3

Germes vetoriais

3.1

Equivalências pelos grupos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{K}$

Para germes de E_s , a $\mathcal{R}$ -equivalência é natural: o contradomínio é, em um certo sentido, simples demais. Nesse capítulo, estudamos novas relações de equivalência em $(E_s)^t$, isto é, o conjunto de germes vetoriais tomando valores em $\mathbb{R}^t$. A generalização imediata é a *ação bilateral*. Considere, como no Capítulo II, os grupos de germes de difeomorfismos suaves que preservam a origem em $\mathbb{R}^s$ e $\mathbb{R}^t$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{R}^s)$ e $\mathcal{L} = \mathcal{R}(\mathbb{R}^t)$. Seja $\mathcal{RL}$ o produto dos dois grupos. A ação bilateral de $\mathcal{RL}$ em $(E_s)^t$ é dada por

$$\psi \in \mathcal{L}, \varphi \in \mathcal{R}, f \in (E_s)^t \mapsto \psi \circ f \circ \varphi^{-1}.$$

De fato, a definição acima é a de uma ação de grupo. Como sempre, elementos na mesma órbita são equivalentes, nesse caso, $\mathcal{RL}$ -equivalentes. As técnicas do primeiro capítulo, entretanto, não bastam para estudar a ação de $\mathcal{RL}$. Outras ações vão se revelar mais simples, e esse capítulo trata delas. Vamos considerar os seguintes grupos de germes de difeomorfismos por composição:

$$\mathcal{K} = \{H \in (E_{s+t})^{s+t} \mid H(x, y) = (\varphi(x), \psi(x, y)), \varphi \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^s), \psi(x, 0) = 0\},$$

$$\mathcal{C} = \{(\varphi, \psi) \in \mathcal{K} \mid \varphi = I_s\}.$$

O grupo $\mathcal{K}$ age sobre $(E_s)^t$ como

$$\begin{aligned} A : \mathcal{K} \times (E_s)^t &\rightarrow (E_s)^t \\ (H = (\varphi, \psi), f) &\mapsto g(x) = H \cdot f = \psi(\varphi^{-1}(x), f(\varphi^{-1}(x))) \end{aligned}$$

Note que, restringindo para $H \in \mathcal{C}$, obtemos uma ação de $\mathcal{C}$ sobre $(E_s)^t$. Essa vez, vale a pena mostrar que a construção acima de fato define uma ação.

Proposição 3.1: A função A é uma ação de $\mathcal{K}$ sobre $(E_s)^t$ (e, fazendo $\varphi = I_s$, a identidade em $\mathbb{R}^s$, uma ação do grupo $\mathcal{C}$).

Demonstração: Sejam: $H_1, H_2, \in \mathcal{K}$ e $g \in (E_s)^t$. Vamos nos limitar a mostrar que

$$(H_2 \circ H_1) \cdot g = H_2 \cdot (H_1 \cdot g) \text{ — lembre que } H \cdot g = \psi(\varphi^{-1}, g \circ \varphi^{-1}).$$

É fácil ver que, para $H_i = (\varphi_i, \psi_i)$, temos $H_2 \circ H_1 = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$, onde $\tilde{\varphi} = \varphi_2 \circ \varphi_1$ e $\tilde{\psi}(x, y) = \psi_2(\varphi_1(x), \psi_1(x, y))$. Temos que comparar duas expressões:

$$\begin{aligned} H_2 \cdot (H_1 \cdot g) &= H_2 \cdot \left[\psi_1(\varphi_1^{-1}, g \circ \varphi_1^{-1}) \right] = \psi_2(\varphi_2^{-1}, g \circ \varphi_2^{-1}) = \\ &= \psi_2(\varphi_2^{-1}, \psi_1(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1}, g \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1})) \quad \text{e} \\ (H_2 \circ H_1) \cdot g &= \tilde{\psi}(\tilde{\varphi}^{-1}, g \circ \tilde{\varphi}^{-1}) = \psi_2(\varphi_1 \circ \tilde{\varphi}^{-1}, \psi_1, (\tilde{\varphi}^{-1}, g \circ \tilde{\varphi}^{-1})) = \\ &= \psi_2(\varphi_2^{-1}, \psi_1(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1}, g \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1})), \end{aligned}$$

de onde concluímos que $H_2 \cdot (H_1 \cdot g) = (H_2 \circ H_1) \cdot g$ ■

É fácil ver que $\mathcal{C}$ é subgrupo normal de $\mathcal{K}$ e que cada $k \in \mathcal{K}$ se escreve de maneira única como $k = r \cdot c$ com $r \in \mathcal{R}$ e $c \in \mathcal{C}$. Assim, a $\mathcal{K}$ -órbita pode ser expressa como o conjunto alcançado pela ação conjunta dos dois grupos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{C}$. Para referência futura, convém explicitar as equivalências associadas às duas ações. Dois germes $f, g \in (E_s)^t$ são respectivamente $\mathcal{C}$ -equivalentes e $\mathcal{K}$ -equivalentes quando cumprem as seguintes condições:

$$f \stackrel{\mathcal{C}}{\sim} g \Leftrightarrow \exists H = (I_s, \psi) \in \mathcal{K} : g(x) = \psi(x, f(x)),$$

$$f \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} g \Leftrightarrow \exists H = (\varphi, \psi_x) \in \mathcal{K} : (g \circ \varphi)(x) = \psi(x, f(x)).$$

Seja $f \in (E_s)^t$. O *ideal de coordenadas* I_f do germe f é gerado pelas coordenadas $I_f = \langle f_1, \dots, f_t \rangle \subset E_s$. O teorema a seguir oferece uma caracterização algébrica para a $\mathcal{C}$ -órbita. Note que a ação de $\mathcal{C}$ pode ser interpretada como uma ação à esquerda a parâmetros.

Teorema 3.1 (Linearizando a ação à esquerda): Para $f, g \in (E_s)^t$, as seguintes afirmações são equivalentes.

- (i) Os germes f e g são $\mathcal{C}$ -equivalentes.
- (ii) Os ideais de coordenadas são iguais, $I_f = I_g$.
- (iii) Existe uma matriz $t \times t$ invertível $Q(x)$, com entradas $q_{ij}(x) \in E_s$, tal que $f(x) = Q(x) \cdot g(x)$.

Demonstração:

Começamos com (i) $\Rightarrow$ (ii).

A $\mathcal{C}$ -equivalência $f \stackrel{\mathcal{C}}{\sim} g$ é a existência de $H \in \mathcal{C}$, isto é, $H(x, y) = (x, \psi(x, y))$ com $\psi(x, 0) = 0$ tal que $(x, f(x)) = H(x, g(x)) = (x, \psi(x, g(x)))$.

Como para cada coordenada, $\psi_i(x, 0) = 0$ ($i = 1, \dots, t$), podemos aplicar (uma versão parametrizada do) o Lema de Hadamard em cada ψ_i :

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x, y) \\ \vdots \\ \psi_t(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(x, y) \cdots \alpha_{1t}(x, y) \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \alpha_{t1}(x, y) \cdots \alpha_{tt}(x, y) \end{pmatrix}_{t \times t} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix} = \alpha(x, y) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix},$$

onde $\alpha_{ij}(x, y) \in E_s$ e y_i são as coordenadas em $\mathbb{R}^t$. A parametrização, aliás, pode ser inserida sem dificuldade na demonstração do Lema de Hadamard sem parâmetros.

Como $f(x) = \psi(x, g(x))$, temos $f(x) = \alpha(x, g(x))g(x)$, mostrando que $I_f \subseteq I_g$. Simetricamente, $I_g \subseteq I_f$.

Agora, vamos ver (ii) $\Rightarrow$ (iii). A igualdade $I_f = I_g$ implica a existência de matrizes $t \times t$ A e B relacionando os geradores dos dois ideais, $f = Bg$ e $g = Af$. Falta ver que, a partir disso, existe uma matriz *invertível* Q tal que $f = Qg$. Note que $(I - AB)g = 0$, logo basta encontrar uma matriz C para a qual $Q = C(I - AB) + B$ seja invertível.

Afirmação: Sejam A, B matrizes reais $t \times t$. Então existe C tal que a matriz $Q = [C(I - AB) + B]$ é invertível.

Para ver isso, sejam $a, b : \mathbb{R}^t \rightarrow \mathbb{R}^t$ as aplicações lineares correspondentes respectivamente às matrizes A e B em relação à base usual. Escolha uma base $\{e_1, \dots, e_t\}$ de $\mathbb{R}^t$ tal que $b(e_i) = 0$ para $r + 1 \leq i \leq t$, onde r é o posto de B . É fácil ver que $b(e_1), \dots, b(e_r)$ são linearmente independentes e formam um conjunto que pode ser completado a uma base do contradomínio $\{b(e_1), \dots, b(e_r); e'_{r+1}, \dots, e'_t\}$.

Seja $c : \mathbb{R}^t \rightarrow \mathbb{R}^t$ definida por $c(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } 1 \leq i \leq r \\ e'_i & \text{se } r + 1 \leq i \leq t \end{cases}$

A aplicação linear $q = c(1 - ab) + b$ tem duas propriedades que a tornam invertível. Sobre os vetores no núcleo de b , q age injetivamente, preenchendo um subespaço complementar à imagem de b . Por outro lado, sobre os vetores que geram injetivamente a imagem de b , u age como a própria b , a menos de uma perturbação que pertence à imagem de c . De forma simbólica, existem escalares α_{ij} para os quais

$$q(e_i) = \begin{cases} b(e_i) + \sum_{j=r+1}^t \alpha_{ij} e'_j & \text{se } 1 \leq i \leq r, \\ e'_i & \text{se } r + 1 \leq i \leq t. \end{cases}$$

A matriz Q associada à transformação q é a matriz procurada.

Para completar a demonstração de (ii) $\Rightarrow$ (iii), basta aplicar a afirmação acima para as matrizes $A(0)$ e $B(0)$ relacionando as coordenadas de f e as de g no ponto $x = 0$, obtendo uma matriz C . Agora, defina $Q(x) = C[I - A(x)B(x)] + B(x)$, invertível em $x = 0$, e, por continuidade, ainda invertível para x pequenos, que é o que basta quando tratamos de germes. Por construção, $f(x) = Q(x)g(x)$.

Finalmente, vejamos (iii) $\Rightarrow$ (i). Considere $H(x, y) = (x, Q(x)y)$. Certamente, $Q(x)0 = 0$. Falta ver que H é um germe de difeomorfismo na origem. Derivando, $DH(0,0)(r, s) = (r, Q(0)s)$, e como $Q(0)$ é invertível, $DH(0,0)$ é invertível. Pelo Teorema da Função Inversa, H é um difeomorfismo local em zero. ■

Os resultados acima implicam numa caracterização simples da $\mathcal{K}$ -equivalência.

Proposição 3.2:

Sejam $f, g \in (E_s)^t$. Então $f \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} g$ se e somente se $\exists \varphi \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^s) : I_{f \circ \varphi} = I_g$.

Demonstração: Por definição, $f \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} g$ quer dizer $\exists \varphi \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^s) : (f \circ \varphi) \stackrel{\mathcal{C}}{\sim} g$. Agora é só aplicar (ii) do teorema anterior. ■

Vamos considerar alguns exemplos simples. Sejam $f, g \in (E_2)^2$ dados por $f(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$ e $g(x, y) = (x^2, y^2)$. Vamos ver que $f \stackrel{\mathcal{RL}}{\sim} g$ e $f \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} g$ mas $f \stackrel{\mathcal{C}}{\sim} g$ é falso.

De fato, sejam $\varphi(x, y) = (x + y, x - y)$ e $\psi(x, y) = (2x + 2y, x - y)$, com jacobianos na origem dados por

$$D\varphi(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } D\psi(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ambos os jacobianos são invertíveis em $(0,0)$ e portanto pelo Teorema da Função Inversa ψ e φ induzem germes de difeomorfismos. Para mostrar que $f \stackrel{\mathcal{RL}}{\sim} g$, é só verificar se $(f \circ \varphi)(x, y) = (\psi \circ g)(x, y)$, uma conta simples.

Temos também que $f \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} g$, como veremos explicitamente. Uma rotação anti-horária de $\pi/4$ no domínio de f (isto é, uma composição à direita), transforma g no germe $\mathcal{C}$ -equivalente $\tilde{g}(x, y) = (x^2 + y^2, (x^2 - y^2)/2)$. A transformação $T(x, y) = (x, y - x/2)$ no contradomínio de $\tilde{g}$ recupera f : $f = T \circ \tilde{g}$, e assim f e g são $\mathcal{K}$ -equivalentes.

Finalmente, $f \stackrel{\mathcal{C}}{\sim} g$ se e somente se

$$I_f = \langle f_1(x, y), f_2(x, y) \rangle = \langle x^2 + y^2, xy \rangle = I_g = \langle g_1(x, y), g_2(x, y) \rangle = \langle x^2, y^2 \rangle.$$

Mas xy não pertence ao ideal $\langle x^2, y^2 \rangle$. De fato, ao derivar em x e y , uma igualdade da forma $xy = \alpha(x, y)x^2 + \beta(x, y)y^2$ implicaria na função constante 1 do lado esquerdo e uma função do lado direito que se anula na origem.

Sejam agora $f, g \in (E_2)^2$ dados por $f(x, y) = (x^2, 0)$ e $g(x, y) = (x^2, x^3)$. Pelo Teorema 3.1(ii), os dois germes são $\mathcal{C}$ -equivalentes. Vamos ver que, entretanto,

eles não são $\mathcal{RL}$ -equivalentes. Note que as imagens de f e g são respectivamente o semi-eixo positivo horizontal e a cúbica (x^2, x^3) . A remoção da origem das duas imagens dá origem a subconjuntos topologicamente diferentes perto da origem, o que não aconteceria se os dois germes fossem $\mathcal{RL}$ -equivalentes.

Resumindo, tanto a equivalência por $\mathcal{C}$ quanto por $\mathcal{RL}$ implicam a equivalência por $\mathcal{K}$, mas as implicações opostas não são necessariamente verdadeiras.

3.2

A k -determinação por $\mathcal{K}$ -equivalência:

Assim como já estudamos o espaço tangente à órbita pela ação de $\mathcal{R}(\mathbb{R}^s)$ em E_s , passamos a considerar espaços tangentes da ação por $\mathcal{K}$. Começamos pela definição, e depois, derivando uma curva numa $\mathcal{K}$ -órbita, vamos nos convencer de sua adequação.

O espaço tangente T_f^K à $\mathcal{K}$ -órbita de $f \in (E_s)^t$ é o E_s -módulo $T_f^K = \bar{J}_f + \bar{I}_f$, onde

$$\bar{J}_f = \{f_x(x)\alpha : \alpha \in E_s\},$$

$$\bar{I}_f = I_f(E_s)^t = \{\beta f^T : \beta \text{ matriz } t \times t, \beta_{i,j} \in E_s; f^T = (f_1, \dots, f_t)^T\}.$$

Como sempre, f_x é a matriz jacobiana $t \times s$ que tem por linhas os gradientes das coordenadas f_i . O ideal $\bar{J}_f$ é uma versão vetorial natural do ideal jacobiano. Já $\bar{I}_f$ é o ideal de germes em $(E_s)^t$ onde cada coordenada é uma combinação linear, com coeficientes dados por elementos de E_s , das funções coordenadas f_i .

Vamos ver que T_f^K de fato é o conjunto de todos os vetores tangentes a curvas na $\mathcal{K}$ -órbita passando por f . Considere a curva $\psi(\varphi(x, u), f(\varphi(x, u)), u)$, parametrizada por $u \in \mathbb{R}$, onde $\varphi(\cdot, u)$ é uma curva em $\mathcal{R}(\mathbb{R}^s)$ com $\varphi(\cdot, 0) = I_s$ e $\psi(x, y, u)$ é uma família parametrizada por (x, u) em $\mathcal{R}(\mathbb{R}^t)$, com $\psi(x, \cdot, 0) = I_t$ e $\psi(x, 0, u) = 0$. Derivando a curva em u , obtemos

$$\psi_x(\varphi, f(\varphi), u)\varphi_u + \psi_y(\varphi, f(\varphi), u)f_x(\varphi)\varphi_u + \psi_u(\varphi, f(\varphi), u),$$

onde φ e φ_u são sempre avaliados no ponto (x, u) e, que, para $u = 0$, vale

$$\begin{aligned} & \psi_x(x, f(x), 0)\varphi_u(x, 0) + \psi_y(x, f(x), 0)f_x(x)\varphi_u(x, 0) + \psi_u(x, f(x), 0) \\ & = f_x(x)\varphi_u(x, 0) + \psi_u(x, f(x), 0), \end{aligned}$$

já que $\psi_x(x, f(x), 0) = 0$ e $\psi_y(x, f(x), 0) = I_t$. A parcela $f_x(x)\varphi_u(x, 0)$ corresponde a $\bar{J}_f$. Para (x, u) fixos, cada coordenada de $\psi_u(x, y, 0)$ está em M_t , logo, por Hadamard na segunda variável, $\psi_u(x, f(x), 0) \in \bar{I}_f$. Mais precisamente, $\psi_u(x, y, 0) = \sum_i \alpha_i(x, y, 0)y_i$, logo $\psi_u(x, f(x), 0) = \sum_i \alpha_i(x, f(x), 0)f_i(x)$, e, por mais degenerado que seja o germe f na origem, as funções $e_i(x) = \alpha_i(x, f(x), 0)$ podem ser arbitrárias. Mais uma vez, não há restrições sobre os coeficientes: todo elemento de T_f^K é vetor tangente de alguma curva.

A $\mathcal{RL}$ -equivalência não admite cálculos tão simples. Uma curva $\psi(f(\varphi(x, u)), u)$ implicaria num vetor tangente $f_x(x)\varphi_u(x, 0) + \psi_u(f(x), 0)$: a primeira parcela recebe o mesmo tratamento do parágrafo anterior, mas a segunda, ao ser expandida pelo lema de Hadamard, não dá origem a funções $e_i = \alpha_i(f(x), 0)$ arbitrárias, já que teriam que ser constantes em níveis de f . Essa é a dificuldade essencial ao lidar com $\mathcal{RL}$ -equivalência.

Vamos ver um exemplo simples. Seja $f(x, y) = (f_1, f_2) = (x^2 + y^2, x^2y)$. Vamos calcular T_f^K . Os geradores do submódulo jacobiano $\bar{J}_f$ são os vetores

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) = (2x, 2xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) = (2y, x^2),$$

que devem ser multiplicados por coeficientes em E_2 . Os geradores de $\bar{I}_f$ são os vetores $\{(f_1, 0), (0, f_1), (f_2, 0), (0, f_2)\}$. Assim,

$$T_f^K = \{(x, xy), (2y, x^2), (x^2 + y^2, 0), (0, x^2 + y^2), (x^2y, 0), (0, x^2y)\} \cdot E_2.$$

Como no primeiro capítulo, agora é possível demonstrar uma condição suficiente para k -determinação por $\mathcal{K}$ -equivalência.

Teorema 3.2 (k -determinação por $\mathcal{K}$ -equivalência): Seja $f \in M_{s,t}$ satisfazendo $M_{s,t}^k \subseteq M_s T_f^K$. Então f é k -determinado por $\mathcal{K}$ -equivalência.

Demonstração: A demonstração segue a do Teorema 1.1. Suponha f satisfazendo as hipóteses, tome uma perturbação arbitrária $p \in M_{s,t}^{k+1}$ e considere o segmento $F(x, u) = f(x) + up(x)$, $u \in [0, 1]$, ligando f a $f+p$. Basta mostrar que germes suficientemente próximos no segmento são $\mathcal{K}$ -equivalentes. Isso implica o resultado geral, como antes, por um argumento combinando compacidade e conexidade, que não será repetido. Começamos pelos ingredientes algébricos. Para $u_0 \in [0, 1]$ fixo, defina $F(x, u_0) = \tilde{f} = f + u_0p$.

Afirmção 1: $T_f^K = T_{\tilde{f}}^K$.

(i) $T_{\tilde{f}}^K \subseteq T_f^K$. Como $p \in M_{s,t}^{k+1}$, $T_{\tilde{f}}^K \subseteq T_f^K + M_{s,t}^{k+1}$, que obviamente está contido em $T_f^K + M_{s,t}^k$. Pela hipótese do teorema, $T_f^K + M_{s,t}^k \subseteq T_f^K + M_s T_f^K = T_f^K$.

(ii) $T_f^K \subseteq T_{\tilde{f}}^K$.

O elemento típico de $T_f^K = \bar{J}_f + \bar{I}_f$ é da forma $f_x\alpha + \beta f$, que pode ser escrito como $\tilde{f}_x\alpha + \beta\tilde{f} - u_0p_x\alpha - u_0\beta p$, onde $\alpha_i, \beta_{ij} \in E_s$, para $i, j = 1, \dots, p$. Assim, $T_f^K \subseteq \bar{J}_{\tilde{f}} + \bar{I}_{\tilde{f}} + M_{s,t}^k + M_{s,t}^{k+1} = \bar{J}_{\tilde{f}} + \bar{I}_{\tilde{f}} + M_{s,t}^k$.

Da hipótese do teorema, então, $T_f^K \subseteq T_{\tilde{f}}^K + M_s T_f^K$, logo, pelo Lema de Nakayama,

$$T_f^K \subseteq T_{\tilde{f}}^K.$$

O passo seguinte é um pouco diferente de sua contrapartida no Teorema 1.1.

Afirmção 2: $p = F_u \in M_s T_F^K E_{s+1}$ (u é a variável indexada por $s+1$).

Observe que $M_s T_F^K = M_s T_{f+up}^K$. Temos então

$$p = F_u \in M_{s,t}^{k+1} \subseteq M_{s,t}^k \subseteq M_s T_{\tilde{f}}^K, \text{ por hipótese.}$$

Da relação $F - \tilde{f} = up$, obtemos $\bar{I}_{\tilde{f}} \subseteq \bar{I}_F + M_{s+1} M_{s,t}^{k+1}$ e, de $F_x - \tilde{f}_x = up_x$, $\bar{J}_{\tilde{f}} \subseteq \bar{J}_F + M_{s+1} M_{s,t}^k$.

Assim, $T_{\tilde{f}}^K = \bar{J}_{\tilde{f}} + \bar{I}_{\tilde{f}} \subseteq \bar{J}_F + \bar{I}_F + M_{s+1} M_{s,t}^k = T_F^K + M_{s+1} M_{s,t}^k$, e obtemos, pela Afirmção 1,

$$p \in M_{s,t}^{k+1} \subseteq M_s T_{\tilde{f}}^K \subseteq M_{s,t}^k \subseteq M_s \left(T_F^K + M_{s+1} M_{s,t}^k \right) = M_s T_F^K + M_{s+1} M_{s,t}^{k+1}.$$

Aplicando Nakayama com $A = M_s^{k+1}$, $B = M_s T_F^K$ e $M = M_{s+1}$,

$$F_u \in M_s T_F^K E_{s+1}.$$

Voltamos à demonstração do teorema. Pela caracterização de $\mathcal{K}$ -equivalência dada na proposição acima e o Teorema 3.1, devemos procurar uma curva de difeomorfismos $\varphi(\cdot, u) \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ e uma curva de matrizes invertíveis $Q(x, u)$ para as quais $F(\varphi(x, u), u) = Q(x, u)F(x, u_0)$.

As duas curvas serão obtidas a partir de equações diferenciais. Para $u = u_0$, precisamos ter $\varphi(x, u_0) = x$, $Q(x, u_0) = I$.

Derivando $Q^{-1}(x, u)F(\varphi(x, u), u) = F(x, u_0)$ na variável u , obtemos

$$(Q^{-1})_u(x, u)F(Q^{-1})_u + Q^{-1}(x, u)((F_x)(\varphi, u)\varphi_u + F_u(\varphi, u)) = 0,$$

onde tanto φ quanto φ_u estão sempre avaliados em (x, u) . Para derivar a inversa de Q , começamos por $Q^{-1}(x, u)Q(x, u) = I$, que dá

$$(Q^{-1})_u(x, u) = -Q^{-1}(x, u)Q_u(x, u)Q^{-1}(x, u).$$

Depois de uma simplificação óbvia, a equação diferencial se torna

$$-Q_u(x, u)Q^{-1}(x, u)F(\varphi, u) + (F_x)(\varphi, u)\varphi_u + F_u(\varphi, u) = 0.$$

Agora, usamos a informação algébrica. Pela Afirmação 2, $p = F_u \in M_s T_F^K E_{s+1}$, logo existem α e β tais que $p = F_x \alpha + \beta F$. Mais precisamente, temos

$$F_u(\varphi, u) = p(\varphi, u) = F_x(\varphi, u)\alpha(\varphi, u) + \beta(\varphi, u)F(\varphi, u),$$

onde as coordenadas do vetor α estão em M_s e β é uma matriz $t \times t$. Substituindo na equação diferencial e agrupando adequadamente,

$$(-Q_u(x, u)Q^{-1}(x, u) + \beta(\varphi, u))F(\varphi, u) + (F_x)(\varphi, u)(\varphi_u + \alpha(\varphi, u)) = 0,$$

e a igualdade se verifica se exigirmos

$$Q_u(x, u) = \beta(\varphi(x, u), u)Q(x, u), \quad \varphi_u(x, u) = -\alpha(\varphi(x, u), u).$$

Com as condições iniciais prescritas acima para $u = u_0$, as equações diferenciais satisfazem as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade para EDO's. Falta ver que $\varphi(0, u) = 0$, que, como no primeiro capítulo, segue da unicidade da solução, combinado com o fato que $\alpha(0, u) = 0$. ■

Assim como para o Teorema 2.1, existem hipóteses mais fracas para o Teorema 3.2 que são de verificação mais simples. Por exemplo, um germe $f \in M_{s,t}$ tal que $M_{s,t}^k \subseteq T_f^K$ é $(k+1)$ -determinado por $\mathcal{K}$ -equivalência. O próprio Teorema 2.1 é um caso particular da demonstração do Teorema 3.2, como se vê pelo enunciado abaixo.

Corolário: Seja $f \in M_{s,t}$ tal que $M_{s,t}^k \subseteq M_s \bar{J}_f \Rightarrow f$ é k -determinado por $\mathcal{R}$ -equivalência.

Vamos mostrar que $f(x, y) = (x^2, y^2)$ é 2-determinado por $\mathcal{K}$ -equivalência. É fácil ver que $T_f^K = \{(x, 0), (0, y), (y^2, 0), (0, x^2)\}$. Daí, é claro que

$$M_{2,2}^2 = \langle (x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), (0, x^2), (0, xy), (0, y^2) \rangle \cdot E_2 \subseteq M_s T_f^K.$$

Terminamos a seção com duas aplicações. A $\mathcal{K}$ -codimensão de $f \in (E_s)^t$ é a dimensão do espaço vetorial (quociente) $\frac{(E_s)^t}{T_f^K}$.

Proposição 3.3: Um germe de $\mathcal{K}$ -codimensão finita é $\mathcal{K}$ -finitamente determinado.

Demonstração:

É só ver que se f tem $\mathcal{K}$ -codimensão finita então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $M_{s,t}^k \subseteq T_f^K$, o que implica que f é $(k+1)$ -determinado por $\mathcal{K}$ -equivalência. Considere a

sequência decrescente de E_s -módulos:

$$(E_s)^t \supset T_f^K + M_{s,t} \supset \cdots \supset T_f^K + M_{s,t}^k \supset T_f^K + M_{s,t}^{k+1} \supset \cdots$$

A hipótese de $\mathcal{K}$ -dimensão finita implica que a sequência estabiliza a partir de um certo k , $T_f^K + M_{s,t}^k = T_f^K + M_{s,t}^{k+1}$. Então $M_{s,t}^k \subseteq T_f^K + M_s M_{s,t}^k = T_f^K + M_{s,t}^{k+1}$, que, por Nakayama, dá $M_{s,t}^k \subseteq T_f^K$ e pelo Teorema 3.2 f é $(k+1)$ -determinado por $\mathcal{K}$ -equivalência.

Finalmente, vamos retomar a forma local das submersões em seu caso geral.

Proposição 3.4 (Forma local das submersões em $(E_s)^t$): Para $f \in M_{s,t}$ com $f_x(0)$ sobrejetor, existe $\varphi \in \mathcal{R}$ tal que $f \circ \varphi(x) = (x_1, \dots, x_t)$. Em outras palavras, localmente f se comporta como uma projeção.

Demonstração: Vamos usar o corolário do Teorema 3.2. A 1-determinação por $\mathcal{R}$ -equivalência segue de $M_s \subseteq M_s J_f$. Por hipótese, um subconjunto apropriado das colunas de $f_x(0)$ gera $\mathbb{R}^t$, e, por continuidade, para o mesmo subconjunto de colunas de $f_x(x)$ o mesmo ainda vale para x suficientemente pequeno. Assim, podemos escrever os vetores $\{e_1, \dots, e_t\}$ da base canônica de $\mathbb{R}^t$ como

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha_{11}(x) \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x) + \cdots + \alpha_{1t}(x) \frac{\partial f}{\partial x_{i_t}}(x) \\ &\vdots \\ e_t &= \alpha_{t1}(x) \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x) + \cdots + \alpha_{tt}(x) \frac{\partial f}{\partial x_{i_t}}(x) \end{aligned}$$

ou, em linguagem matricial, $I_d^t = \alpha(x) \cdot D_f(x)$. Assim, $\bar{J}_f = (E_s)^t$ e obtemos $M_{s,t} = M_s \bar{J}_f$.

Agora, é questão de alterar o domínio do 1-jato de f por uma transformação linear de modo a obter a representação habitual em termos de vetores canônicos, seguindo a composição à direita construída na demonstração da forma local das submersões em M_s no capítulo 1. ■

É importante notar que qualquer conjunto de variáveis do domínio que seja associado a uma base de colunas independentes do jacobiano $f_x(0)$ pode ser empregado na descrição da forma normal da submersão.