

4

Dobras e cúspides: limites da teoria

4.1

Perturbações e desdobramentos

Nesse capítulo, voltamos a considerar a $\mathcal{RL}$ -equivalência, para situações especiais. Como veremos, para elaborar a Teoria de Mather em sua plenitude, é necessária a inclusão de ferramentas substanciais.

Sejam $u \in \mathbb{R}^p$, $x \in \mathbb{R}^s$. Seja $f_0 \in M_{s,t}$. Então o conjunto das *perturbações* f do *germe* f_0 é

$$P^p(f_0) = \left\{ f : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, 0) \mid f(0, x) = f_0(x) \right\}$$

e o conjunto dos *desdobramentos* F de f_0 é

$$D^p(f_0) = \left\{ F : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t, 0) \mid F(u, x) = (u, f(u, x)); f(0, x) = f_0(x) \right\}.$$

Assim, $f \in P^p(f_0)$ e $F \in D^p(f_0)$ são germes, respectivamente, de uma p -perturbação e de um p -desdobramento de f_0 .

Perturbações são famílias a vários parâmetros (as variáveis em $\mathbb{R}^p$) de uma função recuperada ao fazer todos os parâmetros iguais a zero. Vamos ver um exemplo simples do emprego dessa idéia.

Lema 4.1 (Forma Local das Submersões Parametrizada): Seja $f_0 \in (E_s)^t$ submersão em 0 e $f \in P^p(f_0)$, dado por $(u, x) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s$. Considere t vetores da base canônica, associados a variáveis no domínio cujas derivadas parciais são colunas independentes na jacobiana $D_x f_0(0)$. Seja V o subespaço gerado por esses vetores. Então é possível reduzir f à forma normal de uma submersão igual à identidade em V , por uma troca de variáveis em V que depende suavemente das variáveis restantes (em particular, dos parâmetros).

Demonstração: As t colunas de $D_x f_0(0)$ associadas a V também estão na jacobiana $D_{u,x} f(0, 0)$ da perturbação f . Assim f também é uma submersão, que tem forma normal dada pela identidade quando restrita a V , obtida por uma troca de variáveis $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^{p+s})$. Então $f(u, x) = \pi \varphi_2(u, x)$,

onde π é a projeção ortogonal sobre V . Daí, é fácil ver que $\varphi_2(0, \cdot) \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^s)$ o que se mantém para $\varphi_2(u, \cdot)$, com u próximos de zero. ■.

As equivalências entre desdobramentos acompanham as definições correspondentes para germes, levando em conta o parâmetro do desdobramento. Assim, a $\mathcal{RL}$ -equivalência entre desdobramentos $F_1, F_2 \in D^p(f_0)$ de mesma dimensão p de um mesmo germe f_0 implica na existência de conjugações no domínio e contradomínio por difeomorfismos em $\mathcal{R}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s)$ e $\mathcal{R}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t)$ respectivamente que dependem trivialmente do parâmetro. Mais precisamente,

$$F_1 \stackrel{\mathcal{RL}}{\sim} F_2 \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \exists \Phi_s, \Phi_t \text{ desdobramentos da identidade : } F_1 \circ \Phi_s = \Phi_t \circ F_2,$$

onde os desdobramentos da identidade $\Phi_s \in M_{p+s, p+s}$ e $\Phi_t \in M_{p+t, p+t}$ satisfazem $\Phi_s(u, x) = (u, \phi_s(u, x))$, com $\phi_s(0, x) = x$ e $\Phi_t(u, y) = (u, \phi_t(u, y))$, com $\phi_t(0, y) = y$.

Vamos ver um exemplo relativamente simples. Dado $f_0(x) = x^2 \in M_1$, considere o desdobramento constante $F_1(u, x) = (u, x^2)$ e o desdobramento $F_2(u, x) = (u, x^2 + ux)$.

Tomando as deformações da identidade $\Phi_1(u, x) = (u, x + u/2)$ e $\Phi_2(u, x) = (u, y + u^2/4)$, vê-se que F_1 e F_2 são $\mathcal{RL}$ -equivalentes.

O posto r de um germe é o posto de sua jacobiana na origem. Um germe f é *submersivo* quando seu posto é igual à dimensão do contradomínio. Para um germe f submersivo, o nível zero, denotado por V_f , é uma subvariedade passando pela origem, pela Forma Local das Submersões.

É frequente considerar germes $f_0 \in (E_s)^t$ de posto 0. Se o germe tem posto positivo, o processo descrito na proposição seguinte — a decomposição de Lyapunov-Schmidt — permite reduzir o estudo de sua forma normal para um germe de posto 0 tomando valores num espaço de dimensão mais baixa.

Proposição 4.1 (Decomposição de Lyapunov-Schmidt): Seja $F \in (E_S)^T$ de posto p . Então F é $\mathcal{RL}$ -equivalente a um desdobramento $f \in D^p(f_0)$ de um germe $f_0 \in (E_{S-p})^{T-p}$ de posto nulo. Mais explicitamente, existem trocas de variável em torno da origem no domínio e contradomínio para as quais $\phi \circ F \circ \psi^{-1} = (I, f)$, onde as derivadas na origem de f nas últimas $S - p$ variáveis é nulo.

Demonstração: O argumento, tradicional, decompõe o domínio em dois subespaços complementares, $\mathbb{R}^S = U \oplus V$, onde V é o núcleo da jacobiana $DF(0)$ e U é um complemento arbitrário. O contradomínio, por sua vez, decompõe em $Z \oplus W$, onde Z é a imagem de $DF(0)$ e W é um complemento arbitrário. As decomposições induzem projeções naturais $\pi_U : \mathbb{R}^S \rightarrow U$,

$\pi_V : \mathbb{R}^S \rightarrow V$, $\pi_Z : \mathbb{R}^T \rightarrow Z$ e $\pi_W : \mathbb{R}^T \rightarrow W$. A própria função F se escreve agora como $F(u, v) = (\pi_Z F(u, v), \pi_W F(u, v))$, numa notação natural (mais precisamente, $x \in \mathbb{R}^S$ decompõe de forma única, $x = u + v$, para $u = \pi_U x, v = \pi_V x$).

Fazendo composições com isomorfismos lineares no domínio e contradomínio, podemos supor sem perda que $U = \mathbb{R}^p$, $V = \mathbb{R}^{S-p}$, $Z = \mathbb{R}^p$ e $W = \mathbb{R}^{T-p}$. Por construção, a restrição de $DF(0)$ é um isomorfismo linear entre U e Z , logo $F_1 = \pi_Z \circ F : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{S-p} \rightarrow \mathbb{R}^p$ é uma submersão.

Assim, compondo com uma troca de variáveis no domínio, podemos supor $F_1(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_S) = (x_1, \dots, x_p)$.

A troca de variáveis pode ter alterado as coordenadas restantes, $F_2 = \pi_Z \circ F$, mas as derivadas na origem dessas coordenadas nas variáveis $x_{p+1}, \dots, x_S$ têm que ser nulas, se não o posto de $DF(0)$ seria maior do que p . A demonstração está completa: considere o germe $f_0(x_{p+1}, \dots, x_S) = F_2(0, x_{p+1}, \dots, x_S)$, de posto nulo, e sua perturbação $f(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_S) = (x_1, \dots, x_p, F_2(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_S))$. ■

Considere o estudo dos níveis de uma função $F : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^T$ perto da origem. As trocas de variáveis na decomposição de Lyapunov-Schmidt reduzem o problema ao estudo dos níveis de uma função f mais simples, ou melhor, ao estudo de uma família de funções — uma perturbação de um germe f_0 de posto nulo — parametrizadas pelas variáveis $x_1, \dots, x_p$. Equações da forma $f(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_S) = b \in \mathbb{R}^{T-p}$ são chamadas de *equações de bifurcação* em Matemática Aplicada. Como exemplo simples, considere um germe $\tilde{F}$ de $M_{2,2}$ de posto 1. Então, $\tilde{F}$ é $\mathcal{RL}$ -equivalente à função $F(x, y) = (x, f(x, y))$, onde $f(0, y)$ tem 1-jato nulo.

4.2

Dobras

Considere o germe $\tilde{F} \in M_{2,2}$ de posto 1, dotado dos seguintes propriedades geométricas. Vamos supor que o determinante da jacobiana $D\tilde{F}(x, y)$ tem 0 por valor regular, o que assegura que o conjunto crítico $\tilde{C}$ de $\tilde{F}$ é uma curva regular pela origem. Vamos supor também que o núcleo de $D\tilde{F}(0, 0)$ não seja tangente a $\tilde{C}$ na origem. Um germe que satisfaz essas condições é chamado de *dobra*.

Pelo resultado do final da seção anterior, $\tilde{F}$ é $\mathcal{RL}$ -equivalente ao germe $F(x, y) = (x, f(x, y))$, onde $f(0, y)$ tem 1-jato nulo. As duas propriedades geométricas foram formuladas de maneira invariante, e justamente por isso,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & y & & \\
 & x & y & & \\
 & x^2 & xy & y^2 & \\
 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \\
 & x^4 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & y^4 \\
 x^5 & x^4y & x^3y^2 & x^2y^3 & xy^4 & y^5
 \end{array}$$

Agora, é claro o que fazer.

Escreva, por Hadamard, $g(x, y) = m(x) + y^2(c + n(x, y))$, para $m, n \in M$. Suponha c positivo. Troque de variável no domínio novamente: defina $\varphi(x, y) = (x, y(c + n(x, y))^{1/2})$, e componha, $H = G \circ \varphi^{-1}$. Mais uma vez, φ tem jacobiana invertível na origem, logo é um difeomorfismo local e agora $H(x, y) = (x, m(x) + y^2)$. Finalmente, componha com $(x, y) \mapsto (x, y - m(x))$ no contradomínio para finalmente alcançar a forma normal da dobra. Como as únicas operações envolvidas foram composições com germes de difeomorfismos à direita e à esquerda, é claro que $\tilde{F}$ é $\mathcal{RL}$ -equivalente a $\hat{F}$. ■

4.3

Algumas dificuldades: a cúspide

Como vimos, tratar de $\mathcal{RL}$ -equivalência é mais difícil. A Teoria de Mather contém resultados muito efetivos mesmo para essa situação, mas o conjunto de idéias necessário é completamente diferente. Para sugerir algumas dificuldades no processo, vamos considerar a teoria local da *cúspide*.

Existe uma descrição invariante da cúspide, que não nos interessa agora [5]. Em vez disso, vamos supor que foram realizadas sobre esta formulação invariante as simplificações resultantes da aplicação da Decomposição de Lyapunov-Schmidt (Proposição 4.1). Assim, obtemos germes $\mathcal{RL}$ -equivalentes ao germe original, da forma $\tilde{F}(x, y) = (x, y^3(1 + n(x, y)) - xy(1 + m(x, y)))$, para $m, n \in M_2$. Um resultado importante da teoria seria uma técnica que permitisse mostrar que esse germe é $\mathcal{RL}$ -equivalente à forma normal $\hat{F}(x, y) = (x, y^3 - xy)$, um teorema obtido por Whitney [5] por argumentos estritamente geométricos.

Seguindo os passos do estudo da determinação por $\mathcal{K}$ -equivalência no Capítulo 3, um procedimento natural seria unir $\hat{F}$ a $\tilde{F}$ por um segmento e mostrar a $\mathcal{RL}$ -equivalência localmente ao longo do segmento. Em particular, germes próximos a $\hat{F}$ no segmento devem ser $\mathcal{RL}$ -equivalentes, o que sugere que curvas passando por $\hat{F}$ na $\mathcal{RL}$ -órbita devem admitir como vetor tangente em $\hat{F}$ o vetor dado pela perturbação $(0, y^3 n(x, y) - xy m(x, y))$.

Como já vimos ao definir T_f^K para um germe $f \in (E_s)^t$, podemos, por analogia, considerar os vetores tangentes associados à $\mathcal{RL}$ -equivalência da forma $f_x(x)\varphi_u(x, 0) + \psi_u(f(x), 0)$, onde u é o parâmetro unidimensional que deforma as trocas de variáveis $\varphi(\cdot, u) \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^s)$ e $\psi(\cdot, u) \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^t)$ ao longo do segmento. Além disso, queremos $\varphi(0, u) = 0$ e $\psi(0, u) = 0$. Para adequar o vetor tangente geral a $\hat{F}$, fazemos $u = 0$ e usamos (x, y) para denotar as

coordenadas do domínio. Estamos procurando $\varphi_u(x, y) = (\alpha_1(x, y), \alpha_2(x, y))$, $\psi_u(\hat{F}(x, y), 0) = (\beta_1(\hat{F}(x, y)), \beta_2(\hat{F}(x, y)))$, com $\alpha_i, \beta_i \in M_2$ que satisfaçam a equação

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y & 3y^2 - x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1(x, y) \\ \alpha_2(x, y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1(x, y^3 - xy) \\ \beta_2(x, y^3 - xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y^3 n(x, y) - xy m(x, y) \end{pmatrix}.$$

Note que, para que as trocas de variáveis mantenham fixa a origem, precisamos ter tanto α_i quanto β_i em M_2 . Para fazer com que a igualdade da primeira coordenada valha, basta tomar $\alpha_1 = \beta_1 = 0$: o fato que existe uma solução desse tipo indica a possibilidade de realizar uma $\mathcal{RL}$ -equivalência para a forma normal mantendo fixa a variável x . A igualdade da segunda coordenada é muito mais interessante:

$$(3y^2 - x)\alpha_2(x, y) + \beta_2(x, y^3 - xy) = y^3 n(x, y) - xy m(x, y).$$

Para lidar com o fato que α_2 e β_2 agem sobre variáveis diferentes, vamos imaginar, para simplificar, que todas as funções envolvidas sejam reais analíticas. Então, por exemplo, escolher $\beta_2(x, y^3 - xy)$ é escolher uma combinação linear (infinita, talvez) de monômios da forma $x^k(y^3 - xy)^\ell$. Essa atitude ingênua indica que, no lado esquerdo da equação, estamos falando de um espaço vetorial A (a menos de questões de finitude das somas) gerado pelos monômios $(3y^2 - x)x^k y^\ell, x^k(y^3 - xy)^\ell$, e o lado direito é o espaço vetorial B gerado por $y^3 x^k y^\ell, xy x^k y^\ell$, onde k ou ℓ em cada monômio escolhido tem que ser não nulo para garantir $\alpha_2, \beta_2 \in M_2$.

Assim, para poder escrever uma perturbação arbitrária como um vetor do espaço tangente da $\mathcal{RL}$ -órbita, é necessário ter $B \subseteq A$. Nesse caso, isso pode ser verificado de forma artesanal. Mas é claro que, mesmo para considerar a perturbação em torno de um ponto qualquer do segmento entre $\hat{F}$ e $\tilde{F}$, é conveniente ter à disposição mais recursos algébricos. O novo ingrediente, que não será discutido nesse texto, é o *Teorema de Preparação de Malgrange-Mather* [3]. Apenas para sugerir como o vocabulário de ideais e módulos, mais uma vez, é relevante, observe que a equação relacionando $\alpha_2(x, y)$ e $\beta_2(x, y^3 - xy)$ descreve a inclusão de um ideal finitamente gerado do módulo E_2 na soma de dois ideais, o primeiro sendo $(3y^2 - x)M_2$ ainda sobre E_2 e o segundo, gerado pelas coordenadas do germe $\hat{F}$, mais adequadamente descrito como um módulo sobre as funções cujas variáveis são x e $y^3 - xy$.

O exemplo acima não deve sugerir que as dificuldades no desenvolvimento da teoria sejam apenas de natureza algébrica. Como exemplo muito simples de uma dificuldade analítica, considere o seguinte resultado de Whitney [4]. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave par. Então existe uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave tal que $f(x) = g(x^2)$. Mais uma vez, para f real analítica, o resultado é simples, mas para funções suaves, não. O resultado segue do Teorema de Preparação citado acima quando apresentado na seguinte forma. Toda $f \in E_1$ é da forma $f(x) = g(x^2) + xh(x^2)$ para $g, h \in E_1$ adequadas.