

5 Simulador

Para se observar o desempenho do controle de tração proposto em vários tipos de terrenos, foi desenvolvido um programa utilizando o software MatLab 6.5 para simular o movimento do veículo robótico. A Fig. 23 ilustra os módulos que compõe esse simulador.

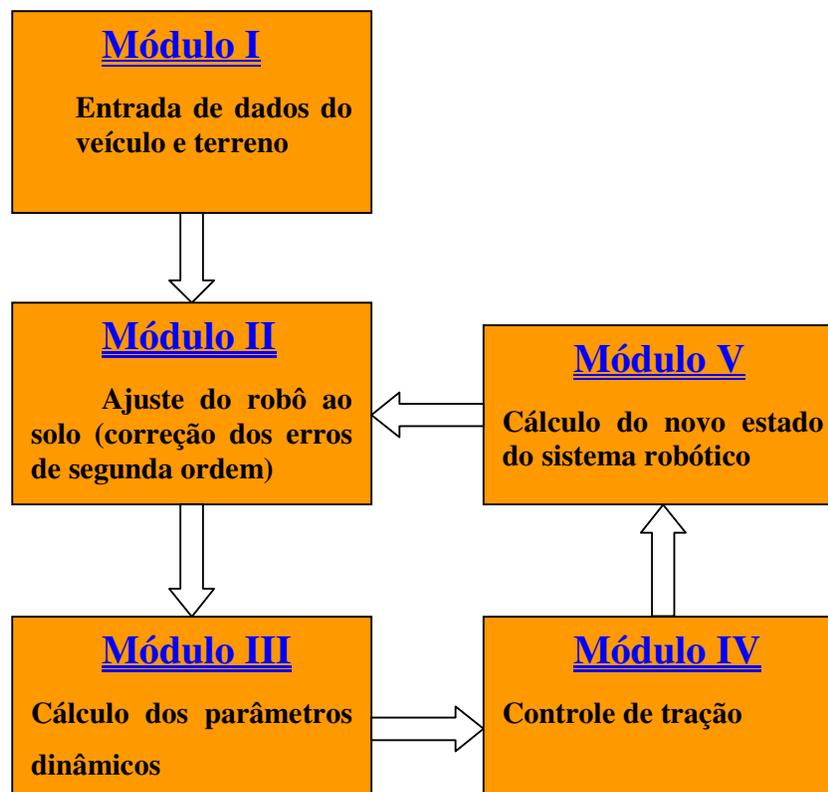


Figura 23 - Fluxograma representativo do programa de simulação do sistema.

A descrição detalhada de cada um desses módulos é feita abaixo.

5.1. Módulo I: Entrada de dados do Sistema

Este módulo é responsável pela entrada de dados do sistema, a qual é feita pelo usuário, e pelo cálculo da curva de centros do terreno. Os dados requeridos por este módulo são os seguintes:

5.1.1. Propriedades físicas e geométricas do sistema analisado

As propriedades físicas requeridas por este módulo são:

- Massa do veículo robótico (m): dada em [kg];
- Momento de inércia dinâmico (I) do centro de massa do veículo em relação ao eixo z : dado em [kg.m²];
- Aceleração local da gravidade (g): dada em [m/s²];
- Máximo torque disponibilizado por cada motor (T_{sat}) do veículo: dado em [N.m];
- Coeficiente de atrito estático entre as rodas e o solo (μ).

Já as características geométricas requeridas do veículo são:

- Raio das rodas (r): dado em [m];
- Comprimentos L_1 e L_2 , que representam as distâncias dos centros das rodas 1 e 2, respectivamente, ao eixo transversal ao chassi do veículo que passa pelo centro de massa do mesmo (vide Fig. 10 do Capítulo 2);
- Comprimentos h_1 e h_2 , que representam a distância dos centros das rodas 1 e 2, respectivamente, ao eixo longitudinal ao chassi do veículo e que passa pelo centro de massa do mesmo (vide Fig. 10 do Capítulo 2).

A partir desses dados, se calcula o peso de veículo e a máxima força de atrito que pode atuar no sistema devido ao torque do motor de acionamento das rodas, conforme indicado abaixo:

$$P = m \cdot g \quad (265)$$

$$F_{sat} = \frac{T_{sat}}{r} \quad (266)$$

F_{sat} é força de atrito máxima disponibilizada pelo torque das rodas que não satura os motores, sendo válida em ambos os sentidos de movimento das rodas do veículo. Assim, a restrição para os possíveis valores da força de atrito entre uma dada roda i e o solo, dada pela saturação do motor, é a seguinte:

$$-F_{sat} \leq Fat_i \leq F_{sat} \quad (267)$$

a qual pode ser escrita de uma forma mais compacta, como:

$$Fat_i \leq |F_{sat}| \quad (268)$$

5.1.2. Perfil do terreno

O perfil do terreno a ser usado na simulação é obtido de forma discretizada através do fornecimento de um arquivo de dados contendo pontos $P_i = (x_i, y_i)$, onde x é a distância horizontal deste ponto a um referencial fixo e y é a altura do ponto, também medida em relação a um referencial fixo. A distância em x de dois pontos consecutivos P_i e P_{i+1} é constante e igual a dx , e x pertencerá a um intervalo da forma $[a, b]$. Todos os perfis utilizados nas simulações realizadas são funções, ou seja, os pontos serão do tipo:

$$P_i = (x_i, f(x_i)) \quad (269)$$

A Fig. 24 ilustra um perfil de terreno utilizado na simulação. Na prática os valores de dx são bem menores que os da figura, para não comprometer a precisão da simulação.

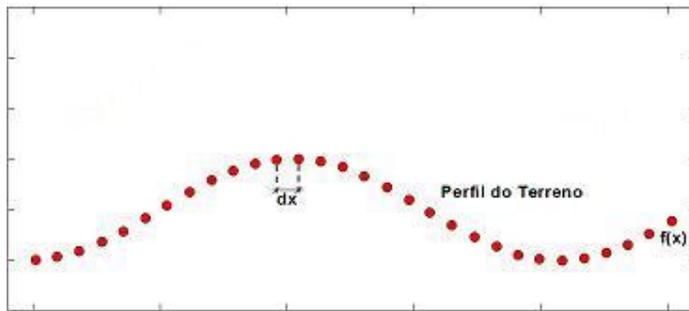


Figura 24 - Exemplo de um perfil de terreno utilizado na simulação

5.1.3. Curva de Centros

Este módulo calcula ainda os pontos pertencentes à curva de centros, a partir dos pontos do perfil do terreno.

A curva de centros, como mencionada no Capítulo 2, é composta por todos os pontos do plano x - y que o centro de uma dada roda do robô poderá ocupar, quando a mesma estiver em contato com o solo. Para se calcular essa curva considera-se, a priori, que todo ponto do perfil do terreno pode ser um ponto de contato entre uma dada roda do veículo e o solo. Assim, para cada ponto $P_i = (x_i, y_i)$ do perfil do terreno calculam-se as coordenadas cartesianas (x_{cc}, y_{cc}) que uma das rodas do veículo deverá ter para que P_i seja um ponto de contato.

Como as rodas do veículo são modeladas como círculos, o ponto (x_{cc}, y_{cc}) será o centro desta circunferência e estará a uma distância r (raio da roda) do

ponto P_i , além disso a reta que passa por (x_{cc}, y_{cc}) e P_i será a reta normal ao perfil do terreno no ponto P_i . Desta forma, para se calcular as coordenadas do ponto (x_{cc}, y_{cc}) pertencente à curva de centros, basta calcular o ponto sobre a normal ao perfil do terreno no ponto P_i que está a uma distância r deste (Fig. 25).

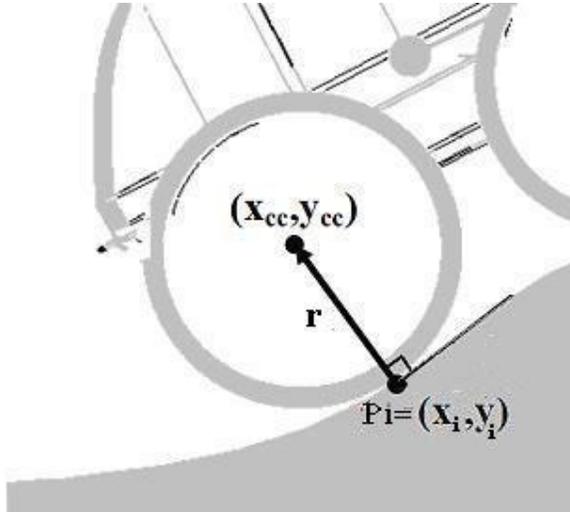


Figura 25 - Obtenção do ponto (x_{cc}, y_{cc}) da curva de centros.

A normal (\mathbf{n}) a uma curva em um dado ponto $P_i = (x_i, y_i)$, é dada de acordo com Kreyszig [18] da seguinte forma:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla C}{|\nabla C|} \quad (270)$$

Sendo

$$C = y_i - f(x_i) = 0 \quad (271)$$

$$\nabla C = -f'(x_i) \cdot \vec{i} + \vec{j} \quad (272)$$

$$|\nabla C| = \sqrt{[f'(x_i)]^2 + 1} \quad (273)$$

onde

\vec{i} = vetor unitário na direção do eixo x ;

\vec{j} = vetor unitário na direção do eixo y ;

$f'(x_i)$ = derivada espacial de $f(x)$ em $x = x_i$.

Substituindo as Equações (272) e (273) na Eq. (270), resulta o seguinte valor para \mathbf{n} :

$$\mathbf{n} = \frac{-f'(x_i)}{\sqrt{[f'(x_i)]^2 + 1}} \cdot \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{[f'(x_i)]^2 + 1}} \cdot \vec{j} \quad (274)$$

Sendo $\mathbf{R} = r \cdot \mathbf{n}$, o vetor de $P_i = (x_i, y_i)$ a $P_c = (x_{cc}, y_{cc})$, o mesmo pode ser calculado como:

$$\mathbf{R} = \overrightarrow{P_i P_c} = P_c - P_i = (x_{cc} - x_i, y_{cc} - y_i) \quad (275)$$

Através da Eq. (274), \mathbf{R} pode ser escrito como:

$$\mathbf{R} = r \cdot \left(\frac{-f'(x_i)}{\sqrt{[f'(x_i)]^2 + 1}} \cdot \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{[f'(x_i)]^2 + 1}} \cdot \vec{j} \right) \quad (276)$$

$$\mathbf{R} = \frac{-f'(x_i) \cdot r}{\sqrt{[f'(x_i)]^2 + 1}} \cdot \vec{i} + \frac{r}{\sqrt{[f'(x_i)]^2 + 1}} \cdot \vec{j} = \left(\frac{-f'(x_i) \cdot r}{\sqrt{[f'(x_i)]^2 + 1}}, \frac{r}{\sqrt{[f'(x_i)]^2 + 1}} \right) \quad (277)$$

Assim, da Eq. (275) e da Eq. (277) encontra-se o seguinte:

$$(x_{cc} - x_i, y_{cc} - y_i) = \left(\frac{-f'(x_i) \cdot r}{\sqrt{[f'(x_i)]^2 + 1}}, \frac{r}{\sqrt{[f'(x_i)]^2 + 1}} \right) \quad (278)$$

$$x_{cc} = x_i - \frac{f'(x_i) \cdot r}{\sqrt{[f'(x_i)]^2 + 1}} \quad (279)$$

$$y_{cc} = y_i + \frac{r}{\sqrt{[f'(x_i)]^2 + 1}} \quad (280)$$

As Equações (279) e (280) acima mostram que, para o cálculo de x_{cc} e y_{cc} , cada ponto P_i da função $f(x)$ deve ser diferenciável em todo o domínio de x . No entanto, nem sempre $f(x)$ será diferenciável em todo o seu domínio, sendo que os pontos $f'(x)$ não for definida serão tratados de uma forma apropriada para obter os pontos da curva de centros associada.

Para a curva de centros ser uma curva representativa de uma função, ou seja, $y_{cc} = g(x_{cc})$, x_{cc} deve ser crescente. Para garantir que x_{cc} seja crescente, tem-se que:

$$\frac{dx_{cc}}{dx_i} > 0 \quad (281)$$

$$\frac{dx_{cc}}{dx_i} = \frac{d}{dx_i} \left(x_i - \frac{f'(x_i) \cdot r}{\sqrt{[f'(x_i)]^2 + 1}} \right) \quad (282)$$

$$\frac{dx_{cc}}{dx_i} = 1 - r \cdot \frac{d}{dx_i} \left(\frac{f'(x_i)}{\sqrt{[f'(x_i)]^2 + 1}} \right) \quad (283)$$

Sendo

$$\frac{d}{dx_i} \left(\frac{f'(x_i)}{\sqrt{[f'(x_i)]^2 + 1}} \right) = \frac{f''(x)}{([f'(x_i)]^2 + 1)^{3/2}} \quad (284)$$

Resulta que:

$$\frac{dx_{cc}}{dx_i} = 1 - r \cdot \frac{f''(x)}{([f'(x_i)]^2 + 1)^{3/2}} \quad (285)$$

Contudo, de acordo com Demidovitch [16]:

$$\frac{f''(x)}{([f'(x_i)]^2 + 1)^{3/2}} = \frac{1}{R_c(x_i)} \quad (286)$$

onde:

$R_c(x_i)$ = raio de curvatura de $f(x)$ em x_i .

Assim, de (281),(285) e (286) resulta que:

$$1 - \frac{r}{R_c(x_i)} > 0 \quad (287)$$

$$1 > \frac{r}{R_c(x_i)} \quad (288)$$

Para curvaturas positivas, ou seja, a curva ter concavidade para cima em x_i , a desigualdade (288) resulta em:

$$R_c(x_i) > r \quad (289)$$

Sendo que para curvaturas negativas a desigualdade (288) não se aplica, pois os pontos da curva de centros sempre são tomados no semi-plano superior à curva do perfil do terreno.

Assim, para que a curva de centros seja uma função, o raio de curvatura da curva do perfil do terreno nos pontos em que a mesma tenha concavidade para cima tem que ser maior que o raio da roda, para R_c diferente de zero. Quando $R_c(x_i)=0$, $f(x)$ será uma reta na região em que se encontra x_i , e dessa forma não haverá problema para determinar x_{cc} .

O resultado acima obtido, no entanto, serve apenas para pontos em que $f(x)$ seja diferenciável. Os pontos em que $f(x)$ não possui derivada, assim como os pontos em que o raio de curvatura do perfil do terreno for menor que o raio da roda, devem ser tratados de uma forma especial como mostrado a seguir, para que a curva de centros seja uma função.

5.1.3.1. Pontos em que $0 < R_c < r$

Sempre que R_c for positivo e menor que o raio da roda, haverá uma situação limite na qual a roda do veículo fará contato com o terreno em dois pontos (P_{ci} e P_{cf}), conforme mostra a Fig. 26, e todo ponto pertencente à curva do perfil do terreno entre P_{ci} e P_{cf} não poderá ser ponto de contato entre a roda do robô e o terreno, não tendo assim ponto correspondente na curva de centros. Já P_{ci} e P_{cf} terão o mesmo ponto correspondente na curva de centro.

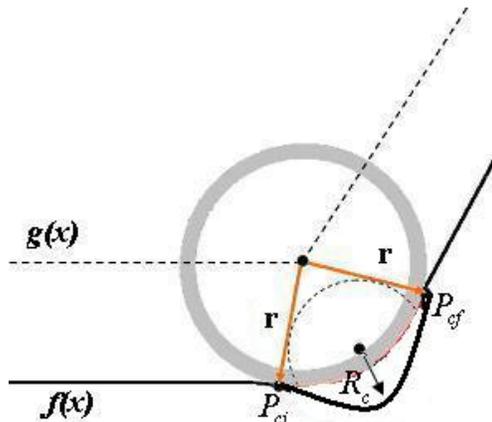


Figura 26 - Pontos de contato quando $R_c < r$.

Para se resolver este problema, o algoritmo que gera a curva de centros, após calcular o valor de $x_{cc}(i)$ associado a um ponto do perfil do terreno $P_i = (x_i, y_i)$, faz a seguinte verificação:

S_1 : $x_{cc}(i)$ é menor que o seu antecessor, ou seja, se $x_{cc}(i) < x_{cc}(i-1)$

Dependendo se a sentença S_1 for verdadeira ou falsa, o algoritmo realiza as ações descritas nas letras (a) e (b) abaixo, respectivamente.

a) Se S_1 for verdadeira o algoritmo faz uma varredura em todos os pontos antecessores a $x_{cc}(i)$ até encontrar um $x_{cc}(k)$ tal que $x_{cc}(k) < x_{cc}(i)$. Após encontrar $x_{cc}(k)$ toma-se o valor $y_{cc}(k)$ e o ponto P_{ci} do perfil do terreno associados a tal valor de x_{cc} , sendo que esses pontos já estão armazenados na curva de centros.

Já o ponto P_{cf} é encontrado da seguinte forma, a partir de $P_i = (x_i, y_i)$ calculam-se os valores dos $x_{cc}(j)$ dos pontos subsequentes a P_i até que se encontre um $x_{cc}(h)$ tal que $x_{cc}(h) > x_{cc}(k)$. Nesse caso o ponto $P_j = (x_j, y_j)$ do perfil do terreno associado a $(x_{cc}(h), y_{cc}(h))$ será o ponto P_{cf} . Todos os

pontos do perfil do terreno entre P_{ci} e P_{cf} não possuirão pontos associados na curva de centros.

- b) Se S_1 for falso, então calcular-se-á o valor de $y_{cc}(i)$ através da Eq. (280) associado ao ponto P_i e então o ponto $(x_{cc}(i), y_{cc}(i))$ será armazenado como um ponto da curva de centros correspondente ao P_i do perfil do terreno.

Através do algoritmo acima, pode-se detectar a situação de degeneração da curva de centros sem a necessidade de se calcular a segunda derivada de $f(x)$.

5.1.3.2.

Pontos em que $f(x)$ não possui derivada espacial

As Equações (279) e (280) não se aplicam para o cálculo das coordenadas x e y da curva de centros nos pontos da curva do perfil do terreno em que $f(x)$ não possui derivada.

Por isso, os pontos do perfil do terreno que não possuem derivada devem ter um tratamento especial, sendo que para facilitar a análise de tal situação esses pontos serão divididos em dois grupos, a saber:

- a) Pontos $(x_i, f(x_i))$ que não possuem derivada e que existe um número real ε positivo e tão pequeno quanto se queira, tal que $f'(x_i - \varepsilon) > f'(x_i + \varepsilon)$.

Nesse tipo de caso a roda do veículo irá girar em torno desse ponto como se a mesma estivesse pivotada nele, e a trajetória do centro desta roda será um arco de circunferência com centro em $(x_i, f(x_i))$, como mostrado na Fig. 27.

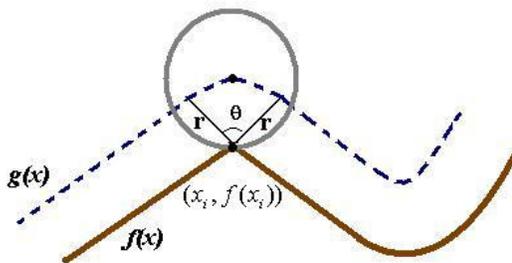


Figura 27 - Situação de ponto de degeneração da curva do perfil do terreno em que a roda gira em torno do mesmo.

Assim, em tais casos um único ponto $(x_i, f(x_i))$ terá associado a si na curva de centros um arco de circunferência. Para definir esse arco de circunferência é preciso determinar o valor de seu ângulo central θ . De acordo com a Fig. 28, θ pode ser calculado da seguinte forma:

$$\theta = \pi - |\alpha_1| - |\alpha_2| \tag{290}$$

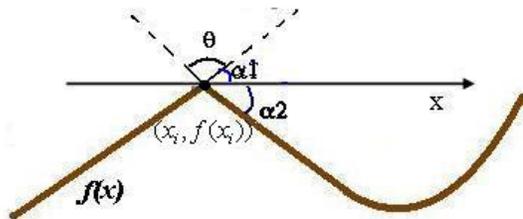


Figura 28 - Relação entre θ , α_1 e α_2 .

Sendo que, α_1 e α_2 são dados por:

$$\alpha_1 = a \tan(f'(x_i - \varepsilon)) \tag{291}$$

$$\alpha_2 = a \tan(f'(x_i + \varepsilon)) \tag{292}$$

As coordenadas x e y dos pontos do arco de circunferência gerado por este tipo de degeneração serão:

$$x_{cc} = x_i + r \cdot \cos(\lambda_k) \tag{293}$$

$$y_{cc} = y_i + r \cdot \text{sen}(\lambda_k) \tag{280}$$

onde

$$\lambda_k \in [\alpha_1, \alpha_1 + \theta] \tag{281}$$

O programa implementado utiliza dez pontos para gerar o arco de circunferência discretizado, ou seja, $k = 1, \dots, 10$.

- b) Pontos em que $f(x_i)$ não possui derivada e existe um número real ε positivo e tão pequeno quanto se queira, tal que $f'(x_i - \varepsilon) < f'(x_i + \varepsilon)$. Neste tipo de situação, ocorrerá assim como no caso em que o raio de curvatura é menor que o raio da roda, que a mesma irá possuir dois pontos de contato com o solo (Fig. 29). Sendo que os pontos do terreno que se enquadrarem neste caso terão um tratamento igual ao dos pontos analisados no item 5.1.3.1.

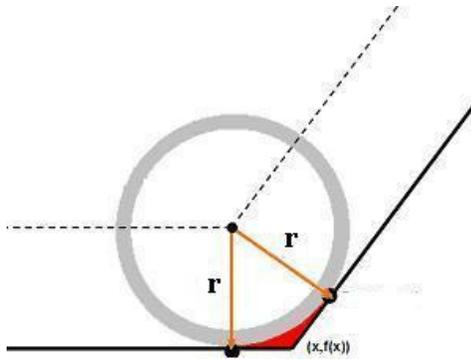


Figura 29 - Grupo de pontos degenerados em que $f'(x_i - \varepsilon) < f'(x_i + \varepsilon)$.

Os pontos da curva de centros junto com os pontos da curva do perfil do terreno associados àqueles são armazenados em uma tabela chamada Tab_curva_centros. Os campos de Tab_curva_centros são:

x_i = valor x do ponto de contato P_i na curva do terreno;

y_i = valor y do ponto de contato P_i na curva do terreno;

x_{cc_i} = valor x pertencente à curva de centros associado ao ponto de contato

P_i ;

y_{cc_i} = valor y pertencente à curva de centros associado ao ponto de contato

P_i .

5.1.4. Estado inicial

O estado inicial do veículo deve ser informado pelo usuário a este módulo, com exceção do ângulo de inclinação inicial do robô para o modelo de corpo rígido do sistema, que é calculado pelo programa. Assim, o usuário deve entrar com $(x_c, y_c, \alpha, \dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{\alpha})$, sendo que para o modelo de corpo rígido o usuário não informa α , pois o mesmo é calculado pelo programa. O cálculo do ângulo de inclinação inicial (α_0) do robô no modelo de corpo rígido é feito de acordo com o procedimento a seguir.

Através do conhecimento das coordenadas do centro de massa (CM) do veículo robótico (x_c, y_c) , faz-se o robô rotacionar em torno deste ponto, com α pertencente ao intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ até se encontrar um ângulo α_0 que minimize a soma das distâncias em y dos centros das rodas à curva de centros (Fig. 30).

Assim, α_0 é dado por:

α_0 é tal que $E(\alpha_0) = \min E(\alpha)$, e

$$E(\alpha) = |E_1| + |E_2| \quad (282)$$

$$E_1 = g(x_{c1}) - y_{c1} \quad (283)$$

$$E_2 = g(x_{c2}) - y_{c2} \quad (284)$$

ou seja, o programa irá buscar o ângulo de rotação do robô em torno de seu CM que resulte em um melhor ajuste do robô ao solo.

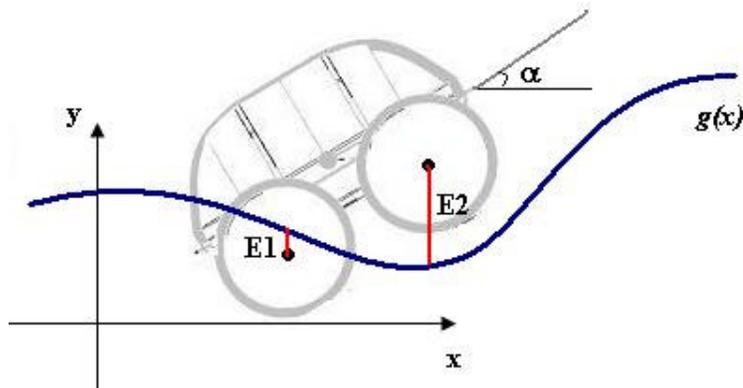


Figura 30 - Parâmetros envolvidos no ajuste inicial do ângulo α

5.2.

Módulo II: Ajuste do veículo robótico

Este módulo tem a tarefa de ajustar o robô ao terreno, sendo que o mesmo possui duas implementações, uma para o modelo do veículo como corpo rígido e a outra para o veículo modelado com suspensão flexível.

5.2.1.

Implementação para o modelo de corpo rígido

Para o modelo de corpo rígido é necessário ajustar as coordenadas (x_c, y_c, α) do veículo a cada novo estado calculado, devido ao cálculo das mesmas ser aproximado e não exato, pois a cada passo de iteração existirão erros de segunda ordem que precisam ser eliminados caso contrário o veículo descolaria do terreno, mesmo com normais positivas, o que seria impossível. Esse ajuste se faz através da fixação do centro das rodas do veículo robótico sobre a curva de centros, pois sempre que isso ocorrer resultará que as rodas do robô estão em

contato com o solo em um único ponto, e por consequência o robô estará ajustado ao terreno (Fig. 31).

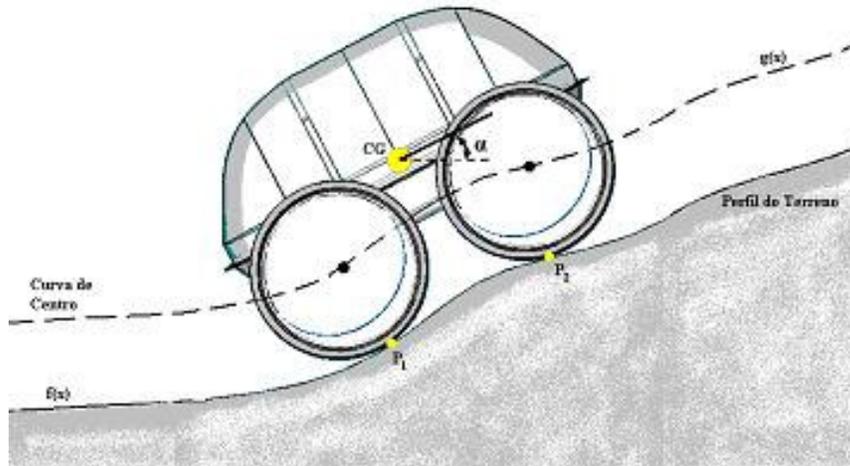


Figura 31 – Ajuste do veículo através da fixação do centro das rodas sobre a curva de centros ($g(x)$).

Para fazer esse ajuste, fixa-se a coordenada x_c e calculam-se os novos valores de y_c e α que melhor ajustem o robô ao terreno. Para isso, procura-se um ângulo $\bar{\alpha}$ no intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ que faça com que os erros E_1 e E_2 definidos em (283) e (284), respectivamente, tornem-se iguais. Assim, para o ângulo $\bar{\alpha}$ de inclinação do veículo resultará o seguinte:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow E_1 - E_2 = 0 \tag{285}$$

Definindo:

$$dE(\alpha) = E_1 - E_2 \tag{286}$$

O ângulo $\bar{\alpha}$ será então a raiz da função dE em torno do ângulo α , ou então pode-se escolher um certo valor de tolerância (tol) tal que:

$$|dE(\alpha)| \leq tol \tag{287}$$

E $\bar{\alpha}$ será o ângulo que torna a Eq. (287) verdadeira.

Uma vez encontrado $\bar{\alpha}$, calcula-se o erro médio (\bar{E}) e o valor de \bar{y}_c como mostrado abaixo:

$$\bar{E} = \frac{E_1 + E_2}{2} \tag{288}$$

$$\bar{y}_c = y_c + \bar{E} \tag{289}$$

Após calcular $\bar{\alpha}$ e \bar{y}_c atualiza-se as coordenadas (x_c, y_c, α) do sistema, sendo o seus novos valores os seguintes:

$$x_c^N = x_c \tag{290}$$

$$y_c^N = \bar{y}_c \tag{291}$$

$$\alpha^N = \bar{\alpha} \tag{292}$$

5.2.2. Implementação para o modelo de suspensão flexível

Neste modelo, o veículo possui dois graus de liberdade adicionais, e por isso as coordenadas generalizadas não precisam ser corrigidas a cada iteração devido a erros de segunda ordem.

O único cálculo que preciso ser realizado é o do deslocamento das suspensões, pois as mesmas é que irão ajustar o veículo ao solo. Devido às inércias das suspensões e das rodas serem desprezadas, as suspensões nunca poderão se distender, podendo somente estar em compressão ou relaxadas. Desta forma, uma suspensão i deve ter:

$$\xi_i \leq 0 \tag{293}$$

O deslocamento ξ_i da suspensão é calculado da seguinte forma: a partir do conhecimento das coordenadas generalizadas do sistema (x_c, y_c, α) , calculam-se as coordenadas do centro da roda i (x_{ci}, y_{ci}) através da interseção entre a reta normal ao chassi do veículo passando por P^i (ponto em que a suspensão da roda i é fixada ao chassi do robô) e a curva do perfil do terreno $(f(x))$, conforme mostra a Fig. 32.

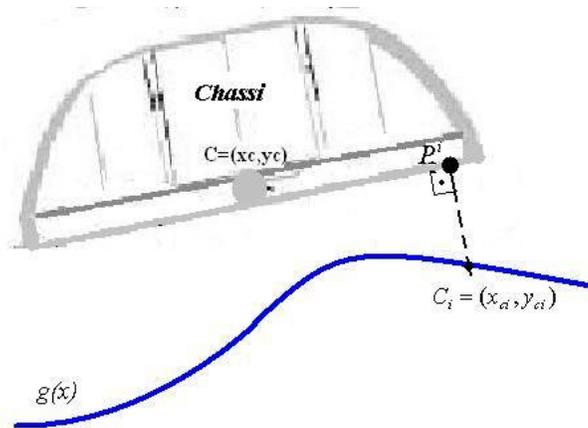


Figura 32 - Esquema para o cálculo do centro da roda i (C_i).

Após se calcular $C_i = (x_{ci}, y_{ci})$, encontra-se ξ_i através da Eq. (294) abaixo.

$$\xi_i = -(x_c - x_{ci}) \cdot \text{sen} \alpha + (y_c - y_{ci}) \cdot \text{cos} \alpha \quad (294)$$

Assim, calculando C_1 e C_2 e substituindo $i = 1, 2$ na Eq. (294), encontra-se:

$$\xi_1 = -(x_c - x_{c1}) \cdot \text{sen} \alpha + (y_c - y_{c1}) \cdot \text{cos} \alpha \quad (295)$$

$$\xi_2 = -(x_c - x_{c2}) \cdot \text{sen} \alpha + (y_c - y_{c2}) \cdot \text{cos} \alpha \quad (296)$$

Como já mencionado anteriormente, se algum dos deslocamentos ξ_1 ou ξ_2 calculados através de (295) e (296) for maior que zero, então altera-se o seu valor para zero e as coordenadas do centro da roda associada serão dadas pelas Equações (1) e (2) ou (3) e (4), respectivamente, e a roda associada com $\xi_i = 0$ descolou do terreno.

5.3.

Módulo III: Cálculo dos parâmetros do problema dinâmico

Este módulo é responsável pelos cálculos dos parâmetros para a resolução do problema dinâmico associado ao robô. Esses parâmetros são descritos a seguir.

5.3.1.

Ângulos e pontos de contato

O ângulo de contato (γ_i) e o ponto de contato (x_i, y_i) associados a roda i , são calculados a partir da coordenada x do centro da roda (x_{ci}). Sendo que as coordenadas do ponto de contato na curva do perfil do terreno é encontrado através de uma interpolação linear na tabela que armazena os pontos da curva de centros e os seus pontos associado na curva do perfil do terreno (Tab_curva_centros), como abaixo:

$$p = \frac{x_{cc}(i) - x_{ci}}{x_{cc}(i) - x_{cc}(i-1)} \quad (297)$$

$$x_i = x(i-1) + p \cdot x(i) \quad (298)$$

$$y_i = y(i-1) + p \cdot y(i) \quad (299)$$

onde

$x_{cc}(i)$ = valor do campo x_{cc_i} da tabela Tab_curva_centros imediatamente maior ou igual a x_{ci} ;

$x_{cc}(i-1)$ = valor do campo x_{cc_i} da tabela Tab_curva_centros imediatamente menor ou igual a x_{ci} ;

$x(i)$ = valor do campo x_i da tabela Tab_curva_centros associado a $x_{cc}(i)$;

$x(i-1)$ = valor do campo x_i da tabela Tab_curva_centros associado a $x_{cc}(i-1)$;

$y(i)$ = valor do campo y_i da tabela Tab_curva_centros associado a $x_{cc}(i)$;

$y(i-1)$ = valor do campo y_i da tabela Tab_curva_centros associado a $x_{cc}(i-1)$.

O ângulo de contato será:

$$\gamma_i = a \tan\left(\frac{y(i) - y(i-1)}{dx}\right) \quad (300)$$

5.3.2.

Parâmetros de restrição e taxa de deslocamento da suspensão

Se o modelo utilizado para a representação do robô for o de corpo rígido, então se calcularão os parâmetros de restrição, por:

$$E_1 \equiv (\cos \alpha + g'_1 \cdot \text{sen} \alpha) \cdot L_1 - (\text{sen} \alpha - g'_1 \cdot \cos \alpha) \cdot h_1 \quad (301)$$

$$A_1 \equiv [(\cos \alpha + g'_1 \cdot \text{sen} \alpha) \cdot h_1 + (\text{sen} \alpha - g'_1 \cdot \cos \alpha) \cdot L_1] \cdot \dot{\alpha}^2 - g''_1 \cdot \dot{x}_{c1}^2 \quad (302)$$

$$g'_1 = \frac{g(x_{c1} + dx) - g(x_{c1})}{dx} \quad (303)$$

$$g''_1 = \frac{g'(x_{c1} + dx) - g'(x_{c1})}{dx} \quad (304)$$

Se $\gamma_1 \neq \gamma_2$ então calcula-se:

$$E_2 \equiv (\cos \alpha + g'_2 \cdot \text{sen} \alpha) \cdot L_2 + (\text{sen} \alpha - g'_2 \cdot \cos \alpha) \cdot h_2 \quad (305)$$

$$A_2 \equiv -[(\text{sen} \alpha - g'_2 \cdot \cos \alpha) \cdot L_2 - (\cos \alpha + g'_2 \cdot \text{sen} \alpha) \cdot h_2] \cdot \dot{\alpha}^2 - g''_2 \cdot \dot{x}_{c2}^2 \quad (306)$$

$$g'_2 = \frac{g(x_{c2} + dx) - g(x_{c2})}{dx} \quad (307)$$

$$g''_2 = \frac{g'(x_{c2} + dx) - g'(x_{c2})}{dx} \quad (308)$$

Já se o modelo for de suspensão flexível, então calculam-se as taxas de deslocamento no tempo das suspensões ($\dot{\xi}_1$ e $\dot{\xi}_2$), como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= [\tan(\alpha - \gamma_1) \cdot \cos \alpha - \text{sen} \alpha] \cdot \dot{x}_c + [\tan(\alpha - \gamma_1) \cdot \text{sen} \alpha - \cos \alpha] \cdot \dot{y}_c \\ &+ [(h_1 + \xi_1) \cdot \tan(\alpha - \gamma_1) - (x_c - x_{c1}) \cdot \cos \alpha - (y_c - y_{c1}) \cdot \text{sen} \alpha] \cdot \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (309)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= [\tan(\alpha - \gamma_2) \cdot \cos \alpha - \text{sen} \alpha] \cdot \dot{x}_c + [\tan(\alpha - \gamma_2) \cdot \text{sen} \alpha - \cos \alpha] \cdot \dot{y}_c \\ &+ [(h_2 + \xi_2) \cdot \tan(\alpha - \gamma_2) - (x_c - x_{c2}) \cdot \cos \alpha - (y_c - y_{c2}) \cdot \text{sen} \alpha] \cdot \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (310)$$

5.4.

Módulo IV: Controle de Tração

Esse módulo implementa o controle de tração proposto, tendo assim como tarefa calcular as forças de atrito que devem agir em cada roda para que o veículo tenha o movimento desejado.

A velocidade desejada (V_d) e o ganho proporcional controle (K_p) são dados de entrada desse módulo, sendo os cálculos realizados descritos a seguir:

5.4.1.

Parâmetros associados à V_d

Os parâmetros associados a V_d que precisam ser calculados são: ${}^0V_L, \eta_1, \eta_2, a_0$. A velocidade 0V_L é dada por:

$${}^0V_L = \dot{x}_c \cdot \cos \alpha + \dot{y}_c \cdot \text{sen} \alpha \quad (311)$$

Já os valores dos outros parâmetros irão depender da modelagem aplicada ao sistema, assim tem-se:

a) Modelo de corpo rígido.

$$\eta_1 = g_{11} \cdot \cos \alpha + g_{21} \cdot \text{sen} \alpha \quad (311)$$

$$\eta_2 = g_{12} \cdot \cos \alpha + g_{22} \cdot \text{sen} \alpha \quad (312)$$

$$a_0 = \bar{e}_1 \cdot \cos \alpha + \bar{e}_2 \cdot \text{sen} \alpha \quad (313)$$

onde os coeficientes g_{ij} e \bar{e}_k estão especificados no Capítulo 4.

b) Modelo de suspensão flexível.

$$\eta_1 = \frac{1}{m \cdot \cos(\gamma_1 - \alpha)} \quad (314)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{m \cdot \cos(\gamma_1 - \alpha)} \quad (315)$$

$$a_0 = \zeta_1 \cdot \cos \alpha + \zeta_2 \cdot \text{sen} \alpha - P \cdot \text{sen} \alpha \quad (316)$$

onde os coeficientes ζ_1 e ζ_2 são dados pelas equações (221) e (222), respectivamente, do Capítulo 4.

5.4.2.

Geração da Região Γ das Fat's que podem ser aplicadas ao sistema

A região Γ está definida em (229) do Capítulo 4, sendo que a mesma engloba todos os pares (Fat_1, Fat_2) que satisfazem às seguintes condições: não saturação dos motores de acionamento das rodas, não descolamento das rodas, não deslizamento e controle da velocidade desejada (V_d). Essa região Γ , se existir, será um segmento de reta no plano $Fat_1 \times Fat_2$ conforme visto na Figura 21 do Capítulo 4 e será calculada de forma separada para cada um dos modelos aplicados na análise do sistema robótico.

5.4.2.1.

Geração de Γ para o modelo de suspensão flexível

No modelo de suspensão flexível, pode-se primeiro gerar o domínio D , formado pelas desigualdades:

$$i) |Fat_1| \leq F_{sat} \text{ e } |Fat_2| \leq F_{sat}, \text{ condição de não saturação do motor;}$$

ii) $N_1 > \varepsilon$ e $N_2 > \varepsilon$, condição de não descolamento das normais. Sendo ε um valor limite especificado pelo usuário para as forças normais;

iii) $|Fat_1| \leq \mu \cdot N_1$ e $|Fat_2| \leq \mu \cdot N_2$, condição de não deslizamento das rodas.

Neste modelo, as forças normais N_1 e N_2 podem ser escritas, conforme as Equações (197) e (198) do Capítulo 3, como:

$$N_2 = \Lambda_2 \cdot Fat_2 + \Sigma_2 \quad (317)$$

$$N_1 = \Lambda_1 \cdot Fat_1 + \Sigma_1 \quad (318)$$

onde

$$\Lambda_1 = \tan(\gamma_1 - \alpha) \quad (319)$$

$$\Lambda_2 = \tan(\gamma_2 - \alpha) \quad (320)$$

$$\Sigma_1 = \frac{(K \cdot \xi_1 + c \cdot \dot{\xi}_1)}{\cos(\gamma_1 - \alpha)} \quad (321)$$

$$\Sigma_2 = \frac{(K \cdot \xi_2 + c \cdot \dot{\xi}_2)}{\cos(\gamma_2 - \alpha)} \quad (322)$$

Como nas equações das forças normais as Fat 's não se encontram acopladas, a região D que é formada pela interseção dos três retângulos definidos por (i) a (iii), também será um retângulo no plano $Fat_1 \times Fat_2$. Assim, as forças de atrito Fat_1 e Fat_2 que compõem o domínio D pertencerão a intervalos reais, que serão denominados I_1 e I_2 , respectivamente, onde .

$$I_1 = [fat_1_min, fat_1_max] \quad (323)$$

$$I_2 = [fat_2_min, fat_2_max] \quad (324)$$

Como D será um retângulo e a região Γ resulta em segmento de reta, a mesma ficará definida pelo conhecimento das interseções entre os lados de D e a reta utilizada pelo controle para gerar V_d :

$$\eta_1 \cdot Fat_1 + \eta_2 \cdot Fat_2 = K_p \cdot (V_d - {}^0V_L) - a_0 \quad (325)$$

$$Fat_2 = \frac{K_p \cdot (V_d - {}^0V_L) - a_0}{\eta_2} - \frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot Fat_1 \quad (326)$$

Se após esses cálculos Γ resultar em um conjunto vazio, significa que a velocidade desejada não poderá ser obtida dentro das condições impostas pelo controle. Neste caso, as forças de atrito serão escolhidas de forma a resultar em uma velocidade longitudinal ao chassi do veículo mais próximo possível de V_d , ou seja, Fat_1 e Fat_2 serão escolhidas de forma a minimizar :

$$dV_L = |V_d - V_L| = \left| V_d - \frac{\eta_1 \cdot Fat_1 + \eta_2 \cdot Fat_2 + a_0}{K_p} - {}^0V_L \right| \quad (327)$$

O par (Fat_1, Fat_2) que irá minimizar a Eq. (327) será um dos vértices do retângulo que representa a região D , ou seja, um dos pontos abaixo:

$$P_1 = (fat_1_min, fat_2_min) \quad (328)$$

$$P_2 = (fat_1_min, fat_2_max) \quad (329)$$

$$P_3 = (fat_1_max, fat_2_min) \quad (330)$$

$$P_4 = (fat_1_max, fat_2_max) \quad (331)$$

onde

$$P_i = (Fat_1^i, Fat_2^i) \quad (332)$$

Geometricamente, o resultado acima é equivalente a afirmar que o ponto de um retângulo mais próximo a uma reta (genérica) externa a ele será sempre um de seus vértices.

Assim, o valor de Fat_1^o e Fat_2^o enviado pelo controle ao módulo de cálculo do novo estado do sistema será o do ponto P_i ($i = 1, \dots, 4$) que minimizar a Eq. (327).

Contudo, se Γ for diferente de vazio todos os seus pontos satisfarão às condições (i), (ii) e (iii) acima e ainda a condição de controle de velocidade, sendo que dentre estas infinitas combinações de Fat_1 e Fat_2 podem-se escolher aquelas que por exemplo, minimizam a potência requerida.

5.4.2.2. Cálculo de Γ para o modelo de corpo rígido.

As restrições (i) a (iii) do item 5.4.2.1 acima, que geram a região D, também são empregadas no cálculo de Γ para o modelo de corpo rígido. Neste modelo as normais N_1 e N_2 são, conforme a Eq. (165) do Capítulo 2, da seguinte forma:

$$N_1 = H_{11} \cdot Fat_1 + H_{12} \cdot Fat_2 + \bar{U}_1 \quad (333)$$

$$N_2 = H_{21} \cdot Fat_1 + H_{22} \cdot Fat_2 + \bar{U}_2 \quad (334)$$

onde

H_{ij} = elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz H definida em (163) do Capítulo 2;

\bar{U}_i = i -ésimo elemento do vetor \bar{U} definido em (164) do Capítulo 2.

Através de (333) e (334) verifica-se que as forças de atrito se encontram acopladas nas expressões que calculam as normais, sendo muito difícil, portanto, se calcular a região D de forma isolada. Por isso, é preferível agrupar as condições (ii) e (iii) do item 5.4.2.1 com a equação da velocidade desejada e gerar diretamente Γ . Note que, no caso de suspensão rígida, a região D é sempre um polígono.

Assim, procede-se direto ao cálculo dos intervalos \bar{I}_1 e \bar{I}_2 das Fat_1 e Fat_2 que formarão Γ , utilizando as seguintes condições:

- a) $|Fat_1| \leq F_{sat}$ e $|Fat_2| \leq F_{sat}$;
- b) $N_1 > \varepsilon$ e $N_2 > \varepsilon$;
- c) $|Fat_1| \leq \mu \cdot N_1$ e $|Fat_2| \leq \mu \cdot N_2$;
- d) $\eta_1 \cdot Fat_1 + \eta_2 \cdot Fat_2 = K_p \cdot (V_d - {}^0V_L) - a_0$

Do item (d) acima, resulta a seguinte relação entre Fat_1 e Fat_2 :

$$Fat_2 = \frac{K_p \cdot (V_d - {}^0V_L) - a_0}{\eta_2} - \frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot Fat_1 \quad (335)$$

Substituindo o valor de Fat_2 dado pela Eq. (335) nas desigualdades (a) a (c) acima, e resolvendo para Fat_1 as desigualdades resultantes encontra-se $\bar{I}_1 = [fat_1_min, fat_1_max]$ e utilizando novamente a Eq. (335) encontra-se $\bar{I}_2 = [fat_2_min, fat_2_max]$. Se \bar{I}_1 ou \bar{I}_2 resultar em um conjunto vazio, significa que V_d não poderá ser obtida e a condição (d) acima não será mais válida.

Quando isto acontecer, o programa irá buscar o par (Fat_1, Fat_2) que minimize a função dV_L dada pela Eq. (327). Para isso, o programa primeiro irá discretizar o retângulo resultante da condição (a) acima n_pts pontos. Em seguida irá selecionar todos os pontos que obedecem às condições (b) e (c) acima, gerando assim o conjunto D e então irá tomar o ponto (pertencente a D) que esteja mais próximo à reta de V_d , definida pela condição (d) acima, conforme mostra a Fig. 33.

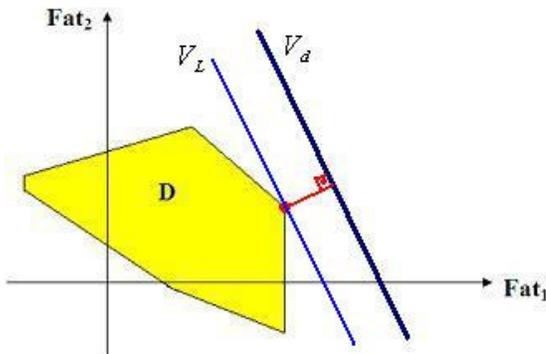


Figura 33 – Retra associada à velocidade V_L mais próxima de V_d .

Assim, os valores das forças de atrito Fat_1^o e Fat_2^o empregadas ao sistema serão as componentes do ponto que minimizar:

$$dV_L = |V_d - V_L| = \left| V_d - \frac{\eta_1 \cdot Fat_1 + \eta_2 \cdot Fat_2 + a_0}{K_p} - {}^0V_L \right| \quad (336)$$

Já se \bar{I}_1 e \bar{I}_2 forem ambos diferentes de vazio, haverá infinitas soluções para se controlar a velocidade, e nesse caso pode-se escolher as forças de atrito que otimizem o consumo de potência.

5.4.3.

Cálculo das forças de atrito que minimizam o consumo de potência

Se no item 5.4.2.1 ou 5.4.2.2, dependendo do modelo empregado na análise do sistema, a região Γ resultar em mais de um ponto, pode-se escolher dentre os pontos que constituem essa região aquele que minimiza a potência, conforme mencionado no Capítulo 4. Os pontos candidatos a minimizar a potência serão os de fronteiras, os pontos onde a derivada da potência se anular e os pontos onde essa derivada não existir. Para o problema aqui analisado a derivada da potência não se anula em nenhum dos pontos do seu domínio, resultando assim que os pontos candidatos a minimizar a potência serão apenas aqueles pertencentes a fronteira do domínio da função e aqueles em que a derivada da potência não existir, os quais são os seguintes:

$$P_1 = \left(fat_min, \frac{K_p \cdot (V_d - {}^0V_L) - a_0 - \eta_1 \cdot fat_min}{\eta_2} \right) \quad (337)$$

$$P_2 = \left(fat_max, \frac{K_p \cdot (V_d - {}^0V_L) - a_0 - \eta_1 \cdot fat_max}{\eta_2} \right) \quad (338)$$

$$P_3 = \left(0, \frac{K_p \cdot (V_d - {}^0V_L) - a_0}{\eta_2} \right) \quad (339)$$

$$P_4 = \left(\frac{K_p \cdot (V_d - {}^0V_L) - a_0}{\eta_1}, 0 \right) \quad (340)$$

Para que P_3 e P_4 sejam candidatos a mínimo de P_T deve-se verificar se eles pertencem a Γ . Assim, a solução ótima será dada pelo o ponto P_i que minimizar:

$$P_T = |Fat_1| \cdot \bar{\Delta}_1 + |Fat_2| \cdot \bar{\Delta}_2 \quad (341)$$

Os coeficientes de Fat_1 e Fat_2 são dados por:

a) Modelo de corpo rígido:

$$\bar{\Delta}_1 \equiv \left| \frac{V_d + h_1 \cdot \dot{\alpha}}{\cos(\gamma_1 - \alpha)} \right| \quad (342)$$

$$\bar{\Delta}_2 \equiv \left| \frac{V_d + h_2 \cdot \dot{\alpha}}{\cos(\gamma_2 - \alpha)} \right| \quad (343)$$

b) Modelo de suspensão flexível:

$$\bar{\Delta}_1 \equiv \left| \frac{V_d + (h_1 + \xi_1) \cdot \dot{\alpha}}{\cos(\gamma_1 - \alpha)} \right| \quad (344)$$

$$\bar{\Delta}_2 \equiv \left| \frac{V_d + (h_2 + \xi_2) \cdot \dot{\alpha}}{\cos(\gamma_2 - \alpha)} \right| \quad (345)$$

5.5.

Módulo V: Cálculo do novo estado do sistema

Esse módulo calcula o novo estado do sistema $(x_c^N, y_c^N, \alpha^N, \dot{x}_c^N, \dot{y}_c^N, \dot{\alpha}^N)$.

5.5.1.

Cálculo do novo estado para o modelo de corpo rígido.

No modelo de corpo rígido o novo estado é calculado utilizando série de Taylor, através da expansão das variáveis de estado em torno do valor das mesmas no estado atual, assim resulta:

$$x_c^N = x_c + \dot{x}_c \cdot dt + \frac{\ddot{x}_c \cdot dt^2}{2} \quad (346)$$

$$y_c^N = y_c + \dot{y}_c \cdot dt + \frac{\ddot{y}_c \cdot dt^2}{2} \quad (347)$$

$$\alpha^N = \alpha + \dot{\alpha} \cdot dt + \frac{\ddot{\alpha} \cdot dt^2}{2} \quad (348)$$

$$\dot{x}_c^N = \dot{x}_c + \ddot{x}_c \cdot dt \quad (349)$$

$$\dot{y}_c^N = \dot{y}_c + \ddot{y}_c \cdot dt \quad (350)$$

$$\dot{\alpha}^N = \dot{\alpha} + \ddot{\alpha} \cdot dt \quad (351)$$

onde

$(x_c, y_c, \alpha, \dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{\alpha}) =$ variáveis do estado atual;

$dt =$ intervalo de tempo entre dois estados, sendo o seu valor constante (intervalo de tempo do passo da simulação).

Há de se chamar atenção para o valor do intervalo de tempo (dt) entre estados consecutivos, pois quanto menor é esse valor mais preciso é o cálculo do novo estado. Contudo, deve-se levar em consideração o custo computacional de um dt muito pequeno. Portanto, deve-se buscar um valor adequado de (dt), o qual gere uma precisão adequada com um custo computacional que não comprometa a atuação do controle sobre o sistema.

5.5.2.**Cálculo do novo estado para o modelo de suspensão flexível.**

No modelo de suspensão flexível, se utilizou a função ODE45 do MatLab 6.5 para se calcular o novo estado do sistema. Essa função utiliza o método de Runge-Kutta de quarta e quinta ordem com passo variável.

O próximo capítulo apresenta os resultados obtidos nas simulações do sistema utilizando a técnica de controle proposta e um controle de tração PI (proporcional-integral).