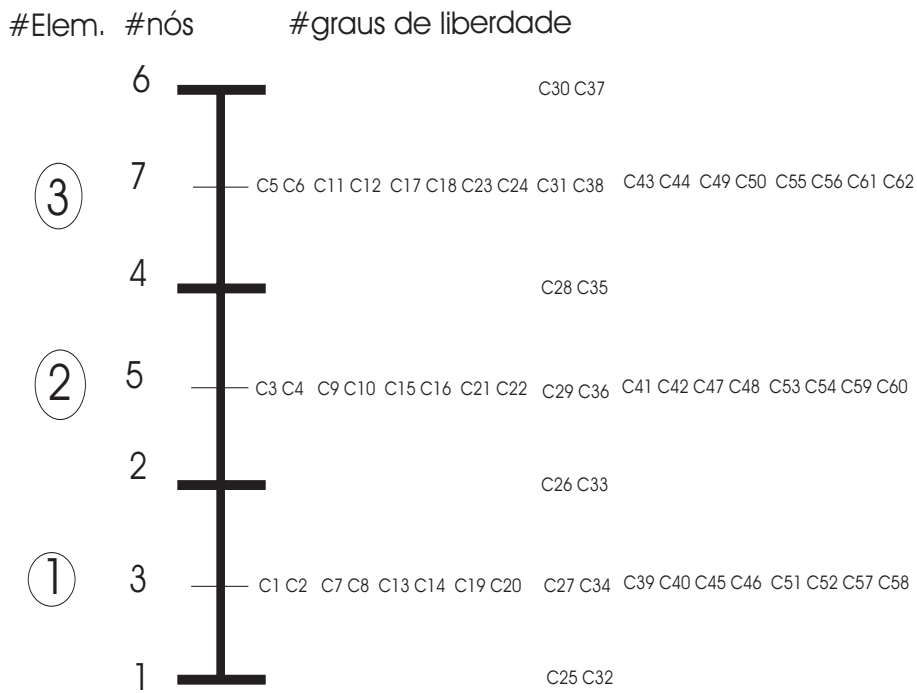


Figura 6.10: Exemplo da numeração da malha. Cada coeficiente Ck indica uma amplitude a ser aproximada, de C1 a C6 são as pressões, C7 até C24 os três componentes do tensor das tensões, as velocidades nas duas direções são C25 a C38 e os quatro componentes do gradiente de velocidade, C39 a C62.

coeficientes dos componentes de velocidade e por último os $4m = 8N$ coeficientes do gradiente de velocidade. No total são $N_{gl} = 20N + 2$ graus de liberdade, com N elementos.

Separando a contribuição transiente $\mathbf{Rt}$ da contribuição permanente $\mathbf{Rs}$, i.e. $\mathbf{R} \equiv \sigma \mathbf{Rt} + \mathbf{Rs}$, as matrizes apresentam a estrutura a seguir, observe que fazendo $Re = 0$, o único bloco diferente de zero na matriz massa corresponde aos resíduos das equações constitutivas em relação aos componentes do tensor das tensões, ou seja $\frac{\partial R t_{\mathbf{T}}^j}{\partial \mathbf{T}_k}$:

$$\mathbf{M} = - \left(\begin{array}{c|c|c|c} \frac{\partial Rt_c^j}{\partial P_k} = 0 & \frac{\partial Rt_c^j}{\partial \mathbf{T}_k} = 0 & \frac{\partial Rt_c^j}{\partial \mathbf{U}_k} = 0 & \frac{\partial Rt_c^j}{\partial \mathcal{G}_k} = 0 \\ \hline \frac{\partial Rt_{\mathbf{T}}^j}{\partial P_k} = 0 & \frac{\partial Rt_{\mathbf{T}}^j}{\partial \mathbf{T}_k} & \frac{\partial Rt_{\mathbf{T}}^j}{\partial \mathbf{U}_k} = 0 & \frac{\partial Rt_{\mathbf{T}}^j}{\partial \mathcal{G}_k} = 0 \\ \hline \frac{\partial Rt_{\mathbf{m}}^j}{\partial P_k} = 0 & \frac{\partial Rt_{\mathbf{m}}^j}{\partial \mathbf{T}_k} = 0 & \frac{\partial Rt_{\mathbf{m}}^j}{\partial \mathbf{U}_k} = 0 & \frac{\partial Rt_{\mathbf{m}}^j}{\partial \mathcal{G}_k} = 0 \\ \hline \frac{\partial Rt_{\mathbf{G}}^j}{\partial P_k} = 0 & \frac{\partial Rt_{\mathbf{G}}^j}{\partial \mathbf{T}_k} = 0 & \frac{\partial Rt_{\mathbf{G}}^j}{\partial \mathbf{U}_k} = 0 & \frac{\partial Rt_{\mathbf{G}}^j}{\partial \mathcal{G}_k} = 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} m = 2N \\ 3m = 6N \\ 2n = 4N + 2 \\ 4m = 8N \end{array}$$

$m = 2N \quad 3m = 6N \quad 2n = 4N + 2 \quad 4m = 8N$

$$\mathbf{J} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \frac{\partial Rs_c^j}{\partial P_k} = 0 & \frac{\partial Rs_c^j}{\partial \mathbf{T}_k} = 0 & \frac{\partial Rs_c^j}{\partial \mathbf{U}_k} & \frac{\partial Rs_c^j}{\partial \mathcal{G}_k} = 0 \\ \hline \frac{\partial Rs_{\mathbf{T}}^j}{\partial P_k} = 0 & \frac{\partial Rs_{\mathbf{T}}^j}{\partial \mathbf{T}_k} & \frac{\partial Rs_{\mathbf{T}}^j}{\partial \mathbf{U}_k} = 0 & \frac{\partial Rs_{\mathbf{T}}^j}{\partial \mathcal{G}_k} \\ \hline \frac{\partial Rs_{\mathbf{m}}^j}{\partial P_k} & \frac{\partial Rs_{\mathbf{m}}^j}{\partial \mathbf{T}_k} & \frac{\partial Rs_{\mathbf{m}}^j}{\partial \mathbf{U}_k} = 0 & \frac{\partial Rs_{\mathbf{m}}^j}{\partial \mathcal{G}_k} = 0 \\ \hline \frac{\partial Rs_{\mathbf{G}}^j}{\partial P_k} = 0 & \frac{\partial Rs_{\mathbf{G}}^j}{\partial \mathbf{T}_k} = 0 & \frac{\partial Rs_{\mathbf{G}}^j}{\partial \mathbf{U}_k} & \frac{\partial Rs_{\mathbf{G}}^j}{\partial \mathcal{G}_k} \end{array} \right) \begin{array}{l} m = 2N \\ 3m = 6N \\ 2n = 4N + 2 \\ 4m = 8N \end{array}$$

$m = 2N \quad 3m = 6N \quad 2n = 4N + 2 \quad 4m = 8N$

A matriz massa, como já foi comentado, é singular, tendo somente um bloco na diagonal diferente de zero. Logo, o número de autovalores do problema é menor que sua dimensão, $N_{total} = 20N + 2$. Os autovalores

que não aparecem, são os considerados autovalores no infinito, que serão eliminados através de transformações das matrizes.

O número de linhas/colunas identicamente nulas na matriz massa é igual a $14N + 2$. Espera-se que pelo menos essa quantidade de autovalores esteja no infinito, porém com a generalização do método 3.3.1 para líquido de Maxwell com $Re = 0$ veremos que esse número é ainda maior. O fato dos autovalores no infinito serem mais que a dimensão do núcleo de $\mathbf{M}$ é que não permite que o método de condensação usado por Arora & Sureshkumar, 2002 [28] seja suficiente para tornar a matriz $\mathbf{M}$ não singular.

Como no caso Newtoniano, as transformações que serão apresentadas a seguir reduzem dimensão e tempo computacional do problema e ainda permitem que o problema de autovalor generalizado seja escrito como um problema de autovalor clássico.

6.6

Generalização das transformações propostas

Ordenando as variáveis como já foi comentado, as matrizes massa e jacobiana são divididas em blocos seguindo as equações e os graus de liberdade correspondentes.

$$\mathbf{M} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right) \begin{array}{l} 2N \\ 6N \\ 4N + 2 \\ 8N \end{array} \quad \mathbf{J} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{13} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{J}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{24} \\ \hline \mathbf{J}_{31} & \mathbf{J}_{32} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{43} & \mathbf{J}_{44} \end{array} \right) \begin{array}{l} 2N \\ 6N \\ 4N + 2 \\ 8N \end{array}. \quad (6-17)$$

onde N é o número de elementos. Cada bloco tem seu tamanho indicado, pois a numeração das variáveis é a mesma que das equações, por exemplo $[\mathbf{M}_{22}] = 6N \times 6N$, $[\mathbf{J}_{32}] = 4N + 2 \times 6N$. Os autovalores do problema de autovalor generalizado, $(-\sigma\mathbf{M} + \mathbf{J})\mathbf{c} = 0$, são as raízes do polinômio:

$$p(\sigma) \equiv \det(\mathcal{A}) \equiv \det(-\sigma\mathbf{M} + \mathbf{J}). \quad (6-18)$$

De outra forma, estamos procurando os valores de σ para os quais o sistema homogêneo $(\mathbf{J} - \sigma\mathbf{M})\mathbf{c} = 0$ tenha solução não trivial. Como no caso Newtoniano, vamos multiplicar as matrizes $\mathbf{J}$ e $\mathbf{M}$ à direita e à esquerda por matrizes inversíveis e independentes de σ .

As equações algébricas que representam as condições de contorno de Dirichlet, que para a perturbação são homogêneas, não têm dependência no tempo. Mais precisamente, na forma vetorial representam linhas de zeros na matriz massa e jacobiana com uns apenas nas posições da diagonal da matriz jacobiana. Logo, eliminando as linhas e colunas relativas a essas equações e variáveis as raízes do polinômio $p(\sigma)$ permanecem as mesmas. Como antes, esse é o primeiro passo do processo de eliminação dos autovalores no infinito. No caso do escoamento de Couette, os dois componentes de velocidade têm valores prescritos nas paredes, logo são quatro condições de contorno de Dirichlet. Então, o tamanho total da matriz original $\mathcal{A}$, $20N + 2$, é reduzido para $20N - 2$. A matriz sem as condições de contorno $\mathbf{A} \equiv -\sigma\mathbf{M} + \mathbf{J}$ é convenientemente particionada como na equação (6-19).

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}_{11}(\sigma) & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} = \mathbf{D} \end{array} \right) \begin{array}{l} 8N \\ 4N - 2 \\ 8N \end{array} \quad (6-19)$$

$\begin{array}{ccc} 8N & 4N - 2 & 8N \end{array}$

Já sabendo, pela experiência do caso Newtoniano, que os autovetores acompanham as transformações para a eliminação dos autovalores no infinito, vamos mostrar os passos para as matrizes e para os autovetores simultaneamente.

O autovetor depois desse primeiro passo é relacionado com o original pelos zeros nas posições correspondentes às condições de contorno. Assim o autovetor, $\mathbf{c}_b$ do problema sem condições de contorno, é a solução não trivial do problema $\mathbf{A}\mathbf{c}_b = \mathbf{0}$ de tamanho $20N - 2$.

Nessa nova divisão, $\mathbf{A}_{11}$ é o único bloco que tem dependência com o tempo, logo o único em que σ aparece. Importante notar também que o bloco $\mathbf{A}_{33}$ é diagonal. O bloco $\mathbf{A}_{32}$ pode ser zerado através da seguinte transformação:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}_{11}(\sigma) & \tilde{\mathbf{A}}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{array} \right) = \mathbf{A} \mathbf{T}_r, \quad (6-20)$$

onde

$$\mathbf{T}_r = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I}_{[8N]} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_{[4N-2]} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}_{32} & \mathbf{I}_{[8N]} \end{array} \right). \quad (6-21)$$

O autovetor do problema transformado, ou seja a solução não trivial de $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$ pode ser relacionado ao autovetor $\mathbf{c}_b$ de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{c}_b = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{A}} \underbrace{\mathbf{T}_r^{-1}\mathbf{c}_b}_{\tilde{\mathbf{c}}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}_b = \mathbf{T}_r\tilde{\mathbf{c}}$$

O polinômio $p_1(\sigma)$ do problema transformado $\tilde{\mathbf{A}}$ é:

$$p_1(\sigma) = \det(\tilde{\mathbf{A}}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{T}_r) = \det(\mathbf{A}) = p(\sigma). \quad (6-22)$$

Dado que todas as submatrizes usadas na construção de $\mathbf{T}_r$ não dependem do autovalor σ , seu determinante também independe de σ . Na verdade, sendo $\mathbf{T}_r$ uma matriz triangular inferior com uns na diagonal, seu determinante é um. Assim, o polinômio dado pelo determinante da matriz transformada $\tilde{\mathbf{A}}$, $p_1(\sigma)$ é exatamente o mesmo da matriz original $\mathbf{A}$, $p(\sigma)$; ambos têm as mesmas raízes. A multiplicação de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{T}_r$ não altera o espectro do problema original. Note que o custo computacional de montar a transformação $\mathbf{T}_r$ é pequeno, envolvendo apenas algumas multiplicações, já que a inversa de uma matriz diagonal é trivial.

O polinômio $p_1(\sigma)$ pode ser escrito como:

$$p_1(\sigma) = \det(\tilde{\mathbf{A}}) = \det\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}_{11}(\sigma) & \tilde{\mathbf{A}}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{array}\right) =$$

$$\det(\mathbf{D}) \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11}(\sigma) & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} \end{array}\right) = \kappa_1 p_2(\sigma).$$

Novamente, porque $\mathbf{D}$ independe do autovalor σ , o polinômio da matriz original $p(\sigma)$ é proporcional ao polinômio $p_2(\sigma)$ referente ao bloco $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}(\sigma) & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Logo, os dois polinômios têm as mesmas raízes. Os autovalores finitos da matriz original $\mathbf{A}_{20N-2 \times 20N-2}$ são os mesmos do bloco $\mathbf{B}_{12N-2 \times 12N-2}$. A solução não trivial do sistema $\mathbf{B} \mathbf{b} = \mathbf{0}$, ou seja, os autovetores $\mathbf{b}$ do bloco $\mathbf{B}$, podem ser relacionados aos autovetores $\tilde{\mathbf{c}}$ usando a mesma divisão usada na matriz $\tilde{\mathbf{A}}$:

$$\tilde{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_1 \\ \tilde{\mathbf{c}}_2 \\ \tilde{\mathbf{c}}_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 8N \\ 4N - 2 \\ 8N \end{matrix} \quad (6-23)$$

O sistema $\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$ pode ser escrito em termos dos blocos definidos em (6-20).

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}_{11} \tilde{\mathbf{c}}_1 + \tilde{\mathbf{A}}_{12} \tilde{\mathbf{c}}_2 + \mathbf{A}_{13} \tilde{\mathbf{c}}_3 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} \tilde{\mathbf{c}}_1 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{D} \tilde{\mathbf{c}}_3 &= \mathbf{0}. \end{cases}$$

Sendo a matriz $\mathbf{D}$ inversível, a única solução para $\mathbf{c}_3 = \mathbf{0}$. As outras duas, fazendo $\mathbf{c}_3 = \mathbf{0}$, ficam:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_1 \\ \tilde{\mathbf{c}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_1 \\ \tilde{\mathbf{c}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_1 \\ \tilde{\mathbf{c}}_2 \end{pmatrix}.$$

Como o bloco $\mathbf{B}$ tem os mesmos autovalores finitos que a matriz original, vamos focar em encontrar os autovalores de $\mathbf{B}$. Uma partição conveniente para as $12N - 2$ linhas e colunas de $\mathbf{B}$ é definida em (6-24):

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B}_{11}(\sigma) & \mathbf{B}_{12}(\sigma) & \mathbf{B}_{13} \\ \hline \mathbf{B}_{21}(\sigma) & \mathbf{B}_{22}(\sigma) & \mathbf{B}_{23} \\ \hline \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32} & \mathbf{B}_{33} = \mathbf{0} \end{array} \right) \begin{matrix} 4N - 2 \\ 4N + 2 \\ 4N - 2 \end{matrix} \quad (6-24)$$

Seguindo a mesma idéia no autovetor:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_1 \\ \tilde{\mathbf{c}}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4N - 2 \\ 4N + 2 \\ 4N - 2 \end{matrix}$$

Os blocos $\mathbf{B}_{23}$ and $\mathbf{B}_{32}$ podem ser zerados usando as seguintes transformações:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B}_{11}(\sigma) & \tilde{\mathbf{B}}_{12}(\sigma) & \mathbf{B}_{13} \\ \hline \tilde{\mathbf{B}}_{21}(\sigma) & \tilde{\mathbf{B}}_{22}(\sigma) & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{B}_{31} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right) = \mathbf{M}_\ell \mathbf{B} \mathbf{M}_r, \quad (6-25)$$

$$\text{onde } \mathbf{M}_\ell = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I}_{[4N-2]} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{B}_{23}\mathbf{B}_{13}^{-1} & \mathbf{I}_{[4N+2]} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{[4N-2]} \end{array} \right) \text{ e}$$

$$\mathbf{M}_r = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I}_{[4N-2]} & -\mathbf{B}_{31}^{-1}\mathbf{B}_{32} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_{[4N+2]} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{[4N-2]} \end{array} \right).$$

O polinômio $p_3(\sigma)$ da submatriz transformada $\tilde{\mathbf{B}}$ é

$$p_3(\sigma) = \det(\tilde{\mathbf{B}}) = \det(\mathbf{M}_\ell) \det(\mathbf{B}) \det(\mathbf{M}_r) = \det(\mathbf{B}) = p_2(\sigma). \quad (6-26)$$

Novamente, por construção $\mathbf{M}_\ell$ e $\mathbf{M}_r$ têm determinantes iguais a um, assim a multiplicação de $\mathbf{B}$ por $\mathbf{M}_\ell$ e $\mathbf{M}_r$ preserva o espectro. E ainda percebendo que $\tilde{\mathbf{B}}$ é triangular por blocos em relação à diagonal secundária, seu determinante é exatamente o determinante da multiplicação dos blocos $\det(\mathbf{B}_{13}) \det(\mathbf{B}_{31}) \det(\tilde{\mathbf{B}}_{22}(\sigma))$ a menos do sinal, que como estamos interessados nas raízes, não faz diferença. E, como $\det(\mathbf{B}_{13}) \det(\mathbf{B}_{31})$ é uma constante, as raízes do polinômio de $\mathbf{B}$ vão ser as mesmas que da submatriz $\tilde{\mathbf{B}}_{22}$. Logo, o problema original e a submatriz $\tilde{\mathbf{B}}_{22}$ têm os mesmos autovalores finitos, que são $4N + 2$. Assim, dos $20N + 2$ autovalores do problema original $16N$ estão no infinito, lembrando que o previsto seriam $14N + 2$.

Como eliminamos todos os autovalores no infinito o problema de autovalor generalizado pode ser transformado em um problema de autovalor clássico:

$$\left(-\sigma \tilde{\mathbf{M}}_{22} + \tilde{\mathbf{J}}_{22} \right) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\tilde{\mathbf{M}}_{22}^{-1} \tilde{\mathbf{J}}_{22}}_{\mathbf{E}} \mathbf{d} = \sigma \mathbf{d} \quad (6-27)$$

O maior custo computacional envolvido nesse método corresponde ao custo de inverter dois blocos de dimensão $(4N - 2) \times (4N - 2)$, que são $\mathbf{B}_{13}^{-1}$ e $\mathbf{B}_{31}^{-1}$ usados na construção das transformações $\mathbf{M}_\ell$ e $\mathbf{M}_r$, e ao custo relativo ao processo final de transformar o problema de autovalor generalizado em um clássico, invertendo $\tilde{\mathbf{M}}_{22}^{-1}$ de dimensão $(4N + 2) \times (4N + 2)$. Com essas transformações, somente a parte fisicamente relevante do espectro é encontrada, resolvendo um problema de autovalor clássico de aproximadamente 1/5 do tamanho do problema de autovalor generalizado original.

Os autovetores do problema reduzido $\tilde{\mathbf{b}}_2$ podem ser relacionados aos

autovetores $\mathbf{b}$ do problema de autovalor generalizado $\mathbf{B} \mathbf{b} = \mathbf{0}$:

$$\tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{M}_\ell \mathbf{B} \mathbf{M}_r \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{0}.$$

Por construção $\mathbf{M}_\ell$ é inversível, logo a expressão fica:

$$\underbrace{\mathbf{B} \mathbf{M}_r}_{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{M}_r \tilde{\mathbf{b}}.$$

Como feito antes, o sistema $\tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$ pode ser escrito em termos dos blocos:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{B}}_{11} \tilde{\mathbf{b}}_1 + \tilde{\mathbf{B}}_{12} \tilde{\mathbf{b}}_2 + \tilde{\mathbf{B}}_{13} \tilde{\mathbf{b}}_3 &= \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{21} \tilde{\mathbf{b}}_1 + \tilde{\mathbf{B}}_{22} \tilde{\mathbf{b}}_2 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{31} \tilde{\mathbf{b}}_1 &= \mathbf{0}. \end{cases}$$

Sendo $\tilde{\mathbf{B}}_{31}$ inversível, a única solução para $\tilde{\mathbf{B}}_{31} \tilde{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{0}$ é a trivial $\tilde{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{0}$. Conseqüentemente, a segunda equação se torna $\tilde{\mathbf{B}}_{22} \tilde{\mathbf{b}}_2 = \mathbf{0}$. Essa equação corresponde ao problema de autovalor reduzido dado pela equação (6-27). A solução não trivial é o autovetor $\mathbf{d}$, i.e. $\tilde{\mathbf{b}}_2 = \mathbf{d}$. O bloco $\tilde{\mathbf{b}}_3$ pode então ser diretamente encontrado fazendo: $\tilde{\mathbf{b}}_3 = -\tilde{\mathbf{B}}_{13}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_{12} \mathbf{d}$.

Assim, o autovetor do problema de autovalor $\mathbf{B} \mathbf{b} = \mathbf{0}$ é escrito em termos do autovetor do problema reduzido (6-27):

$$\mathbf{b} = \mathbf{M}_r \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{M}_r \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{d} \\ -\tilde{\mathbf{B}}_{13}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_{12} \mathbf{d} \end{pmatrix}. \quad (6-28)$$

Com isso, pode-se resolver o problema reduzido recuperando não só os autovalores como também os autovetores.

No apêndice B, encontra-se o programa em matlab para transformar a matriz, encontrar o autoespaço do problema reduzido e também o código que recupera o autovetor original a partir do autovetor do problema reduzido.

Para ilustrar o processo descrito, vamos mostrar a evolução da estrutura das matrizes nos passos mais importantes. Com o intuito de obter uma melhor visualização, as matrizes apresentadas têm apenas quatro elementos. Nesse nível de discretização o número de graus de liberdade, ou seja, a dimensão das matrizes é $20N + 2 = 82$. A figura 6.11 mostra a matriz $\mathcal{A} = -\sigma \mathbf{M} + \mathbf{J}$ original, com a mesma partição apresentada em (6-17).

Tirando as linhas e colunas relacionadas às condições de contorno essenciais, a matriz fica como na figura 6.12, com dimensão $20N - 2 = 78$,

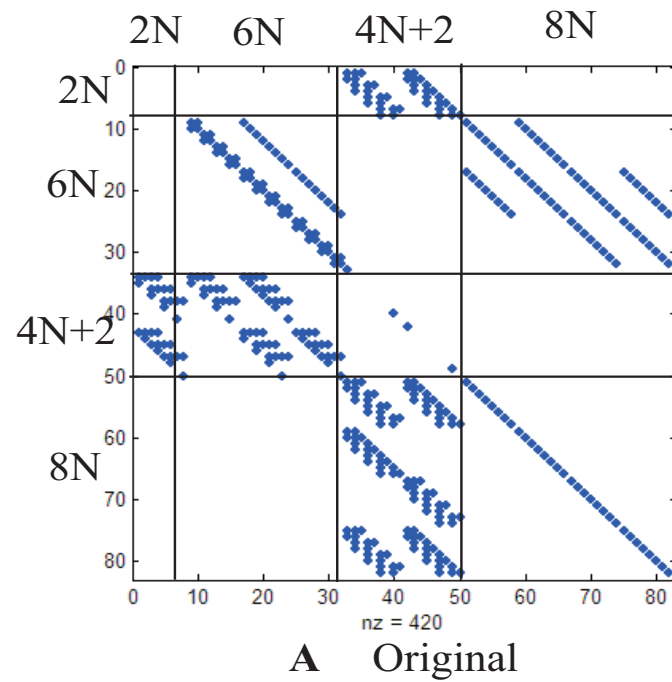


Figura 6.11: Exemplo da estrutura da matriz original com quatro elementos.

para $N = 4$.

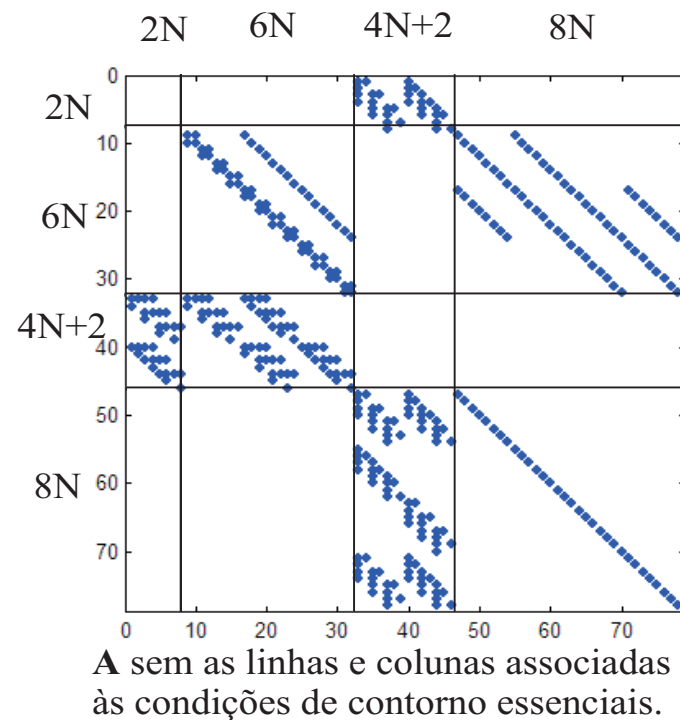


Figura 6.12: Exemplo da estrutura da matriz sem as condições de contorno de Dirichlet.

A figura 6.13 mostra a estrutura da matriz depois da transformação

proposta em (6-20), $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{T}_r$. Toda a informação do espectro finito do problema original se concentra na submatriz destacada de dimensão $(12N - 2) \times (12N - 2)$, chamada de $\mathbf{B}$.

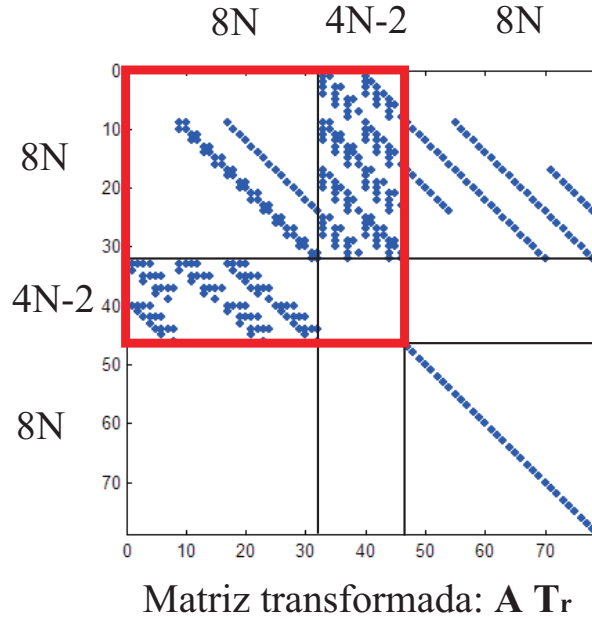


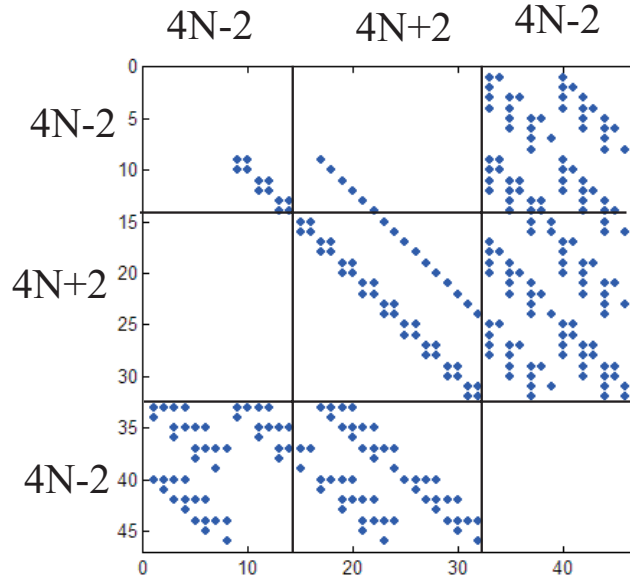
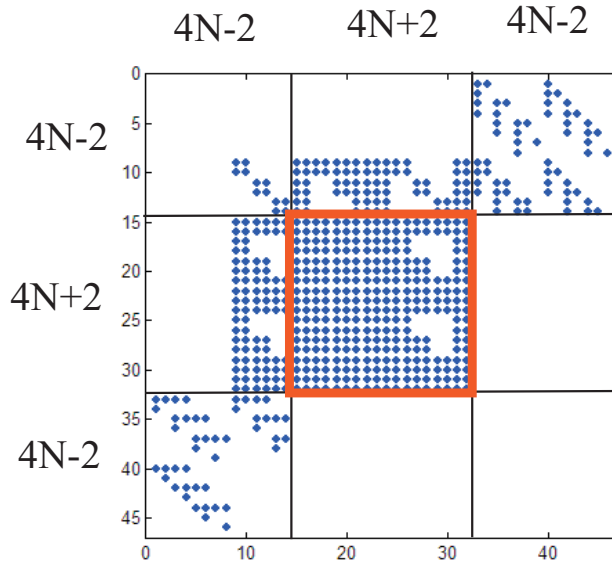
Figura 6.13: Exemplo da matriz depois da transformação $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{T}_r$. O bloco destacado é o relevante para o espectro finito nesse estágio, chamado $\mathbf{B}$.

O bloco $\mathbf{B}$, da figura 6.14 é dividido como em (6-24). Em seguida, $\mathbf{B}$ sofre as transformações $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{M}_\ell \mathbf{B} \mathbf{M}_r$ apresentadas em (6-25) e a figura 6.15 mostra a estrutura da matriz transformada com quatro elementos. Depois das transformações, toda informação fisicamente relevante do espectro se concentra no bloco central $(4N + 2) \times (4N + 2)$, 18×18 nesse caso particular.

6.7

Resultados - escoamento viscoelástico

O resultados obtidos para o escoamento de Couette com fluido de Maxwell sem inércia são apresentados. Primeiramente, as transformações feitas na formulação $\mathbf{T}_{\ell d}$ são validadas, mostrando que o espectro do problema de autovalor generalizado original e do reduzido é o mesmo. E ainda, resultados encontrados na literatura são reproduzidos pela formulação $\mathbf{T}_{\ell d}$. Os autovalores vindos da formulação $\mathbf{T}_{\ell c}$ também serão confrontados com o objetivo de avaliar a dependência da discretização para um fluido viscoelástico.


 Figura 6.14: A estrutura do bloco $\mathbf{B}$ destacado na figura 6.13 .

 Figura 6.15: A estrutura do bloco final depois de transformado $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{M}_l \mathbf{B} \mathbf{M}_r$. Todos os autovalores finitos do problema original migraram para o bloco central, $(4N + 2) \times (4N + 2)$ marcado em $\tilde{\mathbf{B}}$, com as transformações.

6.7.1 Autovalores - escoamento viscoelástico

Na seção 6.4.1, os autovalores analíticos previstos por Gorodtsov e Leonov, 1967 [3] são comparados, para uma dada combinação de parâmetros

($Re = 0, We = 10$ e $\alpha = 1$), aos autovalores do problema original discretizado seguindo a formulação $\mathbf{T}_{\ell d}$. Vamos testar as transformações nas matrizes com o mesmo grupo de parâmetros. A figura 6.16 mostra o espectro calculado com 60 elementos no problema original e também no problema transformado. Os autovalores calculados das duas maneiras coincidem até a ordem $\mathcal{O}(10^{-5})$ no pior caso. Como vimos antes, ao aumentar o número de elementos, os autovalores que aparecem na vizinhança da parte do espectro contínuo se aproximam do segmento analítico. Com uma discretização de 800 elementos, o que significa matrizes de dimensão 16002, o problema original não pôde ser calculado no computador disponível por falta de memória, porém o espectro pôde ser encontrado no problema transformado, de tamanho 3202, apresentado na figura 6.16. Três ramos aparecem em torno do segmento do espectro contínuo; um à esquerda com a parte real dos autovalores mais distantes sendo $\mathcal{R}(\sigma) = -0.10408$, outro coincidindo com a solução analítica com parte real $\mathcal{R}(\sigma) = -0.1$ e ainda outro se aproximando pela direita, com parte real $\mathcal{R}(\sigma) = -0.09592$. O desvio é exatamente o mesmo para os dois lados do segmento: 0.0041, ou seja na ordem $\mathcal{O}(10^{-3})$. O tamanho do segmento concorda com a previsão indo de $-i$ até i . O par de autovalores discretos, σ_{GL} , apresentam uma concordância da ordem de $\mathcal{O}(10^{-4})$.

Essa combinação de parâmetros é a mesma de um dos espectros apresentados por Sureskumar *et. al.*, 1999 [23]. O espectro mostrado na figura 6.17, retirado do artigo, foi calculado usando uma formulação baseada na discretização com modos de Chebyshev. Pode-se perceber, que a parte contínua do espectro é representada por balões que se aproximam do segmento ao aumentar o nível de discretização, sendo que nesse caso, nenhum autovalor recupera o segmento contínuo. Por outro lado, usando a formulação $\mathbf{T}_{\ell d}$, o próprio segmento contínuo é recuperado, além dos balões ao redor. Sureshkumar *et. al.* 1999 reportam uma convergência de 10 casas decimais para os autovalores discretos, com $N=128$ (modos de Chebyshev), enquanto que o espectro contínuo apresenta um erro ainda maior que 18% e uma convergência lenta apesar de sistemática. Usando a formulação $\mathbf{T}_{\ell d}$, com 800 elementos, o erro relativo para os autovalores que se aproximam do segmento contínuo é menor que 4%. Repare que a geometria do trabalho de Sureshkumar *et. al.* é a mesma usada na análise de Gorodtsov & Leonov, 1967 [3], ou seja, a metade superior da geometria aqui estudada.

As transformações baseadas no caso Newtoniano foram generalizadas aqui para líquidos viscoelásticos. Economizam significativamente memória e tempo computacional. A dimensão do problema reduzido é aproximada-

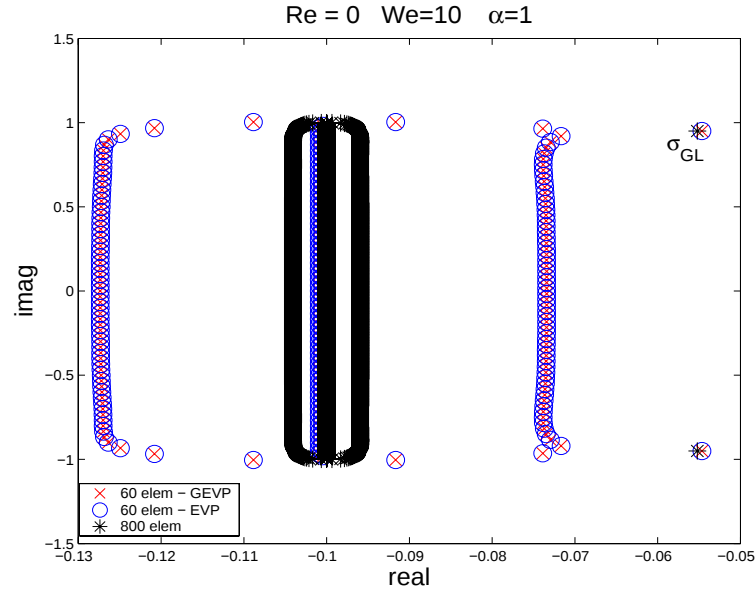


Figura 6.16: Espectro calculado com 60 e 800 elementos. As transformações foram feitas e o resultado coincidente. Com 60 elementos os autovalores discretos já estão convergido na ordem de $\mathcal{O}(10^{-4})$, porém a parte do espectro contínuo não atingiu uma independência com a malha. Os ramos que se aproximam do segmento contínuo distam 0.0041 para cada lado mesmo com 800 elementos.

R. Sureshkumar et al. / J. Non-Newtonian Fluid Mech. 82 (1999) 57–104

75

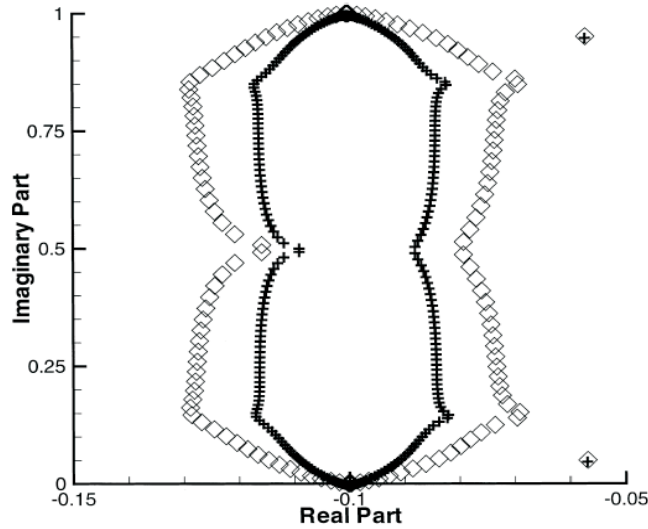


Fig. 8. Eigenspectrum computed using the Chebyshev discretization for plane Couette flow of the UCM fluid with $De = 10$ and $\alpha = 1$. Results are shown for $N = 65(\diamond)$ and $N = 129(+)$.

Figura 6.17: Espectro calculado usando a discretização de Chebyshev para o escoamento de Couette com líquido UCM, com $We = 10$, $\alpha = 1$. Resultados apresentados com $N = 65(\diamond)$ e $N = 129(+)$ - tradução livre da legenda vinda na figura 8 do artigo [23]

mente cinco vezes menor que o original. A tabela 6.1 mostra o número de elementos e os graus de liberdade para as duas formulações, e também o tempo necessário para cada processo em segundos. A razão entre os tempos mostra o ganho de uma delas em relação à outra, um fator impressionante de 50. Aumentando o número de elementos, existe uma dimensão limite, a partir da qual, somente o problema reduzido pode ser calculado, por limitações na memória. O tempo apresentado na tabela inclui todos os passos das transformações e cálculo dos autovalores e autovetores.

Tabela 6.1: Número de elementos, dimensão das matrizes e tempo de CPU, em segundos, necessário para calcular os autovalores com diferentes malhas.

# ele	N_{gl} GEVP	N_{gl} EVP	tempo GEVP[s]	tempo EVP[s]	t_{GEVP}/t_{EVP}
60	1202	242	140	3.1	45
100	2002	402	629	13	48
125	2502	502	1252	21	59
150	3002	602	—	43.6	—
200	4002	802	—	85.8	—
300	6002	1202	—	254.3	—

Outro grupo de pesquisadores cujos trabalhos contribuem para o progresso do estudo em estabilidade de escoamentos viscoelásticos também foi escolhido para ser comparado ao nosso.

Novamente, ao comparar o resultado obtido pela formulação $\mathbf{T}_{\ell d}$ com o trabalho de Wilson *et. al.*, 1999 [24] para o grupo de parâmetros: $Re = 0, We = 1, \alpha = 1$, o segmento contínuo só aparece no espectro da formulação $\mathbf{T}_{\ell d}$ não é recuperado pelos modos de Chebyshev de Wilson *et. al.*, [24]. Apesar de também não atingir uma convergência, o espectro contínuo recuperado com a discretização de elementos finitos é mais próximo do analítico do que os disponíveis na literatura.

6.7.2

Autovetores - escoamento viscoelástico

Os autovetores do escoamento de Couette com $We = 10, \alpha = 1$ e $Re = 0$ foram calculados no problema original e também a partir do problema transformado. Inicialmente, analisaremos o autovetor relativo ao autovalor discreto, σ_{GL} . Novamente os campos foram separados e a velocidade v , a pressão p e o componente T_{xx} do tensor das tensões são comparados na figura 6.20. A concordância varia por campo. Enquanto a

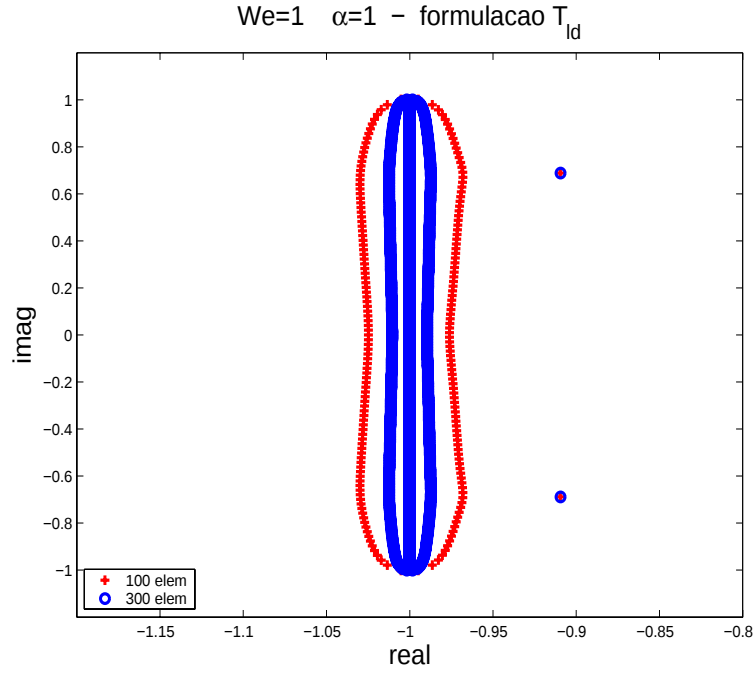
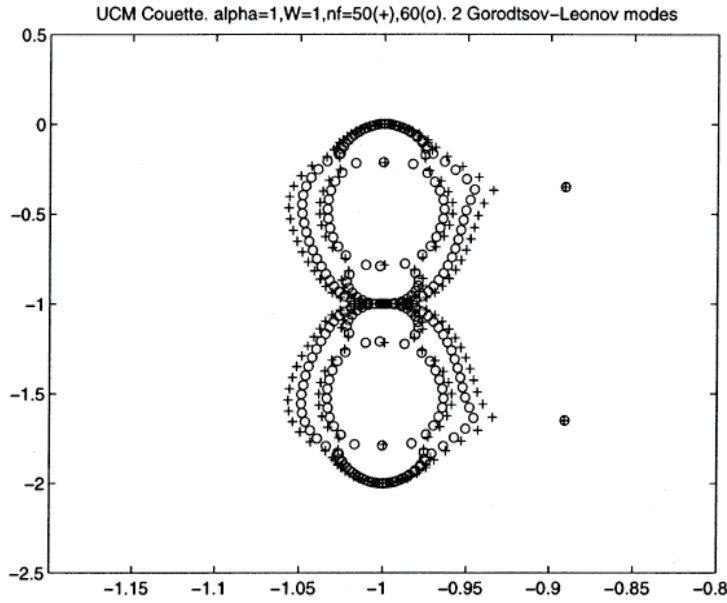


Figura 6.18: Espectro calculado com 100 e 300 elementos mostrando a convergência do espectro contínuo.



Eigenspectrum for Couette flow of a UCM fluid using 50 and 60 Chebyshev modes.

Figura 6.19: Espectro calculado usando 50 e 60 modos de Chebyshev na discretização para o escoamento de Couette com líquido UCM, com $We = 1, \alpha = 1$. Resultados apresentados com $N = 50(+)$ e $N = 60(o)$ - tradução livre da legenda vinda na figura de [24]

velocidade v teve um erro relativo insignificante $O(10^{-14})$, a velocidade u apresentou o maior erro na ordem de $O(10^{-4})$. Os autovetores relativos às velocidades e à pressão são funções suaves, porém os componentes de tensão não. Mesmo o autovalor sendo discreto, os autovetores relacionados ao campo de tensão se parecem com os encontrados no espectro contínuo espúrio introduzido pela formulação $\mathbf{T}_{\ell c}$, figura 6.5. Variamos o número de elementos e o erro relativo dos autovetores calculados com 100 e com 150 elementos é da ordem $O(10^{-2})$, sendo imperceptível no gráfico.

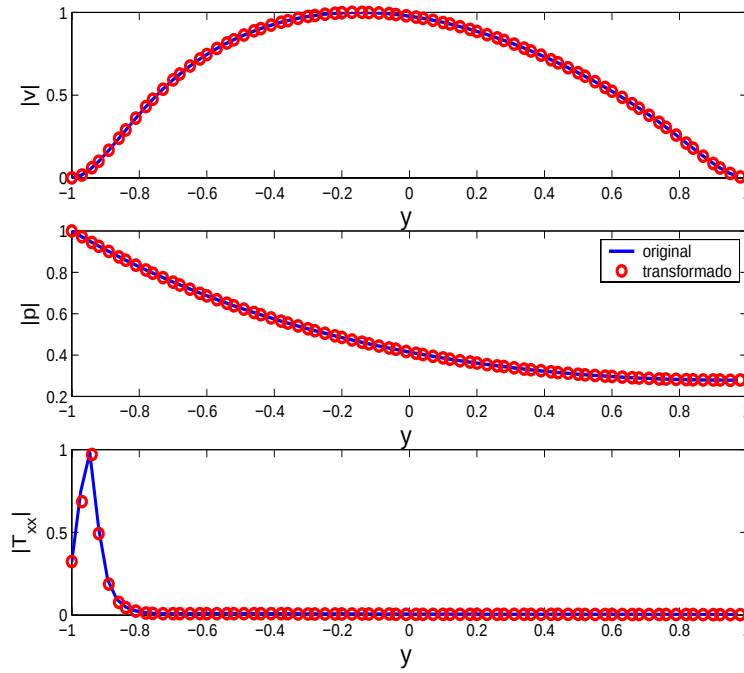


Figura 6.20: Autovetores calculados com 80 elementos no problema original e no transformado.

Os autovetores do segmento contínuo têm um comportamento descontínuo mesmo nos campos de velocidade e pressão. A figura 6.21 mostra os autovalores cujos autovetores vão ser apresentados. Com o objetivo de comparar autovetores relativos a autovalores semelhantes nos três ramos, escolhemos os que têm parte imaginária mais próxima de zero.

Observe pelo gráfico que foca o domínio próximo de $\Im(\sigma) = 0$ que o espectro no segmento à esquerda do contínuo analítico não tem autovalores puramente reais, por isso vai ser analisado o par $(\sigma_{GA}, \sigma_{GB})$. Já o ramo à direita do segmento contínuo tem um autovalor puramente real σ_{GF} . No segmento que recupera o contínuo aparecem os três, $(\sigma_{GC}, \sigma_{GE})$ com mesmo valor imaginário que $(\sigma_{GA}, \sigma_{GB})$ e σ_{GD} puramente real. Escolhemos os autovetores do componente u' de velocidade, a pressão p e o componente xy do tensor das tensões T'_{xy} para ilustrar os autovetores.

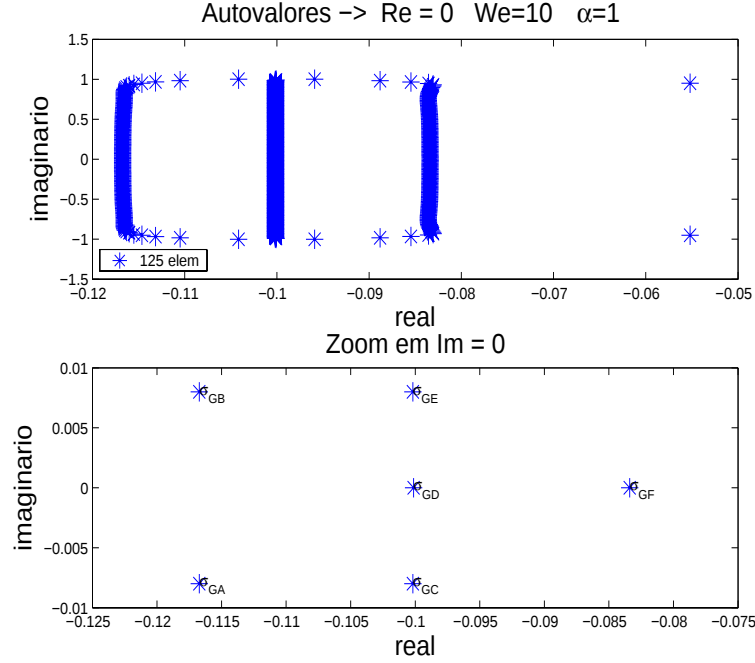


Figura 6.21: Autovalores calculados com 120 elementos.

No gráfico 6.22, os autovetores relativos aos autovalores do segmento a esquerda do contínuo (σ_{GA}, σ_{GB}) são aparentemente “mais suaves” que os autovetores relativos aos autovalores equivalentes no segmento do meio (σ_{GC}, σ_{GE}). Contudo, todos apresentam um salto em $y \simeq 0$, acompanhando $\Im(\sigma) \simeq 0$, como pode ser visto no gráfico que foca a vizinhança de $y = 0$ da figura 6.22. Assim, “mais suaves” no sentido em que a diferença entre o valor médio da autofunção na vizinhança de $y = 0$ e o pico do salto relativo aos autovalores do segmento da esquerda é menor do que os do meio.

O autovetor relativo ao autovalor do segmento a direita do espectro contínuo analítico, que é puramente real, tem um comportamento diferente do anterior em relação aos relativos ao segmento do meio, figura 6.23. O autovalor do segmento do meio tem um autovetor “mais suave” que o do segmento a direita.

Comparamos agora os três autovetores referentes a autovalores na vizinhança de $\Im(\sigma) = 0$ no segmento do meio na figura 6.24, que é o que recupera o espectro contínuo.

Globalmente, os autovetores relativos a $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_D$ têm comportamento parecido e “mais suave” que os relativos a $\sigma_C, \sigma_E, \sigma_F$.

Nesses gráficos é apresentado o módulo normalizado dos autovetores. Eles sugerem que os espaços usados na discretização dos campos perturbados podem ser mais apropriados, dadas suas características descontínuas.

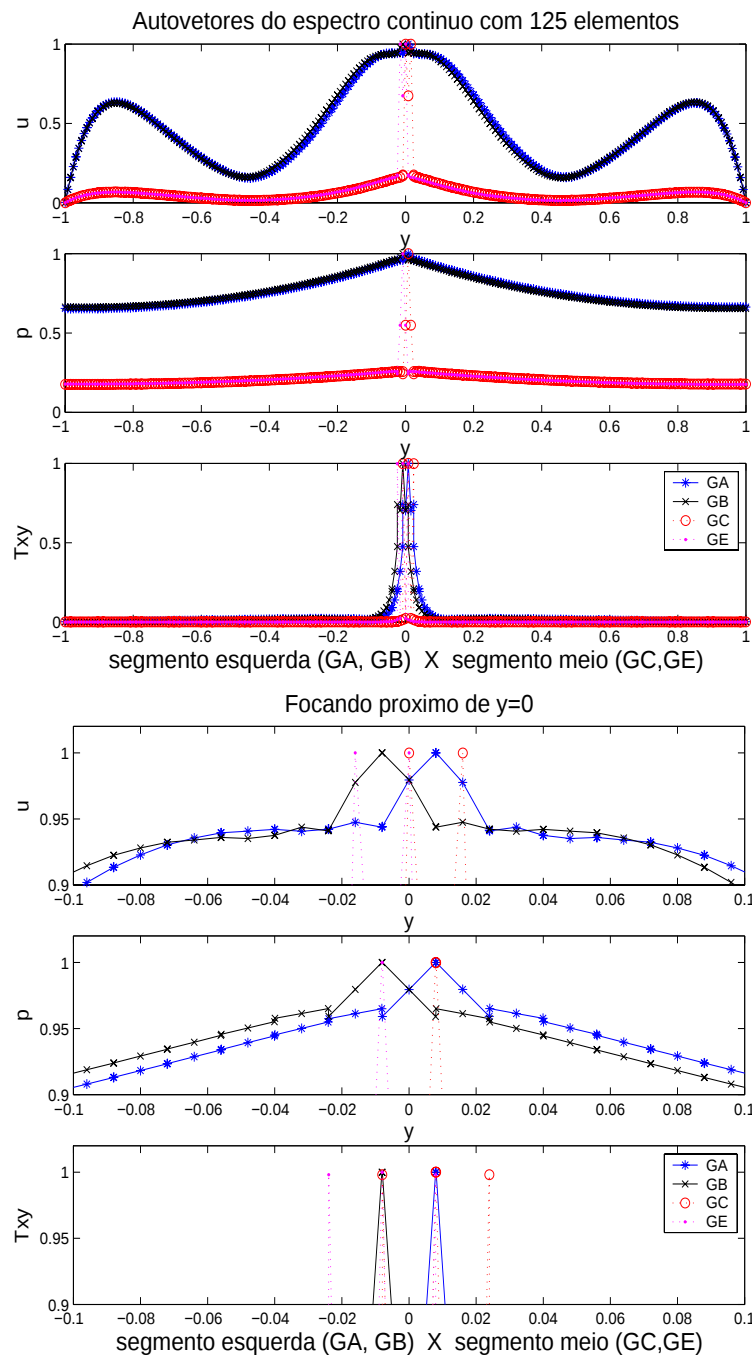


Figura 6.22: Autovetores calculados com 125 elementos relativos aos autovalores destacados na figura 6.21 do ramo da esquerda e do meio.

Kupferman, 2005 [33] apresenta uma combinação de funções e derivadas de funções delta como autofunções para os campos dessa mesma análise de estabilidade.

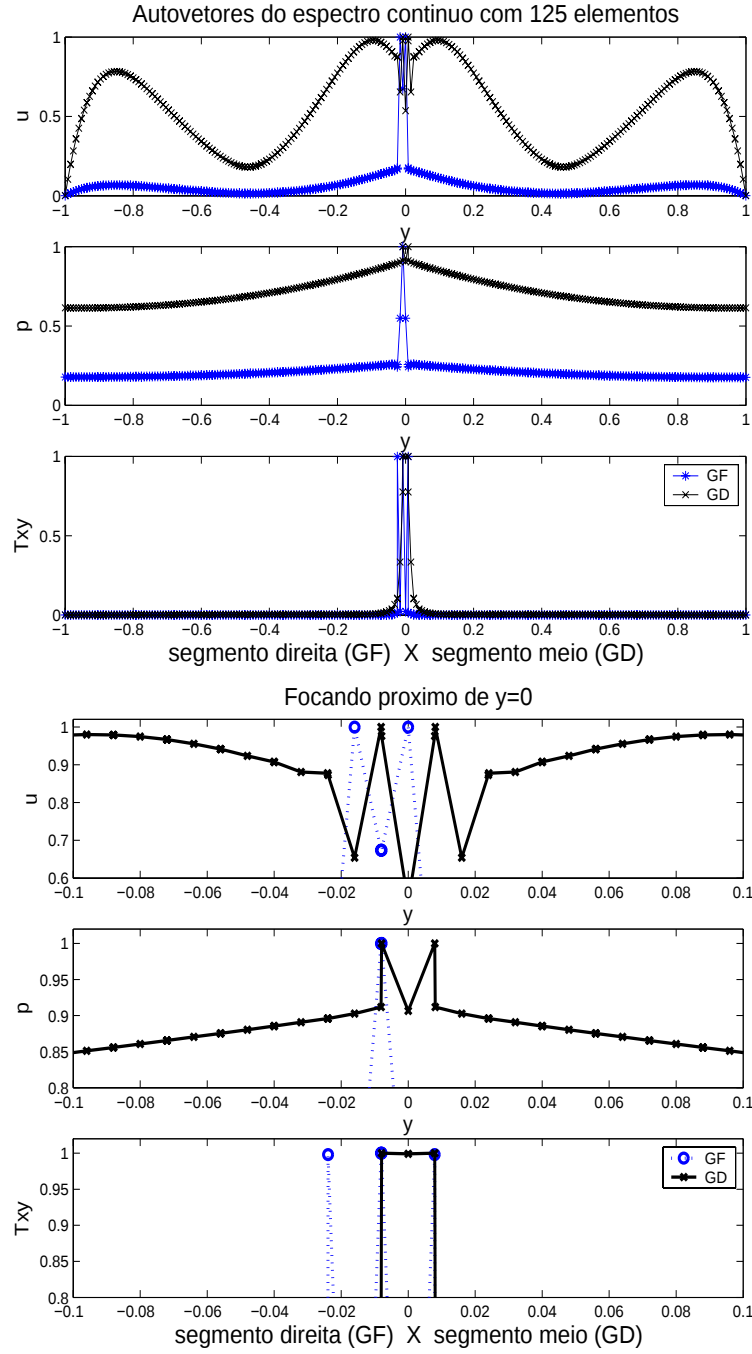


Figura 6.23: Autovetores calculados com 125 elementos relativos aos autovalores destacados na figura 6.21 do ramo da direita e do meio.

6.7.3

Comparando os resultados das formulações $\mathbf{T}_{\ell c}$ e $\mathbf{T}_{\ell d}$ para líquidos viscoelásticos

Na seção 6.4.1 os resultados para o caso Newtoniano ($We = 0, Re \neq 0$) obtidos pelas formulações $\mathbf{T}_{\ell c}$ e $\mathbf{T}_{\ell d}$ foram comparados. Naquele caso, a formulação $\mathbf{T}_{\ell d}$ recuperou fielmente os resultados disponíveis na literatura,

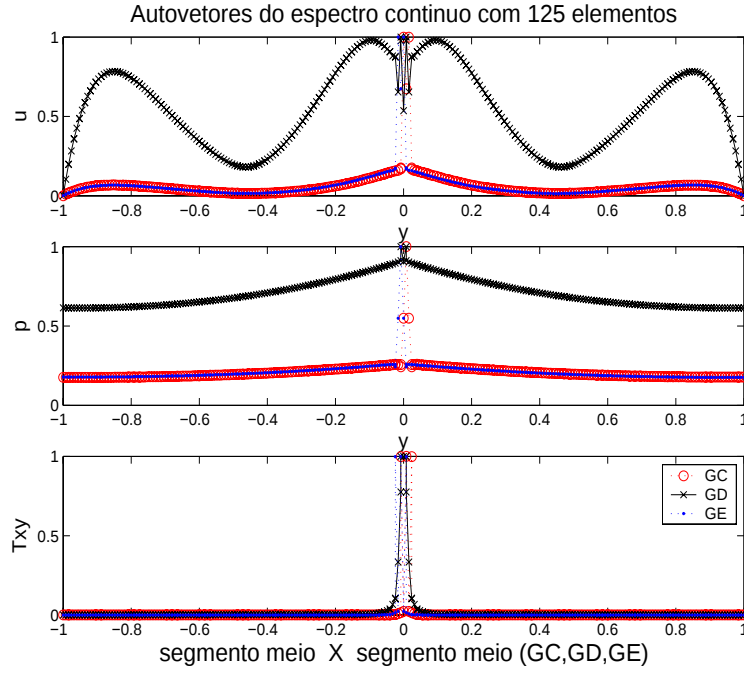


Figura 6.24: Autovetores calculados com 125 elementos relativos aos autovalores destacados na figura 6.21 do ramo do meio.

enquanto a $\mathbf{T}_{lc}$ introduziu autovalores espúrios. Uma pergunta natural é: Será que para escoamentos com líquidos viscoelásticos sem inércia ($We \neq 0$, $Re = 0$) esse comportamento se repete?

A figura 6.25 mostra o espectro para $Re = 0$, $\alpha = 1$ e $We = 10$ calculado pelas duas formulações. O número de elementos foi escolhido de forma que as duas tenham o mesmo número de graus de liberdade, ou seja, matrizes com mesma dimensão. Para a formulação $\mathbf{T}_{lc}$ foram usados 161 elementos, e para a formulação $\mathbf{T}_{ld}$ 105. Ambos geram matrizes 2102×2102 . Os autovalores com a formulação $\mathbf{T}_{lc}$ foram calculados também com 200 elementos, que corresponde a uma malha 25% maior em número de graus de liberdade. Ao refinar a malha, o espectro não se aproxima do analítico, sugerindo que a discretização gera matrizes com auto-espço diferente da formulação contínua. Com a formulação $\mathbf{T}_{lc}$ o espectro contínuo aparece em $-1/2We$ ao invés de $-1/We$. E ainda, quatro autovalores são discretos, dois a mais do esperado. Para o líquido viscoelástico, a formulação $\mathbf{T}_{lc}$ origina matrizes com espectro ainda mais distante do analítico se comparado aos líquidos Newtonianos.

Analogamente ao tratamento do gradiente de velocidade como uma variável independente, Sun *et. al.*, 1999 [7] sugerem acrescentar um termo viscoso na equação de quantidade de movimento para ajudar na estabilidade numérica. Testamos o novo termo, apresentado na equação (6-29). Porém,

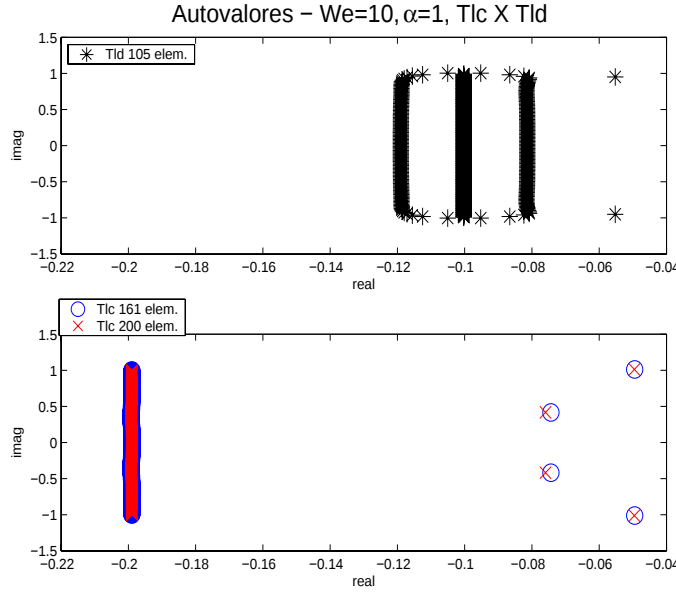


Figura 6.25: Espectro calculado com as formulações $\mathbf{T}_{lc}$ e $\mathbf{T}_{ld}$.

é interessante observar que, mudando a função base que expande o campo de tensão, esse termo viscoso não é necessário, como é o caso da formulação $\mathbf{T}_{ld}$, que não requer viscosidade artificial.

O sistema (6-6) se mantém com um novo termo na equação de quantidade de movimento que se torna:

$$Re \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} + \nabla \cdot [\eta_a (\nabla \mathbf{v} - \mathbf{G} + \nabla \mathbf{v}^T - \mathbf{G}^T)] = 0. \quad (6-29)$$

onde η_a = viscosidade adaptativa. Usamos $\eta_a = 1$ na modelagem.

A figura 6.26 mostra os autovalores calculados com a formulação $\mathbf{T}_{lc}^{\eta_a=1}$. Assim como a maioria dos espectros disponíveis na literatura, a formulação não recupera o segmento contínuo, apenas os autovalores na vizinhança, que se aproximam do segmento ao refinar a malha. Com a viscosidade adaptativa, as matrizes envolvidas têm um espectro próximo ao analítico, e assim como na formulação $\mathbf{T}_{ld}$ e também na maioria dos trabalhos encontrados na literatura, a parte do espectro contínuo apresenta uma convergência lenta, enquanto que os autovalores discretos convergem logo. Na figura 6.26, o espectro vindo da formulação $\mathbf{T}_{lc}^{\eta_a=1}$ com dois diferentes número de elementos são confrontados, mostrando uma convergência dos autovalores discretos σ_{GL} da ordem de $O(10^{-4})$, enquanto que os autovalores da parte do espectro contínuo se aproximam lentamente do segmento.

Apesar de não recuperar o segmento contínuo, os autovalores na vizinhança do segmento vindos da formulação $\mathbf{T}_{lc}^{\eta_a=1}$ são mais próximos

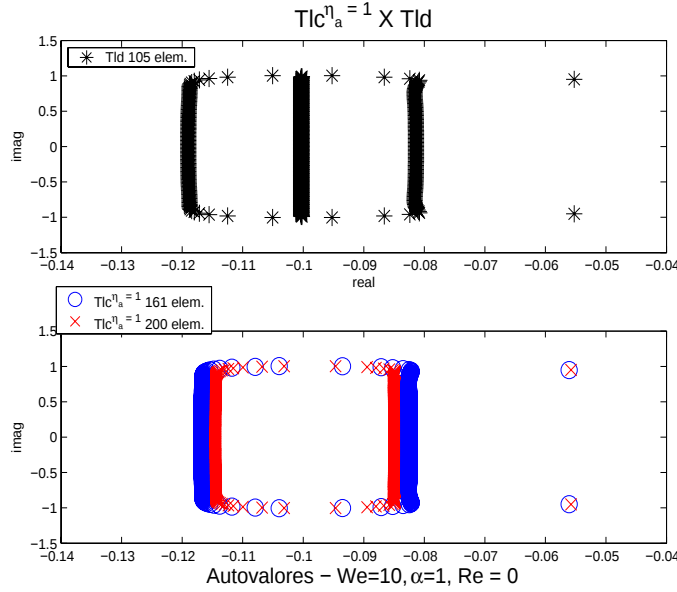


Figura 6.26: Espectro calculado com as formulações $\mathbf{T}_{lc}^{\eta_a=1}$ e $\mathbf{T}_{ld}$.

do segmento contínuo do que os vindos da formulação $\mathbf{T}_{ld}$. A comparação é feita com o mesmo número de graus de liberdade, e pode ser observada na figura 6.27. E ainda, o autovalor discreto σ_{GL} da formulação $\mathbf{T}_{lc}^{\eta_a=1}$ tem um desvio menor do que o calculado com a $\mathbf{T}_{ld}$. Segundo Gorodtsov & Leonov, para essa combinação de parâmetros, os autovalores discretos são: $\sigma_{GL} = -0.056948 - 0.95023i$ e seu conjugado. Com a formulação $\mathbf{T}_{ld}$ encontramos: $\sigma_{GL}^{Tld} = -0.055201 - 0.95024i$, a 0.0017 de distância do analítico. Com a formulação $\mathbf{T}_{lc}^{\eta_a=1}$: $\sigma_{GL}^{Tlc} = -0.056182 - 0.9495i$, a 0.0011 do analítico.

Ainda outra observação interessante é que, enquanto os autovalores em infinito são todos identificados pelo método numérico na formulação $\mathbf{T}_{ld}$, e até eliminados com as transformações propostas, o mesmo não ocorre na formulação $\mathbf{T}_{lc}^{\eta_a=1}$. Como mostra a figura 6.27, muitos autovalores $\mathbf{T}_{lc}^{\eta_a=1}$ vêm do infinito, se aproximando do local previsto para o espectro analítico. No caso $\mathbf{T}_{ld}$ todos os autovalores finitos estão próximos à solução analítica.

Não é surpreendente que a discretização determina o sucesso na determinação dos autovalores. No trabalho de Kupferman, 2005 [33] uma discretização baseada em diferenças finitas padrão não recupera bem o espectro do escoamento de Couette, porém ao deslocar alguns graus de liberdade para nós vizinhos, Kupferman recupera o espectro. Os mesmos deslocamentos aplicados na discretização do escoamento de Poiseuille não funcionam. As dificuldades de encontrar uma boa discretização no caso de escoamentos com líquidos viscoelásticos acontece até mesmo na solução

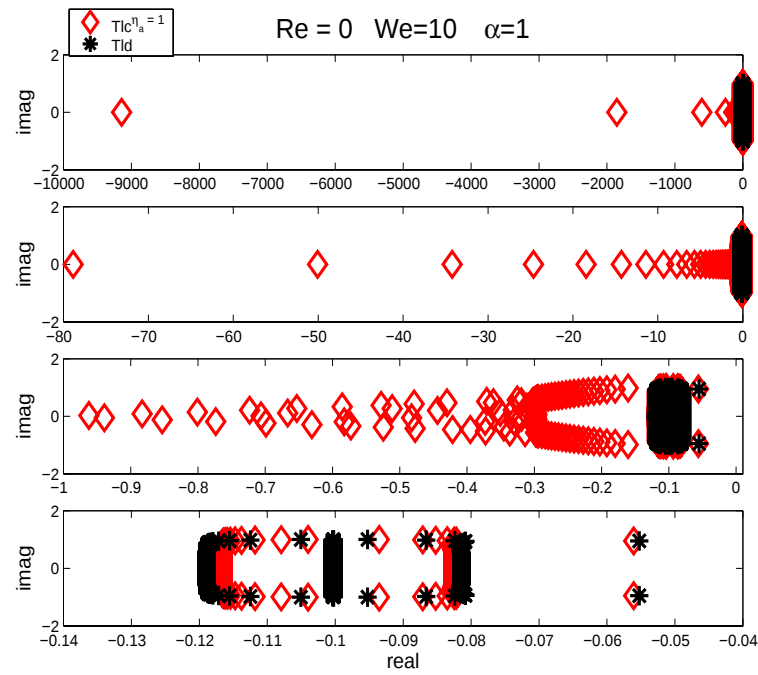


Figura 6.27: Espectro calculado com as formulações $T_{lc}^{\eta_a=1}$ e T_{ld} , ambas com 2102 graus de liberdade. No primeiro gráfico estão todos os autovalores finitos. Nos outros a janela se aproxima da solução analítica.

permanente de escoamentos complexos com alta elasticidade.

7

Conclusão

Elementos finitos foram usados no sistema linear que descreve o problema de estabilidade. A discretização foi feita nas variáveis primitivas, permitindo que uma formulação para geometrias simples seja extensível para outras geometrias. O problema discreto de autovalor generalizado apresenta valores no infinito, o que dificulta a análise numérica. Um método baseado em transformações lineares, que realizam eliminações Gaussianas nas linhas e colunas da matriz original, é proposto e elimina os autovalores infinitos. Essa análise foi feita em escoamentos paralelos Newtonianos uni e bidimensionais e ainda em um escoamento de líquido viscoelástico. O ganho computacional é relevante. No escoamento 1D o ganho de tempo foi em torno de 30 vezes e o problema transformado tem um terço da dimensão do original. No caso 2D, a dimensão foi reduzida por um fator de quatro. Contudo, ainda estamos trabalhando nesse caso, pois o espectro transformado apresenta uma instabilidade numérica provavelmente associada à inversão dos blocos na formação das transformações propostas. É curioso, porém, que o método de Newton, ao calcular a solução do escoamento permanente, utiliza a inversa da matriz jacobiana original que tem o condicionamento na mesma ordem de grandeza que o dos blocos a serem invertidos nas transformações. No escoamento de Couette com líquido de Maxwell, as transformações foram um sucesso. Observou-se um ganho de um fator de 50 no tempo e a dimensão do problema reduzido é um quinto da dimensão do original. As principais vantagens do novo método são:

- elimina os autovalores no infinito sem precisar de técnicas de pre-condicionamento que são computacionalmente custosas;
- reduz a dimensão do problema de autovalor sem perder precisão nos casos unidimensionais;
- a matriz massa reduzida não é singular permitindo que o problema generalizado seja transformado em um clássico.

- Nenhuma informação do autoespaço é perdida, uma vez que além de encontrar os autovalores, a partir do autovetor reduzido pode-se reconstruir o original.

Esse método pode ser adaptado, como foi do caso Newtoniano para o viscoelástico, para qualquer análise linear de estabilidade que tenha alguma restrição, não se limitando apenas á hidrodinâmica. Problemas de vibrações e sistemas elétricos são exemplos onde esse tipo de análise pode ser feito.

No caso não Newtoniano revelações sobre os autovetores sugerem novos espaços de funções base a serem explorados. A presença de parte do espectro contínuo exige uma análise numérica mais elaborada.

Esse estudo abre portas para muito trabalho no futuro. Entre eles, um estudo das possíveis funções base para o caso de líquidos viscoelásticos, a continuação do caso bidimensional. Um próximo passo depois da análise de escoamentos bidimensionais com líquidos Newtonianos seria generalizá-la para líquidos viscoelásticos.

Bibliografia

- [1] MORAWETZ, C. S.. The eigenvalues of some stability problems involving viscosity. J. Rational Mech. Analysis., 1:579–603, 1952.
- [2] ROUSE, P. E.. A theory of the linear viscoelastic properties of dilute solutions of coiling polymers. J. Chem. Phys., 21:1272–1280, 1953.
- [3] GORODTSOV, V. A.; LEONOV, A. I.. On a linear instability of plane couette flow of viscoelastic fluid. Journal Appl. Math. Mech., 31:310–319, 1967.
- [4] ROMANOV, V. A.. Stability of plane-parallel couette flow. Funct. Anal. Applics., 7:137–146, 1973.
- [5] DRAZIN, P. G.; H., R. W.. Hidrodynamic stability. Cambridge University Press, 1981.
- [6] GIESEKUS, H.. Simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation dependent tensorial mobility. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 11:69–109, 1982.
- [7] SUN, J.; SMITH, M. D.; ARMSTRONG, R. C. ; BROWN, R. A.. Finite element method for viscoelastic flows based on the discrete adaptative viscoelastic stress splitting and the discontinuous galerkin method. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 11:69–109, 1982.
- [8] RUSCHAK, K. J.. A three-dimentional linear stability analysis for two-dimentional free boudary flows by the finite element method. Computers and Fluids., 11(04):391–401, 1983.
- [9] RENARDY, M.; RENARDY, Y.. Linear stability of plane couette flow of an upper convected maxwell fluid. Journal of non-Newtonian Fluid Mechanics., 22:23–33, 1986.

- [10] BIRD, R. B.; ARMSTRONG, R. C. ; O., H.. **Dynamics of Polymeric Liquids**. Wiley-Intercience Publication, 1987.
- [11] CHRISTODOULOU, K. N.; SCRIVEN, L. E.. **Finding leading modes of a viscous free surface flow: an asymmetric generalized eigenproblem**. Journal of Scientific Computation, 3:355–406, 1988.
- [12] COYLE, D. J.; MACOSKO, C. W. ; SCRIVEN, L. E.. **Stability of symmetric film-splitting between counter-rotating cylinders**. Journal of Fluid Mechanics., 216:437–458, 1990.
- [13] TILLMARK, N.; ALFREDSSON, P. H.. **Experiments on transition and turbulence in plane couette flow**. Journal of Fluid Mechanics., 235:89–102, 1992.
- [14] RAMANAN, N.; HOMSY, G. M.. **Linear stability of lid-driven cavity flow**. Physics and Fluids., 06(08):2690–2701, 1994.
- [15] SURESHKUMAR, R.; BERIS, A. N.. **Linear stability analysis of viscoelastic poiseuille flow using an arnoldi-based orthogonalization algorithm**. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 56:151–182, 1995.
- [16] SZADY, M. J.; SALOMON, T. R.; LIU, A. W.; BORNSIDE, D. E.; ARMSTRONG, R. C. ; BROWN, R. A.. **A new mixed finite element method for viscoelastic flows governed by differential constitutive equations**. Journal of non-Newtonian Fluid Mechanics., 59:215–243, 1995.
- [17] DONGARRA, J. J.; STRAUGHAM, B. ; WALKER, D. W.. **Chebyshev tau-qz methods for calculating spectra of hydrodynamic stability problems**. App. Numer. Math., 22:399–434, 1996.
- [18] SHAQFEH, S. G.. **Purely elastic instabilities in viscometric flows**. Annu. Rev.J. Fluid. Mech., 28:129–185, 1996.
- [19] SAAD, Y.. **Iterative methods for sparse linear systems**. PWS publishing N.Y., 1996.
- [20] GOLUB, G. H.; F., V. L. C.. **Matrix Computations**. The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [21] PANTON, R. L.. **Incompressible flow**. Wiley-Intercience Publication., second edition, 1996.

- [22] BAAIJENS, F. P. T.. **Mix finite element methods for viscoelastic flow analysis: a review.** Journal of non-Newtonian Fluid Mechanics., 79:361–385, 1998.
- [23] SURESHKUMAR, R.; SMITH, M. D.; ARMSTRONG, R. C. ; BROWN, R. A.. **Linear stability and dynamic of viscoelastic flows using time-dependent numerical simulations.** Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 82:57–104, 1999.
- [24] WILSON, H. J.; RENARDY, M. ; RENARDY, Y.. **Structure of the spectrum in zero reynolds number shear flow of the ucm and odroyd-b liquids.** Journal of non-Newtonian Fluid Mechanics., 80:251–268, 1999.
- [25] SOUZA, M. O.. **Introdução à estabilidade hidrodinâmica.** SBMAC - XXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, CNMAC, 1999.
- [26] CARVALHO, M. S.; SCRIVEN, L. E.. **Three-dimensional stability analysis of free surface flows: Application to forward deformable roll coating.** J. Comput. Phys., 151:534–562, 1999.
- [27] WATKINS, D. S.. **Infinite eigenvalues and qz algorithm.** preprint SFB 393, 99(23), 1999.
- [28] SURESHKUMAR, R.; ARORA, K.. **Efficient computation of the eigenspectrum of viscoelastic flows using submatrix-based transformation of the linerized equations.** Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 104:75–85, 2002.
- [29] RENARDY, M.. **Effect of upstream boundary conditions on stability of fiber spinning in the highly elastic limit.** Journal of Rheology., 46(4):1023–1028, 2002.
- [30] PASQUALI, M.; SCRIVEN, L. E.. **Free surface flows of polymer solutions with models based on the conformation tensor.** Journal of non-Newtonian Fluid Mechanics., 108:363–400, 2002.
- [31] BOTTARO, A.; CORBETT, P. ; LUCHINI, P.. **The effect of base flow variation on flow stability.** Journal of Fluid Mechanics, 476:293–302, 2003.

- [32] SURESHKUMAR, R.. **Stability analysis using compressible viscoelastic formulations.** Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 116:471–477, 2004.
- [33] KUPFERMAN, R.. **On the linear stability o plane couette flow for an oldroid-b fluid and its numerical approximation.** Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics., 127:169–190, 2005.

A

Formulação com líquido Newtoniano

A.1

Programa do método proposto para a solução do problema de autovalor generalizado vindo da análise de estabilidade de um escoamento de Couette com líquido Newtoniano.

Vamos mostrar o programa feito em matlab sobre o problema de autovalor generalizado discutido no capítulo 4 que elimina os autovalores no infinito. O programa compara o tempo e o espectro calculado pelo método QZ das matrizes originais com o tempo de realizar as transformações e calcular o espectro nas matrizes reduzidas. As matrizes são formadas pela discretização do sistema que descreve a estabilidade do escoamento de Couette com líquido Newtoniano com o método de Galerkin/elementos finitos.

```
clear all; % para limpar a área de trabalho do matlab.
% Os parâmetros:
NELE = 200 % número de elementos,
Re = 500; % número de Reynolds,
alpha = 1.5; % número de onda.
tic % o comando 'tic toc' fornece o tempo gasto para a
% realização da rotina.
% monta as matrizes M e J vindas dos elementos finitos. De
forma esparsa!
[M] = formM12DNs(NELE, Re, alpha);
[J] = formJ12DNs(NELE, Re, alpha);
% número total de graus de liberdade:
n = NDoF = 2 * (NELE + 1) + 2 * NELE;
t1 = toc % t1 eh o tempo em segundos para a formação das
% matrizes.
```

```

% nomenclatura para as dimensões envolvidas no problema:
nu = 2 * NELE + 1; % número de graus de liberdade de u
nv = 2 * NELE + 14; % número de graus de liberdade de v
np = 2 * NELE; % número de graus de liberdade de p
ntv = 2 * (2 * NELE + 1); % número de graus de
% liberdade de u + v
ntp = 2 * (2 * NELE + 1) + 2 * NELE; % número
% de graus de liberdade de u + v + p
Jnew = J; % guardando as matrizes originais.
Mnew = M;
tic
% retirando as linhas e colunas relativas as condições
% de contorno; neste caso, elas estão em 1, 2NELE,
% 2NELE + 2 e 4NELE + 1.
% tirando as linhas:
Jnew(1,:) = [ ];
Jnew(2 * NELE - 1,:) = [ ];
Jnew(2 * NELE,:) = [ ];
Jnew(4 * NELE - 2,:) = [ ];
Mnew(1,:) = [ ];
Mnew(2 * NELE - 1,:) = [ ];
Mnew(2 * NELE,:) = [ ];
Mnew(4 * NELE - 2,:) = [ ];
% colunas:
Jnew(:,1) = [ ];
Jnew(:, 2 * NELE - 1) = [ ];
Jnew(:, 2 * NELE) = [ ];
Jnew(:, 4 * NELE - 2) = [ ];
Mnew(:,1) = [ ];
Mnew(:, 2 * NELE - 1) = [ ];
Mnew(:, 2 * NELE) = [ ];
Mnew(:, 4 * NELE - 2) = [ ];
% montando os blocos da matriz A para a utilização do método
% proposto.
J11 = Jnew(1 : np, 1 : np);
M11 = Mnew(1 : np, 1 : np);
J12 = Jnew(1 : np, np + 1 : 2 * nu - 4);
M12 = Mnew(1 : np, np + 1 : 2 * nu - 4);
J21 = Jnew(np + 1 : 2 * nu - 4, 1 : np);

```

```

M21 = Mnew(np + 1 : 2 * nu - 4, 1 : np);
J22 = Jnew(np + 1 : 2 * nu - 4, np + 1 : 2 * nu - 4);
M22 = Mnew(np + 1 : 2 * nu - 4, np + 1 : 2 * nu - 4);
% Blocos sem  $\sigma \Rightarrow \mathbf{M}$  é zero!!!
A13 = Jnew(1 : np, (2 * nu) - 3 : ntp - 4);
A31 = Jnew((2 * nu) - 3 : ntp - 4, 1 : np);
A23 = Jnew(np + 1 : 2 * nu - 4, (2 * nu) - 3 : ntp - 4);
A32 = Jnew((2 * nu) - 3 : ntp - 4, np + 1 : 2 * nu - 4);
% calculando a inversa dos blocos  $A_{13}$  e  $A_{31}$ , pelo método LU:
[L13, U13] = lu(A13); [L31, U31] = lu(A31);
I13 = speye(length(A13));
A13inv = U13 \ (L13 \ I13);
A31inv = U31 \ (L31 \ I13);
% montando os blocos referentes as transformações:
Tlb = -A23 * A13inv;
Trb = -A31inv * A32;
% calculando somente a sub-matriz:
SubJ22 = (Tlb * J11 + J21) * (Trb) + (Tlb * J12 + J22);
SubM22 = (Tlb * M11 + M21) * (Trb) + (Tlb * M12 + M22);
SubM22inv = inv(SubM22);
SubMJ22 = -SubM22inv * SubJ22;
SubMJ22 = full(SubMJ22);
[Vs, Ds] = eig(SubMJ22); % calcula o problema clássico de
% autovalor.
t_EVP = toc % tempo em que o problema de autovalor generalizado
% leva para tornar-se clássico e o espectro ser obtido.
for is = 1 : length(SubMJ22)
    subg22(is, 1) = Ds(is, is);
end
% calculando o autovalor generalizado do problema nas matrizes
% originais para comparar:
Jnew = full(J);
Mnew = full(M);
tic
[Vf, Df] = eig(Jnew, -Mnew, 'qz'); % calcula o problema
% generalizado de autovalor como método QZ.
t_G EVP = toc % tempo para calcular os autovalores das matrizes
% originais:
for ifull = 1 : length(Jnew)

```

```

    gnew(ifull,1) = Df(ifull,ifull);
end
rt = tGEVP/tEVP % razão entre os tempos.

```

Os autovalores estão armazenados nos vetores **subg22** e **gnew** relativos ao problema reduzido e ao original, respectivamente. Pronto para serem salvos, usados em um gráfico, etc.

A.2

Variação do programa do método proposto para a solução do problema de autovalor generalizado vindo da análise de estabilidade de um escoamento de Couette com líquido Newtoniano.

No método proposto, transformações são identificadas com o intuito de eliminar os autovalores no infinito. Nessas transformações, inversas de dois blocos da matriz original são calculados, como mostrado na seção 3.3.1. No caso do escoamento de Couette com líquido Newtoniano e usando a formulação unidimensional, a discretização pelo método de Galerkin elementos finitos forma matrizes cujos blocos a serem invertidos podem sofrer permutações que os transformam em matrizes diagonais de inversas triviais. No código anterior, depois de tirar as condições de contorno e antes de montar os blocos, as seguintes permutações serão feitas:

```

% Criando a PERMUTAÇÃO:
pc = zeros(1,length(Jnew));
ic = 1;
for ip = 2 : 2 : (2 * NELE - 2)
    pc(ic) = ip;
    pc(ic + 1) = ip + 2 * NELE - 1;
    ic = ic + 2;
end
pc(2 * NELE - 1) = pc(2 * NELE - 3) + 1;
pc(2 * NELE) = pc(2 * NELE - 2) + 1;
icomp = 0;
icp = 0;
while(icomp < length(Jnew))
    if(pc(1 : 2 * NELE + icp) == icomp + 1)

```

```

        pc(2 * NELE + icp + 1) = icomp + 1;
        icp = icp + 1;
    end
    icomp = icomp + 1;
end
Jperm = Jnew(pc, pc);
Mperm = Mnew(pc, pc);

```

A divisão é a mesma de antes, porém alguns blocos que não eram utilizados são necessários agora.

```

% esses blocos trazem  $\sigma$  por isso tem J e M.
% E são usados se as transformações não forem usadas.
J11 = Jperm(1 : np, 1 : np);
M11 = Mperm(1 : np, 1 : np);
J12 = Jperm(1 : np, np + 1 : 2 * nu - 4);
M12 = Mperm(1 : np, np + 1 : 2 * nu - 4);
J21 = Jperm(np + 1 : 2 * nu - 4, 1 : np);
M21 = Mperm(np + 1 : 2 * nu - 4, 1 : np);
J22 = Jperm(np + 1 : 2 * nu - 4, np + 1 : 2 * nu - 4);
M22 = Mperm(np + 1 : 2 * nu - 4, np + 1 : 2 * nu - 4);
% Os que não tem  $\sigma$ :
Ap13 = Jperm(1 : np, (2 * nu) - 3 : ntp - 4);
Ap31 = Jperm((2 * nu) - 3 : ntp - 4, 1 : np);
Ap23 = Jperm(np + 1 : 2 * nu - 4, (2 * nu) - 3 : ntp - 4);
Ap32 = Jperm((2 * nu) - 3 : ntp - 4, np + 1 : 2 * nu - 4);
% inversa trivial:
for iin = 1 : np
    A13pinv(iin, iin) = 1 / Ap13(iin, iin);
    A31pinv(iin, iin) = 1 / Ap31(iin, iin);
end

```

As operações seguintes são as mesmas, apenas usando **A13pinv** e **A31pinv** no lugar de **A13inv** e **A31inv** na montagem dos blocos referentes as transformações.

A.3

Recuperação dos autovetores originais a partir do problema reduzido vindo da formulação unidimensional com líquido Newtoniano.

Nesse algoritmo, os blocos $\mathbf{A}_{13}$ e $\mathbf{A}_{31}$ foram invertidos e não permutados para se tornarem diagonais. Ele tem que estar no mesmo programa que o código para redução da matriz, pois usa as variáveis definidas nele.

```
% autovetsq é a coluna k, referente ao autovalor  $\sigma_k$ , da
matriz Vsq formada pelos autovetores calculados no problema
reduzido:
a(k) = -0.055279
b(k) = 0.95131
 $\sigma_k = a(k) + i * b(k)$ 
for iaa = 1 : 2 * nv - np - 4
    if(norm(Dsq(iaa,iaa) - (a(k) + i * b(k)))) < 10-5)
        autovalsq = Dsq(iaa,iaa)
        vetsq = iaa;
    end
end
autovetsq = (Vsq(:,vetsq))/norm(Vsq(:,vetsq));
Tr = speye(ntp - 4); % formando a matriz  $\mathbf{T}_r$  necessária para
% a recuperação do autovetor original.
Tr(1 : np, np + 1 : 2 * nu - 4) = Trb;
% as transformações não tinham sido feitas em  $\mathbf{A}_{12}$ .
A12tilda = (J11 + autovalsq * M11) * Trb + (J12 + autovalsq * M12);
autovetT1 = zeros(np,1);
autovetT2 = autovetsq;
autovetT3 = -A13inv * A12tilda * autovetT2;
autovetT = [autovetT1; autovetT2; autovetT3];
autovet = Tr * autovetT;
autovet = autovet/norm(autovet);
%colocando zero nas condições de contorno do autovetor
transformado.
autovetTfim = zeros(NDoF,1);
icv = 1;
for iv = 2 : 2 * NELE - 1
    autovetTfim(iv) = autovet(icv);
```

```

     $icv = icv + 1;$ 
end
 $autovetTfim(2 * NELE + 1) = autovet(icv);$ 
 $icv = icv + 1;$ 
for  $iv = 2 * NELE + 3 : 4 * NELE$ 
     $autovetTfim(iv) = autovet(icv);$ 
     $icv = icv + 1;$ 
end
for  $iv = 4 * NELE + 2 : NDoF$ 
     $autovetTfim(iv) = autovet(icv);$ 
     $icv = icv + 1;$ 
end
 $autovetTfim = autovetTfim / norm(autovetTfim).$ 

```

O autovetor **autovetTfim** recupera o tirado da matriz de autovetores do problema original referente ao mesmo autovalor σ_k . Fizemos um pós-processamento separando os autovetores em campos de velocidade e pressão.

B

Formulação com líquido viscoelástico

B.1

Programa do método proposto para a solução do problema de autovalor generalizado vindo da análise de estabilidade de um escoamento de Couette com líquido viscoelástico.

Vamos mostrar o programa feito em matlab sobre o problema de autovalor generalizado discutido no capítulo 6 que elimina os autovalores no infinito. O programa compara o tempo e o espectro calculado pelo método QZ das matrizes originais com o tempo de realizar as transformações e calcular o espectro nas matrizes reduzidas. As matrizes são formadas pela discretização do sistema que descreve a estabilidade do escoamento de Couette com líquido descrito pelo modelo de Maxwell pela formulação $\mathbf{T}_{\ell d}$ com o método de Galerkin/elementos finitos.

```
clear all; % para limpar a área de trabalho do matlab.
% Os parâmetros:
NELE = 200 % número de elementos,
Re = 0; % número de Reynolds,
We = 10; % número de Weissenberg
alpha = 1; % número de onda.
tic % o comando 'tic toc' fornece o tempo gasto para a
% realização da rotina.
% monta as matrizes M e J vindas dos elementos finitos. De
forma esparsa!
[M] = formMS(neta, NELE, We, Re, alpha);
[J] = formJS(neta, NELE, We, Re, alpha);
% número total de graus de liberdade:
n = NDoF = 20 * NELE + 2;
t1 = toc % t1 eh o tempo em segundos para a formação das
```

```

% matrizes.
Jve = J; % guardando as matrizes originais.
Mve = M;
tic
% retirando as linhas e colunas relativas as condições
% de contorno:
J(:, 8 * NELE + 1) = [ ];
J(8 * NELE + 1, :) = [ ];
J(:, 10 * NELE - 1) = [ ];
J(10 * NELE - 1, :) = [ ];
J(:, 10 * NELE) = [ ];
J(10 * NELE, :) = [ ];
J(:, 12 * NELE - 2) = [ ];
J(12 * NELE - 2, :) = [ ];
M(:, 8 * NELE + 1) = [ ];
M(8 * NELE + 1, :) = [ ];
M(:, 10 * NELE - 1) = [ ];
M(10 * NELE - 1, :) = [ ];
M(:, 10 * NELE) = [ ];
M(10 * NELE, :) = [ ];
M(:, 12 * NELE - 2) = [ ];
M(12 * NELE - 2, :) = [ ];
% as dimensões:
dimJ = length(J);
dimM = length(M);
dimT = 6 * NELE;
dimp = 2 * NELE;
dimu = 4 * NELE - 2; % sem condição de contorno.
dimG = 8 * NELE;
dimTpu = dimT + dimp + dimu.
% Montando a primeira transformação que vai reduzir a dimensão
% de 20NELE - 2 (sem cond. cont.) para 12NELE - 2.
%Fazer a transformação somente na matriz jacobiana, pois a
% matriz massa permanece inalterada.
%Somente os blocos envolvidos são criados.
J12 = J(1 : dimT + dimp, dimT + dimp + 1 : dimTpu);
J13 = J(1 : dimT + dimp, dimTpu + 1 : dimJ);
J32 = J(dimTpu + 1 : dimJ, dimT + dimp + 1 : dimTpu);
J33 = J(dimTpu + 1 : dimJ, dimTpu + 1 : dimJ);

```

```

% Como  $\mathbf{J}_{33} = \mathbf{D}$  é uma matriz diagonal, sua inversa é trivial.
for iin = 1 : dimG
    J33inv(iin, iin) = 1/J33(iin, iin);
end
% O bloco  $\mathbf{B}$  relevante depois da transformação  $\mathbf{T}_r$ :
Trb = -J33inv * J32;
BTrb = J12 + J13 * Trb;
J11e21 = J(1 : dimTpu, 1 : dimT + dimp);
BJ = sparse(1 : dimTpu, 1 : dimTpu, 0);
BJ(1 : dimT + dimp + dimu, 1 : dimT + dimp) = J11e21;
BJ(1 : dimT + dimp, dimT + dimp + 1 : dimTpu) = BTrb.
% Focando no bloco  $\mathbf{B}$ , já que os autovalores da matriz
% original são os mesmos:
BM = M(1 : dimTpu, 1 : dimTpu);
% Redividindo a matriz  $(4N - 2, 4N + 2, 4N - 2)$ 
dim13 = 4 * NELE - 2; % dimensões dos blocos extremos 1 e 3.
dim2 = 4 * NELE + 2; % dimensão do bloco central 2, para onde
% migram os autovalores finitos.
dimBJ = length(BJ);
BJ11 = BJ(1 : dim13, 1 : dim13);
BM11 = BM(1 : dim13, 1 : dim13);
BJ12 = BJ(1 : dim13, dim13 + 1 : dim13 + dim2);
BM12 = BM(1 : dim13, dim13 + 1 : dim13 + dim2);
BJ22 = BJ(dim13 + 1 : dim13 + dim2, dim13 + 1 : dim13 + dim2);
BM22 = BM(dim13 + 1 : dim13 + dim2, dim13 + 1 : dim13 + dim2);
BJ13 = BJ(1 : dim13, dim13 + dim2 + 1 : dimBJ);
BJ23 = BJ(dim13 + 1 : dim13 + dim2, dim13 + dim2 + 1 : dimBJ);
BJ31 = BJ(dim13 + dim2 + 1 : dimBJ, 1 : dim13);
BJ32 = BJ(dim13 + dim2 + 1 : dimBJ, dim13 + 1 : dim13 + dim2);
% as inversas dos blocos:
BJ13inv = inv(BJ13);
BJ31inv = inv(BJ31);
TTrb = -BJ31inv * BJ32;
TTlb = -BJ23 * BJ13inv;
%  $\mathbf{B}_{Mev}$  e  $\mathbf{B}_{Jev}$  são as correspondentes das
% matrizes massa e jacobiana no bloco central  $\mathbf{B}_{22}$ , de
% dimensão  $4N + 2$ 
BJev = TTlb * (BJ11 * TTrb + BJ12) + BJ22;
BMev = TTlb * (BM11 * TTrb + BM12) + BM22;

```

```
%Sendo  $M_{22} = BMe_v$  não mais singular, calcula-se sua inversa
% pra transformar o problema de autovalor generalizado em
% clássico.
 $M_i = inv(BMe_v);$ 
 $SubMiJ = -M_i * BJev;$ 
 $SubMiJ = full(SubMiJ);$ 
 $subg = eig(SubMiJ);$ 
```

O vetor formado pelos autovalores do problema reduzido **subg** foi comparado na seção 6.7 com os da matriz original, mostrando uma excelente concordância.

B.2

Recuperação dos autovetores originais a partir do problema reduzido vindo da formulação unidimensional com líquido viscoelástico.

Vamos recuperar o autovetor original a partir do reduzido. Esse código tem que estar no mesmo programa que o código para redução da matriz, pois usa as variáveis nele definidas.

```
% o autovetor autovetf e autovet22 são a coluna  $k$ , referente
ao autovalor  $\sigma_k$ , das matrizes formadas pelos autovetores
calculados no problema original e reduzido, respectivamente:
 $a(k) = -0.055279;$ 
 $b(k) = 0.95131$ 
 $\sigma_k = a(k) + i * b(k)$ 
% o autovetor do problema original:
for  $iaa = 1 : n$ 
    if( $norm(Dnew(iaa, iaa) - (a(k) + i * b(k))) < 10^{-5}$ )
         $autovalf = Dnew(iaa, iaa)$ 
         $vet1 = iaa;$ 
    end
end
 $autovetf = (Vnew(:, vet1))/norm(Vnew(:, vet1));$ 
% o autovetor do problema reduzido:
for  $iab = 1 : length(BJev)$ 
```

```

    if(norm(D22(iab,iab) - (a(1) + i * b(1))) < 10-5)
        autoval22 = D22(iab,iab)
        vet22 = iab;
    end
end
autovet22 = (V22(:,vet22))/norm(V22(:,vet22));
TTr = speye(dimBJ); % formando a matriz  $\mathbf{T}\mathbf{T}_r = \mathbf{M}_r$  necessária
% para a recuperação do autovetor original.
TTr(1:dim13,dim13+1:dim13+dim2) = TTrb;
% as transformações não tinham sido feitas em  $\mathbf{B}_{12}$ .
B12tilda = (BJ11+autoval22*BM11)*TTrb+(BJ12+autoval22*BM12);
autovetT1 = zeros(dim13,1);
autovetT2 = autovet22;
autovetT3 = -BJ13inv * B12tilda * autovetT2;
autovetT = [autovetT1;autovetT2;autovetT3];
autovet = TTr * autovetT;
autovet = autovet/norm(autovet);
c3 = zeros(dimG,1);
vet = [autovet;c3];
Tr = speye(dimJ);
Tr(1:dimT+dimp,dimT+dimp+1:dimTpu) = Trb;
c = Tr * vet;
% colocando zero nas posições referentes às condições de
% contorno do autovetor transformado.
autovetTfim = zeros(n,1);
icv = 1;
for iv = 1:8*NELE
    autovetTfim(iv) = c(icv);
    icv = icv + 1;
end
icv = icv + 1;
for iv = 8*NELE+2:10*NELE-1
    autovetTfim(iv) = c(icv);
    icv = icv + 1;
end
autovetTfim(10*NELE+1) = c(icv);
for iv = 10*NELE+3:12*NELE
    autovetTfim(iv) = c(icv);
    icv = icv + 1;
end

```

```

end
for iv = 12 * NELE + 2 : n
    autovetTfim(iv) = c(icv);
    icv = icv + 1;
end
autovetTfim = autovetTfim/norm(autovetTfim);

```

O autovetor **autovetTfim** recupera o tirado da matriz de autovetores do problema original referente ao mesmo autovalor σ_k . Fizemos um pós-processamento separando os autovetores em campos de velocidade e pressão. A seção 6.7.2 mostra a concordância obtida.