

## 2 Estabilidade de Tensão

### 2.1 Introdução

O objetivo desta seção é mostrar através de ferramentas analíticas a existência de fenômenos presentes na operação de sistemas elétricos de distribuição, que são associados ao colapso de tensão. Isto deve ser verificado em situações onde a demanda está próxima do carregamento máximo. Verifica-se também a região de operação, no intuito de estabelecer as ações de controle necessárias a fim de evitar que o seu efeito seja oposto ao esperado.

O sistema elétrico é estável, por definição, no ponto de operação se após uma perturbação, os estados do sistema (tensões, ângulos, etc.) estiverem dentro dos limites e se for atingido um novo ponto de equilíbrio. A capacidade de não somente operar de forma estável, mas de manter-se na presença de distúrbios ou aumentos de carregamento torna o sistema seguro, sob o ponto de vista de tensão.

### 2.2 O Limite de Estabilidade de Tensão (LET)

Para a compreensão do fenômeno de estabilidade de tensão utiliza-se um circuito elétrico de duas barras composto por: um gerador com capacidade infinita de geração, uma carga modelada por potência constante e uma linha transmissão sem limite térmico. A análise de um caso simples fornece mais chances de se obter explicações mais simples [Palomino, 2002]. A corrente que flui no circuito mostrado na Figura 2.1 é:

$$i_{01} = \frac{\dot{V}_0}{Z_t \angle \alpha_t + Z_c \angle \phi_c} \quad (2.1)$$

$$I_{01} = \frac{V_0}{\sqrt{(Z_t \cdot \cos \alpha_t + Z_c \cos \phi_c)^2 + (Z_t \cdot \text{sen} \alpha_t + Z_c \cdot \text{sen} \phi_c)^2}} \quad (2.2)$$

$$I_{01} = \frac{V_0/Z_t}{\sqrt{1 + \left(\frac{Z_c}{Z_t}\right)^2 + 2 \cdot \frac{Z_c}{Z_t} \cdot \cos(\alpha_t - \phi_c)}} \quad (2.3)$$

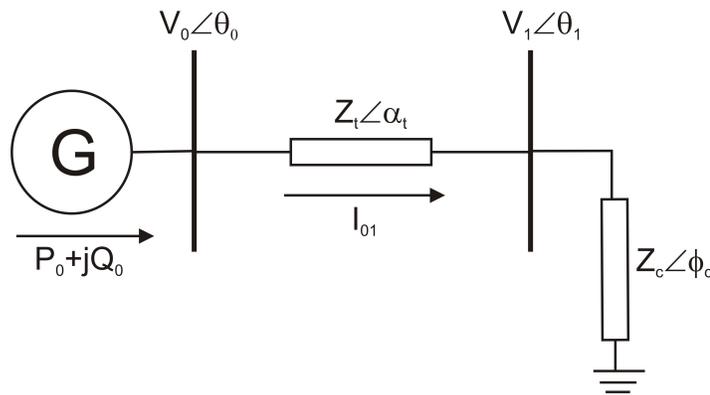


Figura 2.1 - Circuito de duas barras do limite de estabilidade de tensão

A tensão e a potência ativa na barra de carga, que é igual ao negativo do fluxo de potência ativa que “sai” da barra de carga, são:

$$\dot{V}_1 = \dot{Z}_c \cdot \dot{I}_{01} \quad (2.4)$$

$$P_1 = -P_{10} = V_1 \cdot I_{01} \cdot \cos \phi_c \quad (2.5)$$

Substituindo (2.3) e (2.4) em (2.5), calcula-se a potência consumida na barra terminal 1:

$$P_1 = Z_c \cdot \left[ \frac{V_0}{Z_t \sqrt{1 + \left(\frac{Z_c}{Z_t}\right)^2 + 2 \cdot \frac{Z_c}{Z_t} \cdot \cos(\alpha_t - \phi_c)}} \right]^2 \cos \phi_c \quad (2.6)$$

$$P_1 = -P_{10} = \frac{Z_c \cdot V_0^2 \cdot \cos \phi_c}{Z_t^2 + Z_c^2 + 2 \cdot Z_c \cdot Z_t \cdot \cos(\alpha_t - \phi_c)} \quad (2.7)$$

O valor de  $Z_c$  que maximiza a potência consumida na carga é encontrado calculando-se a primeira derivada de  $P_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial Z_c} &= \frac{V_0^2 \cdot \cos \phi_c \cdot [Z_t^2 + Z_c^2 + 2 \cdot Z_t \cdot Z_c \cdot \cos(\alpha_t - \phi_c)]}{[Z_t^2 + Z_c^2 + 2 \cdot Z_t \cdot Z_c \cdot \cos(\alpha_t - \phi_c)]^2} \\ &\quad - \frac{Z_c \cdot V_0^2 \cdot \cos \phi_c \cdot [2 \cdot Z_c + 2 \cdot Z_t \cdot \cos(\alpha_t - \phi_c)]}{[Z_t^2 + Z_c^2 + 2 \cdot Z_t \cdot Z_c \cdot \cos(\alpha_t - \phi_c)]^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Expandindo e operando (2.8):

$$\begin{aligned} V_0^2 \cdot Z_t^2 \cdot \cos \phi_c + V_0^2 \cdot Z_c^2 \cdot \cos \phi_c + 2 \cdot V_0^2 \cdot Z_t \cdot Z_c \cdot \cos \phi \cdot \cos(\alpha_t - \phi_c) \\ - 2 \cdot V_0^2 \cdot Z_c^2 \cdot \cos \phi_c - 2 \cdot V_0^2 \cdot Z_t \cdot Z_c \cdot \cos \phi \cdot \cos(\alpha_t - \phi_c) = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

e que simplificando resulta em:

$$V_0^2 \cdot Z_t^2 \cdot \cos \phi_c = V_0^2 \cdot Z_c^2 \cdot \cos \phi_c \Rightarrow Z_t = Z_c \quad (2.10)$$

Calculando a segunda derivada de  $P_1$  em relação à  $Z_c$  para comprovar que se trata de um máximo:

$$\left. \frac{\partial^2 P_1}{\partial Z_c^2} \right|_{Z_c=Z_t} = -2 \cdot Z_c \cdot V_0^2 \cdot \cos \phi_c = -2 \cdot Z_t \cdot V_0^2 \cdot \cos \phi_c < 0 \quad (2.11)$$

De (2.10) e (2.11) conclui-se que  $P_1$  é máximo quando:

$$Z_c = Z_t \quad (2.12)$$

$P_{10}$  é mínimo quando  $P_1$  é máximo. Substituindo-se (2.12) em (2.7), tem-se:

$$P_1^{\max} = P_{10}^{\min} = \frac{V_0^2 \cdot Z_c \cdot \cos \phi_c}{2 \cdot Z_c^2 \cdot [1 + \cos(\alpha_t - \phi_c)]} = \frac{V_0^2 \cdot \cos \phi_c}{4 \cdot Z_c \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha_t - \phi_c}{2}\right)} \quad (2.13)$$

Para  $P_1^{\max}$ , o módulo da corrente (2.3) é:

$$I_{01} = \frac{V_0/Z_c}{\sqrt{2[1 + \cos(\phi_c - \alpha_t)]}} = \frac{V_0}{2 \cdot Z_c \cdot \cos\left(\frac{\phi_c - \alpha_t}{2}\right)} \quad (2.14)$$

Substituindo-se (2.14) em (2.4), calcula-se a tensão crítica na barra terminal:

$$V_1^{\text{critico}} = \frac{V_0}{2 \cdot \cos\left(\frac{\phi_c - \alpha_t}{2}\right)} \quad (2.15)$$

Levando (2.1) em (2.4) e sabendo-se que em (2.12)  $Z_c = Z_t$ , tem-se:

$$\dot{V}_1 = \dot{Z}_c \cdot \dot{i}_{01} \Rightarrow V_1 \angle \theta_1 = Z_c \angle \phi_c \cdot \frac{V_0 \angle \theta_0}{Z_t \angle \alpha_t + Z_c \angle \phi_c} \quad (2.16)$$

Analisando só a parte real e considerando  $\theta_0$  referência angular:

$$V_1 \cdot \cos \theta_1 = \frac{V_0 \cdot (\sin^2 \phi_c + \sin \phi_c \cdot \sin \alpha_t + \cos \phi_c \cdot \cos \alpha_t + \cos^2 \phi_c)}{d} \quad (2.17)$$

onde:

$$d = \sin^2 \phi_c + \sin^2 \alpha_t + 2 \cdot \sin \phi_c \cdot \sin \alpha_t + 2 \cdot \cos \phi_c \cdot \cos \alpha_t + \cos^2 \phi_c + \cos^2 \alpha_t \quad (2.18)$$

Operando (2.17) e (2.18):

$$V_1 \cdot \cos \theta_1 = \frac{V_0 \cdot (\sin^2 \phi_c + \sin \phi_c \cdot \sin \alpha_t + \cos \phi_c \cdot \cos \alpha_t + \cos^2 \phi_c)}{(2 \cdot \sin \phi_c \cdot \sin \alpha_t + 2 \cdot \cos \phi_c \cdot \cos \alpha_t + 2)} \quad (2.19)$$

que se reduz a:

$$V_1 = \frac{V_0}{2 \cdot \cos \theta_1} \quad (2.20)$$

Igualando-se (2.15) a (2.20), obtém-se:

$$\frac{V_0}{2 \cdot \cos \theta_1} = \frac{V_0}{2 \cdot \cos\left(\frac{\phi_c - \alpha_t}{2}\right)} \quad (2.21)$$

De (2.21), o ângulo crítico na barra terminal é dado por:

$$\theta_1^{\text{crítico}} = \frac{\phi_c - \alpha_t}{2} \quad (2.22)$$

Conclui-se que existe um montante máximo de carga que pode ser alimentado pelo circuito, que é igual ao módulo da impedância da linha de transmissão série, para cada fator de potência da carga. O LET é o lugar geométrico das tensões em módulo e ângulo que representa os pontos da máxima transmissão de potência à carga ou, em outras palavras, o limite de carregamento do circuito.

### 2.2.1 Curvas P, Q e $\phi$ constantes

Utilizando-se o circuito de duas barras mostrado na figura 2.2, deduzem-se as equações da potência ativa e reativa injetadas na barra terminal.

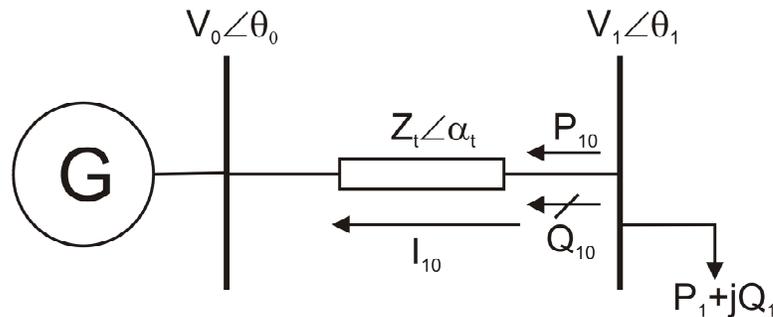


Figura 2.2 - Circuito de duas barras da potência injetada na barra terminal

$$S_{10}^* = P_{10} - jQ_{10} = \dot{V}_1^* \cdot \dot{I}_{10}^* \quad (2.23)$$

$$\dot{V}_1^* = V_1 \angle -\theta_1 \quad (2.24)$$

$$i_{10}^* = \frac{V_1 \angle \theta_1 - V_0 \angle \theta_0}{Z_t \angle \alpha_t} \quad (2.25)$$

Substituindo-se (2.24) e (2.25) em (2.23):

$$S_{10}^* = \frac{V_1^2}{Z_t} \cdot \cos(\alpha_t) - \frac{V_1 \cdot V_0}{Z_t} \cdot \cos(\theta_{10} + \alpha_t) - j \cdot \left[ \frac{V_1^2}{Z_t} \cdot \text{sen}(\alpha_t) - \frac{V_1 \cdot V_0}{Z_t} \cdot \text{sen}(\theta_{10} + \alpha_t) \right] \quad (2.26)$$

Separando-se em (2.26) a parte real e imaginária, temos a potência ativa e reativa injetada na barra terminal:

$$P_{10} = \frac{V_1^2}{Z_t} \cdot \cos(\alpha_t) - \frac{V_1 \cdot V_0}{Z_t} \cdot \cos(\theta_{10} + \alpha_t) \quad (2.27)$$

$$Q_{10} = \frac{V_1^2}{Z_t} \cdot \text{sen}(\alpha_t) - \frac{V_1 \cdot V_0}{Z_t} \cdot \text{sen}(\theta_{10} + \alpha_t) \quad (2.28)$$

Variando-se  $\theta_{10}$  para cada  $P_{10}$  constante, calculam-se os valores de  $V_1$  reais e, portanto, pode-se traçar a curva de P constante no plano PV (ou SV).

Variando-se  $\theta_{10}$  para cada  $Q_{10}$  constante, calculam-se os valores de  $V_1$  reais e, portanto, pode-se traçar a curva de Q constante no plano QV (ou SV).  $Q_{10}$  pode ser negativo, nulo ou positivo, isto é, respectivamente carga indutiva, puramente resistiva e capacitiva.

A tangente do ângulo de fator de potência na carga da barra terminal é:

$$\tan \phi = \frac{Q_{10}}{P_{10}} \quad (2.29)$$

Substituindo-se (2.27) e (2.28) em (2.30) e colocando em evidência a tensão na barra terminal  $V_1$ :

$$\tan \phi = \frac{V_1 \cdot \text{sen}(\alpha_t) - V_0 \cdot \text{sen}(\theta_{10} + \alpha_t)}{V_1 \cdot \text{cos}(\alpha_t) - V_0 \cdot \text{cos}(\theta_{10} + \alpha_t)} \quad (2.30)$$

Operando (2.30), tem-se o módulo da tensão na barra terminal em relação ao ângulo de fator de potência na carga:

$$V_1 = \frac{V_0 \cdot [\text{sen}(\theta_{10} + \alpha_t) - \tan \phi \cdot \text{cos}(\theta_{10} + \alpha_t)]}{\text{sen}(\alpha_t) - \tan \phi \cdot \text{cos}(\alpha_t)} \quad (2.31)$$

De (2.31), variando-se  $\theta_{10}$  para cada  $\phi$  constante, calculam-se os valores de  $V_1$  reais e, portanto, pode-se traçar a curva  $\phi$  constante no plano PV (ou SV).

O lugar geométrico dos pontos de máximo carregamento da curva PV, para cada fator de potência na carga, passa pelo LET. O LET separa as duas regiões de trabalho: região A ou região superior da curva para P constante, onde se tem o controle da tensão, e a região B ou região inferior da curva para P constante, onde ações de controle de tensão podem ter efeitos opostos ao esperado. A Fronteira entre as regiões A e B é a reunião dos pontos de máxima injeção de potência para diferentes fatores de potência, ou seja, corresponde à máxima potência ativa e reativa que pode ser transmitida.

### 2.3 Máxima Potência Transmitida

De (2.27) e sabendo que  $P_{10} = -P_1$ , tem-se:

$$V_1^2 \cdot \left[ \frac{\text{cos}(\alpha_t)}{Z_t} \right] - V_1 \cdot \left[ \frac{V_0 \cdot \text{cos}(\theta_{10} + \alpha_t)}{Z_t} \right] + P_1 = 0 \quad (2.32)$$

Considerou-se no circuito da Figura 2.2  $V_0 = 1,0 \text{ pu}$ ,  $\theta_0 = 0^\circ$ ,  $Z_t = 0,2 \text{ pu}$  e  $\alpha_t = 70^\circ$ . Os ângulos assumem valores negativos e a carga ativa tem valor maior ou igual a zero. Quanto maior a carga ativa mais à direita está a curva de P constante e quanto maior a carga reativa mais à esquerda está a curva de Q constante. O método gráfico utilizado na Figura 2.3 foi projetado para poder representar em um único gráfico, as quatro variáveis associadas à barra de carga: cargas ativa e reativa, módulo e ângulo da tensão.

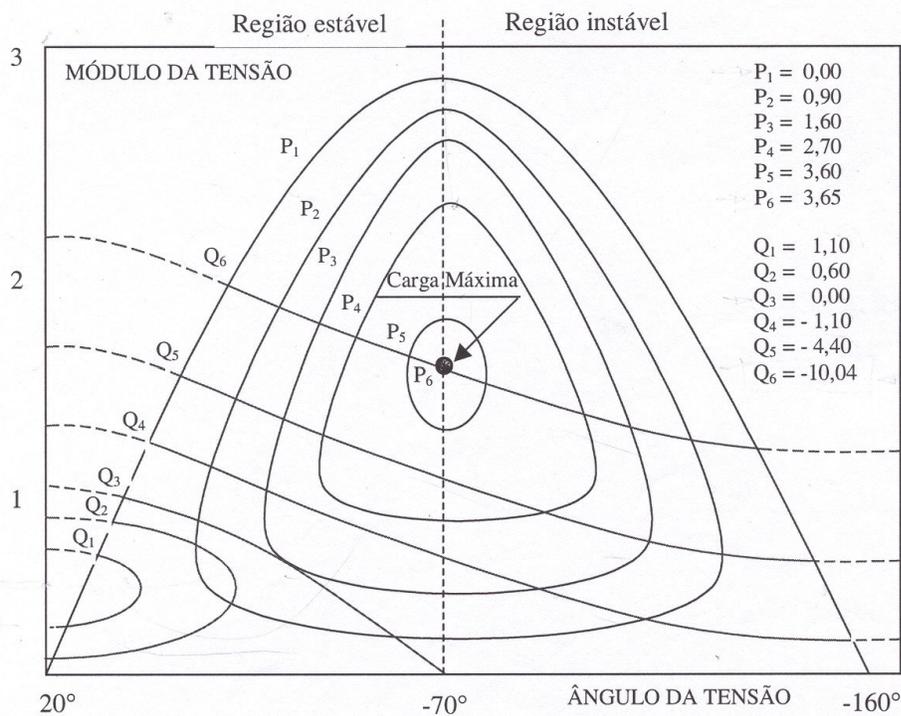


Figura 2.3 - Curvas P e Q constantes no plano  $\theta_1$  versus  $V_1$  na barra terminal

Mostra-se no gráfico acima seis diferentes níveis de carga para  $P_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) constante, a partir de carga ativa nula. À medida que o nível de carga ativa constante aumenta, a curva fechada  $P_i$ , lugar geométrico das tensões na carga, diminui de tamanho até que para  $P_i = 3,65$ , o lugar geométrico é um único ponto, e o valor da tensão é  $1,46 \angle 70^\circ$ . Pela teoria clássica de estabilidade estática, esse ponto é onde ocorre o máximo fluxo de potência ativa que pode chegar à barra de carga e, conseqüentemente, o ângulo corresponde ao máximo defasamento angular entre as barras de geração e carga.

O valor de  $\theta_1$  que maximiza a potência consumida na carga é encontrado calculando-se a primeira derivada de  $P_1$  em (2.27):

$$\frac{\partial P_1}{\partial \theta_1} = -\frac{V_1 \cdot V_0}{Z_t} \cdot \text{sen}(\theta_1 - \theta_0 + \alpha_t) \quad (2.33)$$

Como  $\theta_0 = 0^\circ$ , (2.33) reduz-se a:

$$\theta_1 = -\alpha_t \quad (2.34)$$

Calcula-se a segunda derivada de  $P_1$  em relação à  $\theta_1$  para comprovar que se trata de um máximo:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial \theta_1^2} = -\frac{V_1 \cdot V_0}{Z_t} \cdot \cos(\theta_1 - \theta_0 + \alpha_t) = -\frac{V_1 \cdot 1}{0,2} \cdot \cos(\theta_1 - 0 + 70^\circ) < 0 \quad (2.35)$$

portanto em  $\theta_1 = -\alpha_t$ ,  $P_1$  é máximo.

Considerando o fator de potência  $\phi$  da carga constante e variando-se o ângulo da barra terminal, obtêm-se diversos valores de  $V_1$ , resolvendo-se (2.31). Aplicando esses valores em (2.27), constrói-se a curva  $P_{10} \times V_1$ , mostrada na Figura 2.4, usualmente chamada de “curva do nariz”.

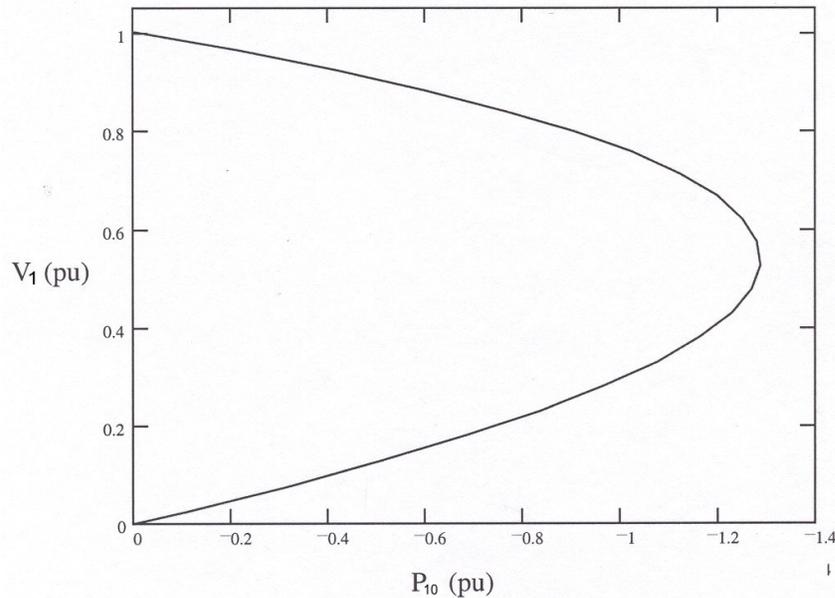


Figura 2.4 – Curva PV referente ao sistema de duas barras

Verifica-se na Figura 2.4 que existem duas soluções de tensões para cada valor de  $P_{10}$ , sendo que na “ponta do nariz” existe apenas uma solução de tensão. Este ponto corresponde à máxima potência transferida.

## 2.4 Avaliação das Condições de Estabilidade de Tensão

O objetivo é identificar se a solução de tensão para uma carga conectada à barra  $i$  está na parte superior ou na inferior e a sua distância à “ponta do nariz” da curva PV. A “ponta do nariz” corresponde à máxima quantidade de potência ativa e reativa que pode ser transmitida à carga ou a partir de um gerador. O carregamento da rede de transmissão é representado por condições nodais associadas ao máximo fluxo de potência ativa e reativa que pode ser transmitida dos geradores para as cargas. Desenvolve-se, então, uma ferramenta analítica de avaliação dessas condições nodais, com base em modelo matemático simples, mas poderoso, de uma interpretação física direta do fenômeno. Índices abrangentes e significativos são deduzidos [Prada R.B., Palomino E.G.C., dos Santos J.O.R., Bianco A., Pilotto L.A.S., 2002].

O sistema linearizado das equações estáticas de fluxo de carga é:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = [J] \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Colocando-se as equações e variáveis relacionadas com a barra em análise para baixo, fica:

$$\begin{bmatrix} \Delta P' \\ \Delta Q' \\ \vdots \\ \Delta P_i \\ \Delta Q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta' \\ \Delta V' \\ \vdots \\ \Delta \theta_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

As sub-matrizes A, B, C e D são partições da matriz Jacobiano [J], onde:

A – Contém a matriz Jacobiana original do sistema, excluindo as linhas e colunas referentes à barra em análise.

B – Contem as derivadas das equações de potência ativa e reativa do sistema em relação as variáveis dependentes da barra em análise.

C – Contém as derivadas das equações de potência ativa e reativa da barra em análise em relação às outras variáveis dependentes do sistema.

D – Contém as derivadas das equações de potência ativa e reativa da barra em análise em relação às suas próprias variáveis dependentes.

Assumindo uma variação infinitesimal de carga ou geração  $\Delta P_i$  e  $\Delta Q_i$  somente para a barra  $i$  de um sistema multi-nó, ou seja,  $\Delta P' = \Delta Q' = 0$ , então, o sistema (2.37) pode ser reduzido para dimensão (2x2):

$$\begin{bmatrix} \Delta P_i \\ \Delta Q_i \end{bmatrix} = [D'] \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

onde:

$$[D'] = [D] - [C] \cdot [A^{-1}] \cdot [B] \quad (2.39)$$

D' – Contém as derivadas das equações de potência ativa e reativa da barra em análise em relação às suas próprias variáveis dependentes e ao restante do sistema.

As relações de sensibilidade entre as injeções de potência ativa e reativa e a magnitude e o ângulo da tensão na barra  $i$ , levando em consideração o restante do sistema, podem ser avaliados por (2.38). Tem dimensão 2x2. No sistema multi-nó:  $[J] \neq [D] \neq [D']$ .

É demonstrado que o sinal do determinante e a magnitude da matriz  $[D']$  indicam respectivamente, a região de operação e a distância ao máximo carregamento [Prada et al, 2002].

## 2.4.1 Magnitude do determinante da matriz [D']

### 2.4.1.1 Sistema de duas barras

Em um sistema de duas barras o fluxo de potência que chega à barra i é igual à carga consumida. Considerando k uma barra de geração o determinante da matriz [D'] é calculado por:

$$\det[D'] = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} - \frac{\partial P_i}{\partial V_i} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} \quad (2.40)$$

onde:

$$P_i = V_i^2 \cdot G_{ii} + V_i \cdot V_k \cdot (G_{ik} \cdot \cos \theta_{ik} + B_{ik} \cdot \sin \theta_{ik}) \quad (2.41)$$

$$Q_i = -V_i^2 \cdot B_{ii} + V_i \cdot V_k \cdot (G_{ik} \cdot \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cdot \cos \theta_{ik}) \quad (2.42)$$

Resolvendo (2.40) com (2.41) e (2.42), obtém-se:

$$\det[D'] = -V_i \cdot V_k^2 \cdot (G_{ik}^2 + B_{ik}^2) + 2 \cdot V_i^2 \cdot B_{ii} \cdot (V_k \cdot G_{ik} \cdot \sin \theta_{ik} - V_k \cdot B_{ik} \cdot \cos \theta_{ik}) - 2 \cdot V_i^2 \cdot G_{ii} \cdot (V_k \cdot G_{ik} \cdot \cos \theta_{ik} + V_k \cdot B_{ik} \cdot \sin \theta_{ik}) \quad (2.43)$$

Fazendo  $Y_{ik}^2 = G_{ik}^2 + B_{ik}^2$  e multiplicando ambos os lados por  $V_i$ :

$$\det[D'] \cdot V_i = -[V_i \cdot V_k \cdot Y_{ik}]^2 + 2 \cdot V_i^2 \cdot B_{ii} \cdot [V_i \cdot V_k \cdot (G_{ik} \cdot \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cdot \cos \theta_{ik})] - 2 \cdot V_i^2 \cdot G_{ii} \cdot [V_i \cdot V_k \cdot (G_{ik} \cdot \cos \theta_{ik} + B_{ik} \cdot \sin \theta_{ik})] \quad (2.44)$$

Por outro lado, a potência aparente injetada na barra i é dada por  $S_i = P_i + jQ_i$ . De (2.41) e (2.42), escreve-se:

$$S_i^2 = P_i^2 + Q_i^2 = V_i^4 \cdot (G_{ii}^2 + B_{ii}^2) + V_i^2 \cdot V_k^2 \cdot Y_{ik}^2 + 2 \cdot V_i^2 \cdot G_{ii} \cdot V_i \cdot V_k \cdot (G_{ik} \cdot \cos \theta_{ik} + B_{ik} \cdot \sin \theta_{ik}) - 2 \cdot V_i^2 \cdot B_{ii} \cdot V_i \cdot V_k \cdot (G_{ik} \cdot \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cdot \cos \theta_{ik}) \quad (2.45)$$

Fazendo  $S_{i0} = V_i^2 \cdot Y_{ii}$  e comparando (2.44) com (2.45), obtém-se finalmente:

$$\det[D'] \cdot V_i = S_{i0}^2 - S_i^2 \quad (2.46)$$

Com o resultado obtido pode-se estudar o carregamento da rede. O termo  $S_{i0}^2$  é função do elemento diagonal da matriz admitância de barra e do módulo da tensão na barra  $i$ . Aumentando gradativamente o valor da potência aparente  $S_i$ , o máximo será alcançado quando  $S_i^2$  for igual a  $S_{i0}^2$  fazendo com que o produto  $\det[D'] \cdot V_i$  seja igual a zero.

Dessa forma pode-se dizer que, para um sistema de duas barras:

- $S_i$  é a potência injetada na barra  $i$  no ponto de operação de análise.
- $S_{i0}$  é a máxima potência que pode ser injetada na barra  $i$  (dado por  $S_{i0} = V_i^2 \cdot Y_{ii}$ ).
- O valor de  $\det[D'] \cdot V_i$  representa a distância entre  $S_{i0}^2$  e  $S_i^2$ .

Na seção seguinte um importante resultado obtido em (2.46) é estendido para o sistema multi-nó.

#### 2.4.1.2 Sistema multi-nó

Seja  $[D]$  a matriz que relaciona linearmente as injeções de potência ativa e reativa com o ângulo e módulo da tensão na barra  $i$ ,

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} & \frac{\partial P_i}{\partial V_i} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} & \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & u \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\text{Seja } [-C \cdot A^{-1} \cdot B] = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Usando (2.47) e (2.48) em (2.39), pode-se escrever:

$$\det[D'] = \det \left[ \begin{pmatrix} x & z \\ y & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} \right] \quad (2.49)$$

$$\det[D'] = [x \cdot u - y \cdot z] + [x \cdot b_4 - y \cdot b_3] + [b_1 \cdot u - b_2 \cdot z] + [b_1 \cdot b_4 - b_2 \cdot b_3] \quad (2.50)$$

De (2.47), tem-se:

$$\det[D] = [x \cdot u - y \cdot z] \quad (2.51)$$

Substituindo (2.51) em (2.50):

$$\det[D'] = \det[D] + [x \cdot b_4 - y \cdot b_3] + [b_1 \cdot u - b_2 \cdot z] + [b_1 \cdot b_4 - b_2 \cdot b_3] \quad (2.52)$$

O resultado obtido em (2.46) para um sistema de duas barras pode ser estendido ao sistema multi-nó. Multiplicando todos os termos de (2.52) por  $V_i$ , fica na forma:

$$\det[D'] \cdot V_i = \det[D] \cdot V_i - S_{is}^2 \quad (2.53)$$

onde:

$$S_{is}^2 = -V_i \cdot \{ [x \cdot b_4 - y \cdot b_3] + [b_1 \cdot u - b_2 \cdot z] + [b_1 \cdot b_4 - b_2 \cdot b_3] \} \quad (2.54)$$

ou

$$\det[D'] \cdot V_i = S_{i0}^2 - S_i^2 - S_{is}^2 \quad (2.55)$$

A expressão (2.55) é a generalização de (2.46) para o sistema multi-nó. O novo termo  $S_{is}^2$  pode ser obtido de (2.53):

$$S_{is}^2 = (\det[D] - \det[D']) \cdot V_i \quad (2.56)$$

Dessa forma pode-se dizer que, para um sistema multi-nó:

- $S_i$  é a potência injetada na barra  $i$  no ponto de operação em análise.
- $S_{i0}$  é a máxima potência que poderia ser injetada na barra  $i$ , caso o sistema fosse de duas barras (dado por  $S_{i0} = V_i^2 \cdot Y_{ii}$ ).
- $S_{is}^2$  está relacionada à potência injetada no restante do sistema que limita a injeção de potência na barra  $i$  (dado por  $S_{is}^2 = (\det[D] - \det[D']) \cdot V_i$ ).
- $S_m^2 = S_{i0}^2 - S_{is}^2$  é definida como a máxima potência aparente que poderia ser injetada na barra  $i$  no ponto de operação em análise.

A entidade  $S_{is}^2$  possui valores negativos quando  $\det[D] < \det[D']$  o que gera dificuldade no entendimento da teoria, pois sendo a entidade um valor elevado ao quadrado, não poderia adquirir valores negativos. A fim de eliminar esta dificuldade pode-se redefinir (2.56) [França, 2003]:

$$S_{is}^2 = \Delta \det \cdot V_i \quad (2.57)$$

onde:

$$\Delta \det = \det[D] - \det[D'] \quad (2.58)$$

A estimativa da máxima potência injetada na barra  $i$  no ponto de operação em análise é reescrita como:

$$S_m^2 = S_{i0}^2 - \Delta \det \cdot V_i \quad (2.60)$$

O mesmo problema encontra-se no índice  $S_m^2$  que foi definido em (2.60) como a máxima potência aparente que poderia ser injetada na barra  $i$ ,  $S_{i0}^2$ , menos a grandeza  $\Delta \det \cdot V_i$  associada à potência injetada no restante do sistema e que limita a injeção de potência na barra  $i$ . Esse índice  $S_m^2$  possui valores negativos quando  $S_{i0}^2 < \Delta \det \cdot V_i$  para barras de carga, geração ou qualquer outro tipo de barra quando o sistema trabalha com condições extremas de carregamento. Para resolver este problema, [França, 2003] define o índice  $S_m$  por:

$$S_m = \sin \alpha (S_{i0}^2 - \Delta \det \cdot V_i) \cdot \sqrt{|S_{i0}^2 - \Delta \det \cdot V_i|} \quad (2.61)$$

#### 2.4.2 Sinal do determinante da matriz [D']

Usando-se um sistema de referência cartesiano, podem-se escrever os vetores gradientes de potência ativa e reativa na barra  $i$  como:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla P_i} &= \frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} \cdot \vec{i} + \frac{\partial P_i}{\partial V_i} \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \\ \overline{\nabla Q_i} &= \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} \cdot \vec{i} + \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \end{aligned} \quad (2.62)$$

O produto vetorial é:

$$\overline{\nabla P_i} \times \overline{\nabla Q_i} = \left[ \left( \frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} \right) - \left( \frac{\partial P_i}{\partial V_i} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} \right) \right] \cdot \vec{k} \quad (2.63)$$

Substituindo (2.40) em (2.63):

$$\overline{\nabla P_i} \times \overline{\nabla Q_i} = \det[D'] \cdot \vec{k} \quad (2.64)$$

Por outro lado:

$$\overline{\nabla P_i} \times \overline{\nabla Q_i} = |\overline{\nabla P_i}| \cdot |\overline{\nabla Q_i}| \cdot \text{sen} \beta \cdot \vec{k} \quad (2.65)$$

Tem-se então:

$$\det[D'] = |\overline{\nabla P_i}| \cdot |\overline{\nabla Q_i}| \cdot \text{sen} \beta \quad (2.66)$$

onde  $\beta$  é o ângulo entre  $\overline{\nabla P_i}$  e  $\overline{\nabla Q_i}$ .

Como o sinal de  $\det[D']$  é função somente de  $\beta$ , tem-se:

- $\det[D'] > 0$  se  $\text{sen}\beta > 0$ , i.e.  $0^\circ < \beta < 180^\circ$
- $\det[D'] < 0$  se  $\text{sen}\beta < 0$ , i.e.  $0^\circ > \beta > -180^\circ$
- $\det[D'] = 0$  se  $\text{sen}\beta = 0$ , i.e.  $\beta = \pm 180^\circ$  ou  $\beta = 0^\circ$

Na Figura 2.5, tomando  $\overline{\nabla P_i}$  como eixo de referência, na região normal de operação sempre ocorre  $0^\circ < \beta < 180^\circ$  e na região anormal de operação ocorre  $0^\circ > \beta > -180^\circ$ . No ponto máximo, os vetores gradientes  $\overline{\nabla P_i}$  e  $\overline{\nabla Q_i}$  estão alinhados, e então o ângulo  $\beta$  formado por esses dois vetores é  $\pm 180^\circ$  e também  $\beta = 0^\circ$  devido à ocorrência numérica.

Portanto,  $\det[D'] > 0$  caracteriza a parte superior da curva PV e  $\det[D'] < 0$  caracteriza a parte inferior da mesma curva, enquanto que  $\det[D'] = 0$  caracteriza a fronteira entre essas duas regiões, ou seja, a “ponta do nariz”.

O ângulo  $\beta$  também indica uma distância angular entre o ponto de operação em análise e o ponto de máximo carregamento, assim como a região de operação.

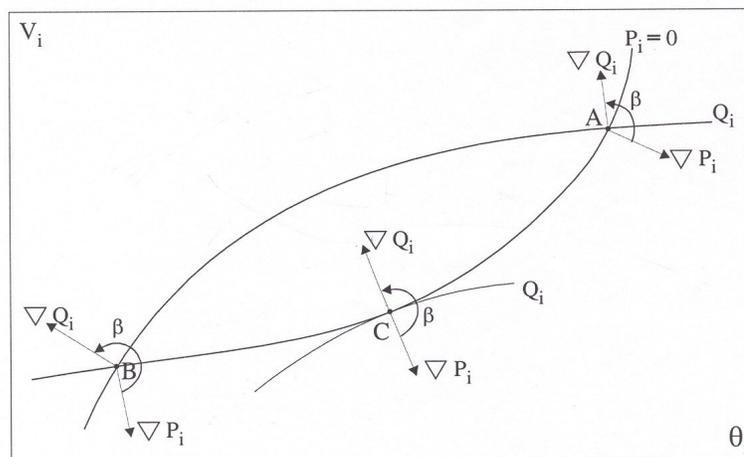


Figura 2.5 – Localização do Vetor Gradiente de  $P_i$  e  $Q_i$  no plano  $V\theta$ .

Um fato observado em [Souza, 1997] é a discrepância entre os valores do determinante da matriz Jacobiano do sistema e do determinante da matriz  $D'$  na barra em análise. Um valor grande de  $\det[A]$  comparado com um valor pequeno de  $\det[D']$  significa

que o ponto de operação está longe da fronteira mas existe dificuldade de transmissão de potência para a barra em análise. Esta discrepância pode ser explicada quando um sistema de grande porte opera na região normal de operação com “folga” ( $\det[A] \gg 0$ ). No entanto, existe uma barra remota conectada ao sistema através de uma longa linha de transmissão. A barra de carga e sua compensação capacitiva podem ser suficientes para que o fluxo de potência transmitido esteja muito perto de seu limite máximo ( $\det[D'] \approx 0$ ). Por outro lado, se o sistema for suficientemente pequeno, o determinante da matriz Jacobiano pode ser um indicador da região de operação do sistema global, por exemplo, no sistema de duas barras  $[J] = [D] = [D']$ .

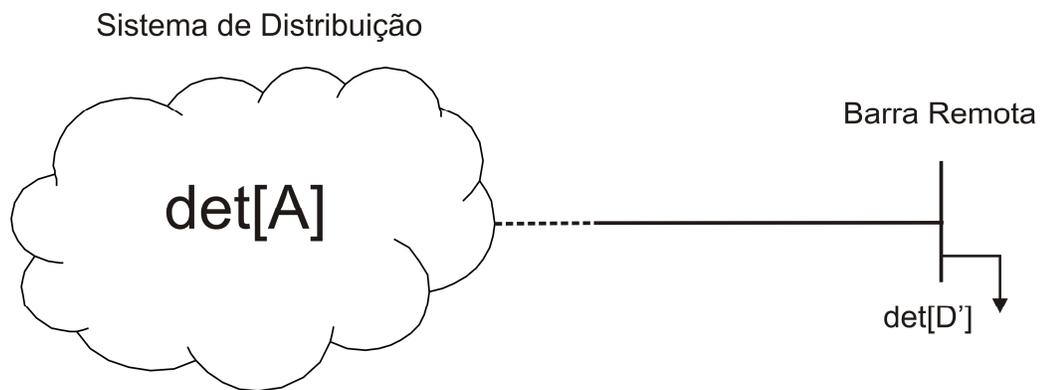


Figura 2.6 - Magnitude do  $\det[A]$  do sistema e do  $\det[D']$  de uma barra remota.

### 2.4.3 Margem de potência

Um ponto de operação pode estar na região superior ou inferior da curva PV. Se o ponto pertence a uma dessas regiões, é importante conhecer a distância até a fronteira. O valor de  $(S_m - S_i)$  é a diferença, em MVA, entre a potência aparente que está sendo injetada e a máxima potência aparente estimada no ponto de operação em análise.

Observa-se que se o ponto de operação em análise pertence à região normal de operação, isto é, está na parte superior da curva PV, tem-se  $S_m > S_i$ . Portanto pode-se definir a margem  $M = S_m - S_i > 0$  como a quantidade de MVA que poderia ser adicionada à injeção de potência aparente para se atingir o máximo. Esta margem pode também ser definida como:

$$M = \left( \frac{S_m - S_i}{S_m} \right) = \left( 1 - \frac{S_i}{S_m} \right) \text{ em pu de } S_m, \text{ ou} \quad (2.67)$$

$$M = \left( \frac{S_m - S_i}{S_m} \right) = \left( 1 - \frac{S_i}{S_m} \right) \times 100\% \text{ em percentual de } S_m \quad (2.68)$$

Mas, se o ponto de operação em análise pertence à região anormal de operação, ou seja, está na parte inferior da curva PV, tem-se  $S_m < S_i$ . Logo a margem  $M = S_m - S_i < 0$  é a quantidade de MVA que deveria ser retirada da injeção de potência aparente para se atingir o máximo. Esta margem pode também ser definida como:

$$M = \left( \frac{S_m - S_i}{S_i} \right) = \left( \frac{S_m}{S_i} - 1 \right) \text{ em pu de } S_i, \text{ ou} \quad (2.69)$$

$$M = \left( \frac{S_m - S_i}{S_i} \right) = \left( \frac{S_m}{S_i} - 1 \right) \times 100\% \text{ em percentual de } S_i \quad (2.70)$$

Com o ponto de operação em análise na fronteira tem-se  $S_m = S_i$ , isto é, está na “ponta do nariz” na curva PV. Portanto a margem é dada por  $M = S_m - S_i = 0$  e nada se pode acrescentar ou retirar de  $S_i$  para atingir  $S_m$ . A Figura 2.6 mostra o sinal da margem de potência no plano PV.

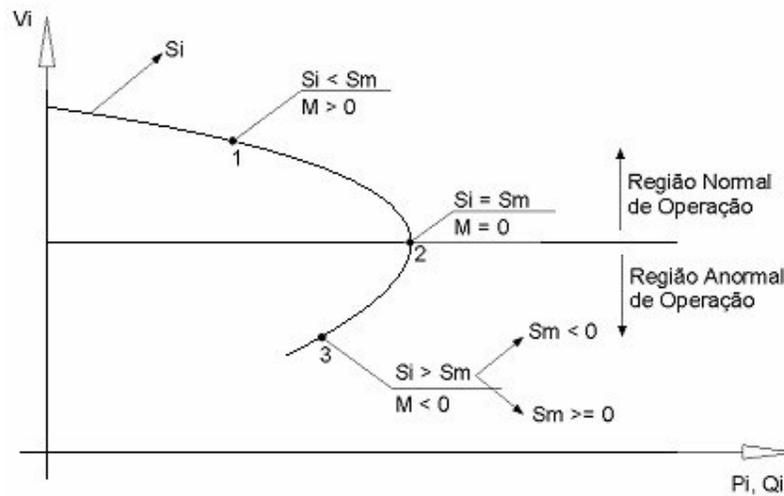


Figura 2.7 – Sinal da margem de potência na curva PV

## 2.5 Influência do Carregamento na Margem de Potência

Para analisar a influência do carregamento na margem de potência utilizou-se um sistema radial de distribuição de 32 barras [Baran, Wu, 1989]. A configuração inicial das chaves abertas foi mantida e multiplicou-se as cargas de cada barra por um escalar  $\lambda$ , que corresponde ao fator de carregamento aplicado na rede. Os resultados da simulação para a barra 30 são apresentados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 - Margem de potência em função do aumento do carregamento

Casos	$\lambda$	$V_{30}^{\lambda}$ (pu)	$\theta_{30}^{\lambda}$ (graus)	$S_{i_{30}}^{\lambda}$ (pu)	$S_{m_{30}}^{\lambda}$ (pu)	$\det[D'] \cdot V_{30}^{\lambda}$ (pu)	$\beta_{30}^{\lambda}$ (graus)	M(%)
1	1	0,9276	0,4692	0,0059	0,2247	0,0505	92,5078	97,3893
2	2	0,8553	1,0177	0,0108	0,1898	0,0359	95,9170	94,2988
3	3	0,7831	1,6676	0,0149	0,1567	0,0244	100,6883	90,5202
4	4	0,7110	2,4493	0,0180	0,1255	0,0154	107,6342	85,6708
5	5	0,6390	3,4072	0,0202	0,0959	0,0088	118,3026	78,9180
6	6	0,5673	4,6078	0,0215	0,0669	0,0040	135,8865	67,8099
7	7	0,4959	6,1549	0,0220	0,0347	7,4385E-04	167,2256	36,6528
8	7,28	0,4760	6,6711	0,0219	0,0218	-4,7537E-06	-180,0964	-0,4961
9	7,29	0,4753	6,6930	0,0219	0,0212	-2,9458E-05	-179,4001	-3,1155
10	7,30	0,4746	6,7096	0,0219	0,0206	-5,4095E-05	-178,8933	-5,8015

Pode-se observar que nos casos 1 a 7, a potência injetada aumenta, enquanto que a estimativa da máxima potência injetada no ponto de operação em análise diminui gradativamente, indicando a aproximação do ponto de máximo carregamento. Os valores do ângulo  $\beta$  aumentam e da margem de potência diminuem, entretanto permanecem positivos, indicando que representam pontos na região normal de operação da curva PV, conforme pode ser verificado no sinal do determinante da matriz  $D'$ .

Nos casos 8, 9 e 10 o ângulo  $\beta$  e a margem de potência têm sinais negativos, representando pontos na região anormal de operação da curva PV, enquanto que os valores da potência injetada representam o excesso de potência em relação à estimativa da máxima potência injetada no ponto de operação em análise.

A Tabela 2.1 também mostra que entre os casos 7 e 8 o ângulo  $\beta$  passou por  $0^\circ$ ,  $\det[D']$  passou por zero, e a margem  $M$  coerentemente também passou por zero, indicando a transição entre a região normal e anormal de operação. A evolução dos índices mostra a aproximação do ponto de operação ao ponto de máxima injeção de potência devido aos incrementos de carga através da gradativa deterioração dos índices  $S_m$  e  $\beta$ .

## 2.6 Índices de Estabilidade de Tensão em Redes Radiais de Distribuição

No trabalho de [Guimarães, 2005] foi utilizado outro índice de estabilidade de tensão, que será demonstrado a seguir usando o circuito de duas barras da Figura 2.2. A potência consumida na barra terminal é dada por:

$$P_1 + jQ_1 = \dot{V}_1 \cdot \dot{i}_{01}^* \quad (2.71)$$

onde  $i_{01}$  é o fluxo de corrente na linha de transmissão, dado por:

$$\dot{i}_{01} = \frac{\dot{V}_0 - \dot{V}_1}{R_t + jX_t} \quad (2.72)$$

onde:

$$Z_t = R_t + jX_t \quad (2.73)$$

Substituindo (2.72) em (2.71) tem-se:

$$a|V_1|^4 + b|V_1|^2 + c = 0 \quad (2.74)$$

onde:

$$a = 1 \quad (2.75)$$

$$b = |V_0|^2 - 2 \cdot (P_1 \cdot R_t + Q_1 \cdot X_t) \quad (2.76)$$

$$c = (P_1^2 + Q_1^2) \cdot (R_t^2 + X_t^2) \quad (2.77)$$

A equação (2.74) tem quatro soluções:

$$|V_1|_{1,2,3,4} = \pm \left[ -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \right]^{1/2} \quad (2.78)$$

Como as soluções representam o módulo da tensão na barra terminal, a única solução possível é a solução com o maior valor positivo, dada por:

$$|V_1| = \left[ \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \right]^{1/2} \quad (2.79)$$

A solução (2.79) só existirá se:

$$b^2 - 4c \geq 0 \quad (2.80)$$

Substituindo (2.76) e (2.77) em (2.80) tem-se:

$$\left[ |V_1|^2 - 2 \cdot P_1 \cdot R_t - 2 \cdot Q_1 \cdot X_t \right]^2 - 4 \cdot [(P_1^2 + Q_1^2) \cdot (R_t^2 + X_t^2)] \geq 0 \quad (2.81)$$

Simplificando resulta em:

$$|V_0|^4 - 4 \cdot (P_i R_t - Q_i X_t)^2 - 4 \cdot [(P_i R_t + Q_i X_t) \cdot |V_0|^2] \geq 0 \quad (2.82)$$

De (2.82) tem-se o índice de estabilidade de tensão proposto:

$$SI_i = |V_0|^4 - 4 \cdot (P_i R_t - Q_i X_t)^2 - 4 \cdot [(P_i R_t + Q_i X_t) \cdot |V_0|^2] \quad (2.83)$$

$$i = 2, 3, \dots, NB$$

onde NB é o número de barras do sistema

Segundo [Guimarães, 2005] a barra que apresenta o menor valor de SI é a mais sensível ao colapso de tensão. Não se sabe como aplicar esse índice em um sistema multi-nó.

Conforme foi visto, a ferramenta analítica usualmente utilizada na análise de estabilidade de tensão em sistemas de transmissão mostrou-se adequada na avaliação de situações críticas e de contingências que podem levar o sistema de distribuição ao colapso de tensão. A ferramenta mostrou-se eficiente em mostrar durante uma seqüência de cenários caracterizados pelo crescimento da demanda a evolução dos índices que indicam a região de operação em um sistema multi-nó radial de distribuição e avaliar a que distância um ponto de operação em análise está do ponto de carregamento máximo.

O aumento gradual do nível de carregamento do sistema afeta os valores do determinante da matriz  $D'$ , da distância angular  $\beta$  e da margem de potência  $M$ . Em barras de carga, por exemplo, para um valor negativo do determinante  $[D']$ , um aumento de carga nesta barra ( $+\Delta P_D$ ,  $+\Delta Q_D$ ) terá como resultado um aumento na tensão da barra ( $+\Delta V$ ), ao contrário do esperado.

Os índices de estabilidade de tensão utilizados em [Guimarães, 2005] também são demonstrados a partir de um circuito de duas barras, mas, entretanto, não é feita uma extensão para o sistema multi-nó.