

### 3

## Programação linear aplicada ao problema da mistura de carvões

Desde a década de 80, por incentivo da SIDERBRÁS, o modelo de programação linear da mistura de carvões possui o papel de facilitador no processo de contratação de carvões na siderurgia brasileira. Um dos trabalhos de maior destaque no campo da pesquisa operacional aplicada à mistura de carvões foi realizado por Yazaki (1991), que desenvolveu uma técnica de programação matemática para auxiliar no planejamento e programação de suprimento de carvão mineral para a indústria siderúrgica. Desde então, algumas pesquisas têm sido desenvolvidas com o propósito de contribuir para a melhoria desse processo.

O presente capítulo comenta de maneira sucinta tópicos relevantes de alguns trabalhos sobre o tema, destacando a aplicação prática da programação linear no problema da mistura de carvões para produção de coque siderúrgico.

Além de conceituar o modelo clássico da mistura de carvões com sua função objetivo e principais restrições, também destaca a construção e aplicação das “curvas de demanda” desenvolvidas por Gandolpho (1996) que auxiliam na determinação da quantidade ótima de um carvão para um dado preço, ou, fixada uma quantidade, o preço que se está disposto a pagar por tal carvão. Com base na pesquisa desenvolvida por Campos (1997), destaca-se a necessidade e importância da aplicação as técnicas de análise de sensibilidade, considerando importantes variações na estrutura do modelo, além de discutir a interpretação econômica que se pode dar a alguns elementos do modelo.

Encerra-se o capítulo apresentando as principais penalidades contratuais aplicadas aos fornecedores por desvios de especificação dos carvões contratados, enfatizando as principais conseqüências que um desvio pode trazer sobre a mistura de carvões e os custos gerados por tais desvios de qualidade.

### 3.1. Modelo clássico da mistura de carvões

Devido à elevada quantidade de carvões utilizados por uma siderúrgica durante o ano, da ordem de milhões de toneladas, há uma concentração de esforços muito grande no sentido de gerenciar de maneira otimizada a aquisição, a estocagem e a utilização desses carvões, o que é alcançado através de um modelo de otimização para apoio à decisão (Campos, 1997).

De posse das estimativas de preços e da qualidade dos carvões, obtém-se, a partir do modelo de otimização, as quantidades a serem utilizadas de cada carvão e outras informações relevantes ao processo de negociação.

O modelo da mistura de carvões para coque siderúrgico, utilizado nos níveis tático (negociação de contratos anuais de fornecimento) e operacional (programação das misturas de carvões) teve seu incentivo e desenvolvimento na siderurgia brasileira por iniciativa da SIDERBRÁS em parceria com a siderúrgica espanhola ENSIDESA, desde 1980 (Yazaki, *apud* Campos, 1997, p. 10).

Um aspecto importante, destacado por Campos (1997), é que na prática o modelo utilizado tem como objetivo minimizar o custo do coque e não o da mistura para produção de coque. Como as relações entre as propriedades do coque e as dos carvões são estabelecidas por funções não-lineares complexas, nos modelos práticos essas funções são linearizadas para simplificar o trabalho. Mesmo se tratando de um modelo linear para mistura de carvões, as análises são semelhantes às do modelo real.

Para efeito de ilustração, é apresentado um modelo simplificado com o propósito de facilitar o entendimento de sua definição e utilização, visto que o modelo completo pode assumir proporções bem maiores e se tornar bem mais complexo pela inclusão de outros detalhes em sua estrutura, o que dificultaria o entendimento dos mecanismos técnico-econômicos envolvidos no problema.

Em função das considerações e definições apresentadas por Gandolpho (1996) e Campos (1997) pode-se definir o modelo clássico da mistura de carvões como:

- **Definições:**

$i$  = índice de cada uma das  $m$  propriedade de controle.

$j$  = índice de cada um dos  $n$  carvões.

$c_j$  = preço de aquisição de cada carvão  $j$ , em dólares por tonelada.

$q_j$  = quantidade de cada carvão  $j$  que participa da mistura de custo mínimo, em toneladas.

$p_{ij}$  = contribuição unitária do carvão  $j$  para a propriedade  $i$ , em valor absoluto ou porcentagem.

$QTCA$  = quantidade total de carvão considerando os que compõem a mistura ótima, em toneladas.

$LS_i$  = Limite Superior da participação de cada propriedade  $i$  na quantidade total de carvão da mistura ótima, em valor absoluto ou porcentagem.

$LI_i$  = Limite Inferior da participação de cada propriedade  $i$  na quantidade total de carvão da mistura ótima, em valor absoluto ou porcentagem.

- **Função Objetivo**: Minimiza o custo total da mistura de carvões, que é definido pelo somatório do produto entre a quantidade  $q_j$  de carvão e seu respectivo custo unitário  $c_j$ .

$$\sum_{j=1}^n c_j q_j$$

Sujeito a:

- **Restrições de Qualidade – LS**: Estabelece o limite superior para a proporção de uma determinada propriedade dos carvões na mistura.

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} q_j \leq LS_i * QTCA, \quad \forall i.$$

- **Restrições de Qualidade – LI**: Estabelece o limite inferior para a proporção de uma determinada propriedade dos carvões na mistura.

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} q_j \geq LI_i * QTCA, \quad \forall i.$$

- **Restrição de Quantidade**: Define a quantidade total mínima de mistura que deve ser preparada, em função da demanda anual.

$$\sum_{j=1}^n q_j = QTCA$$

- **Restrições de Não-Negatividade**: Estabelecem que as quantidades dos carvões que comporão a mistura sejam não-negativas.

$$q_j \geq 0, \quad \forall j.$$

A partir da solução ótima encontrada após a resolução do problema, isto é, após a otimização do modelo, parte-se para o estudo individual de cada carvão disponível e dos que fazem parte da mistura ótima, onde todos os aspectos, possibilidades e características de tais carvões, inclusive o preço, são analisadas, facilitando e aumentando a eficiência do processo de negociação.

### **3.2. Curvas de demanda**

Após a definição e implementação do modelo de programação linear, como descrito acima, com os dados dos carvões disponíveis, geram-se as misturas ótimas. Determinadas as quantidades ótimas de cada carvão, torna-se possível e interessante elaborar curvas de demanda desses carvões fazendo variar continuamente o preço de cada um deles a partir de um dado valor. Assim, pode-se relacionar quantidade ótima com preço de compra, o que pode auxiliar muito o analista de suprimentos durante o processo de negociação do carvão (Gandolpho, 1996).

Segundo Gandolpho (1996), a curva de demanda, também denominada de Curva em S na siderurgia devido ao seu formato característico, é útil na decisão de quanto comprar de um carvão em função do seu preço de mercado, ou ainda, na definição do valor unitário de tal carvão para a empresa, fixada a sua quantidade de utilização.

Através de sua pesquisa, Gandolpho (1996) constatou que a quantidade ótima de um carvão, na mistura, muda de maneira brusca e inesperada, conforme mostrado na Figura 3, decorrente de uma alteração em seu preço de aquisição. E, durante essas variações na quantidade ótima, em função do preço, alguns eventos importantes podem ocorrer, dentre eles: a substituição de um carvão por outro, um carvão deixar a mistura e alguma restrição se tornar relaxada, uma restrição deixar de ser ativa e outra se tornar ativa ou, ainda, um novo carvão ingressar na mistura e uma restrição se tornar ativa.

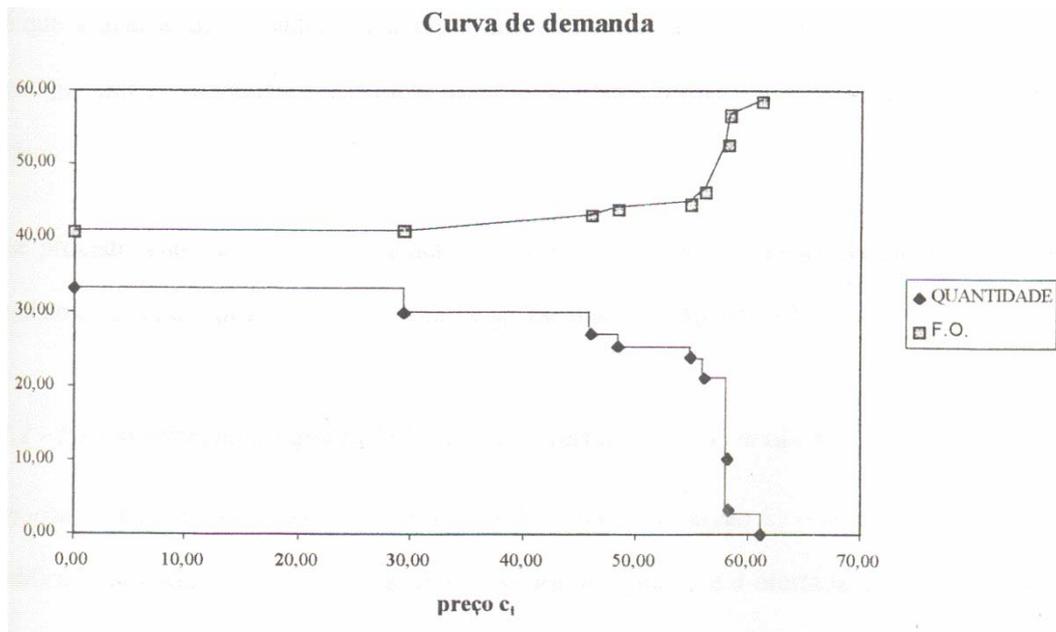


Figura 5: Curva em S x Função Objetivo.

Fonte: Gandolpho, 1996, p. 15.

Observando o comportamento das curvas apresentadas na Figura 5 é possível destacar aspectos muito interessantes. Assim como descrito por Gandolpho (1996), o aumento do preço de um carvão não necessariamente implica na diminuição da sua quantidade na mistura ótima, no entanto, para determinados preços (pontos críticos) ocorre uma mudança brusca na quantidade do carvão, culminando em uma mudança de base, com o ingresso ou saída de algum carvão da mistura, e com alguma restrição ficando e/ou deixando de estar ativa. Outra constatação importante é a variação crescente da função objetivo (F.O.) decorrente do aumento do preço do referido carvão.

As descontinuidades características das curvas em S tornam visíveis as “faixas de utilização” do carvão quando o preço é parametrizado, obtendo-se quantidades ótimas do mesmo, e as “faixas de preço” quando a quantidade é parametrizada, obtendo-se o valor marginal do carvão (Gandolpho, 1996).

### 3.3. Análise de sensibilidade e interpretação econômica

Mais importante do que resolver e encontrar uma solução ótima para um problema de programação linear é estudar o comportamento da solução encontrada quando o problema original é submetido a situações críticas, como por exemplo, uma mudança de cenário econômico, produtivo ou mercadológico, considerando situações otimistas e pessimistas, como o aumento ou diminuição

da disponibilidade de um recurso produtivo ou dos limites de quantidade ou qualidade de um produto, o acréscimo de mais um recurso ou restrição de quantidade e/ou qualidade, o estudo da viabilidade de exercer uma nova atividade, de fabricar um novo produto ou comprar um novo insumo. Neste processo também se torna interessante estudar um aumento ou redução do preço de venda ou compra de um produto ou insumo e, também, a alteração do consumo unitário de uma atividade em relação a um recurso ou a contribuição unitária de um insumo em relação a uma quantidade ou qualidade. Tais alterações podem ser analisadas com certa facilidade fazendo uso das técnicas de análise de sensibilidade ou análise pós-ótima.

No que se refere ao modelo da mistura de carvões, como o objetivo do modelo é minimizar o custo total da mistura, atendendo a requisitos de qualidade e quantidade, se torna interessante utilizar a análise pós-ótima para estudar o valor das restrições, que compreendem as de qualidade, de balanço e de baixo voláteis, e o valor que cada carvão tem para o processo. Neste sentido, é importante analisar o que acontece com a estrutura final do problema quando o mesmo é submetido a pelo menos três tipos de alterações: mudança nos preços dos carvões disponíveis para formação de mistura, aumento ou diminuição dos limites de qualidade dos carvões e modificação um ou mais coeficientes tecnológicos dos carvões, alterando com isso a contribuição unitária de um ou mais carvões em relação a uma ou mais propriedades (Campos, 1997).

Uma redução no preço de um carvão que está fora da base pode favorecer o seu ingresso na mistura ótima, caso sua contribuição percentual em relação aos limites de qualidade favoreçam tal evento. Assim como um aumento no preço de um carvão que momentaneamente pertence à mistura ótima pode causar sua saída da base. De forma análoga, uma variação positiva no limite inferior e uma variação negativa no limite superior das restrições de qualidade acabam por restringir mais ainda o campo de soluções do problema, favorecendo uma mudança de base ou tornando o problema infactível. No caso de alteração em um ou mais coeficientes tecnológicos dos carvões, duas situações distintas podem ocorrer: se o coeficiente alterado for de uma variável não básica as conseqüências de tal alteração podem ser facilmente observadas e analisadas e, dependendo do nível de tal alteração, poderá haver uma mudança de base com o ingresso de um novo carvão à mistura ou, simplesmente, a saída de algum carvão da mistura. Mas se o coeficiente alterado for de uma variável básica as conseqüências de tal alteração se tornam mais complexas de serem analisadas, pois a matriz inversa dos coeficientes

iniciais das variáveis básicas na solução ótima são alterados, obrigando que o modelo seja novamente otimizado. Nos três cenários de alterações citados acima, excetuando-se casos de degenerescência (primal ou dual), haverá variação no custo total da mistura (valor da função objetivo).

Uma interpretação econômica para o problema da mistura de carvões é apresentada com bastante propriedade por Campos (1997), de onde pode-se destacar três importantes conceitos: taxa de substituição, valores duais e custo reduzido.

Considerando a aplicação do método Simplex, no ótimo as variáveis não básicas possuem valor nulo e as variáveis básicas são representadas pelos respectivos termos independentes, que são determinados multiplicando-se a matriz inversa dos coeficientes iniciais das variáveis básicas na solução ótima pela matriz dos termos independentes iniciais do problema ( $B^{-1} * b$ ). No entanto, fazendo diferente de zero alguma das variáveis não básicas, todas as outras variáveis dependentes desta terão seus valores alterados de menos o produto entre o coeficiente tecnológico final na coluna da variável não básica  $k$  e a variação atribuída à mesma ( $-c_k * \Delta x_k = -B^{-1} * N_k * \Delta x_k$ ), onde  $N_k$  é a coluna dos coeficientes tecnológicos iniciais da variável não básica cujo valor foi alterado. No tableau final, os coeficientes tecnológicos  $c_k$  são também denominados de taxa de substituição ou “rate of”, pois indica o quanto da variável  $x_j$  é substituído pela variável não básica  $x_k$ , ou seja,  $(\partial x_j / \partial x_k)$ .

“Os valores duais, também chamados de preço sombra, utilidade marginal ou valor intrínseco, informam o valor que uma restrição ou recurso tem para o problema, independente dos preços de mercado” (Campos, 1997, p. 22). Se o problema de programação linear em estudo for, por exemplo, de alocação de recursos, o valor dual diz por quanto se está disposto a vender uma unidade de um determinado recurso ao invés de utilizá-lo na produção. O valor que uma restrição ou recurso tem para o problema é definido pela variação total que se pode causar no valor da função objetivo (F.O.) quando uma variação unitária é provocada na disponibilidade do referido recurso.

No caso do problema da mistura de carvões, quando se altera, por exemplo, um limite de qualidade da mistura, faz-se necessário um reajuste nas quantidades dos carvões utilizados para que tal restrição de qualidade continue sendo atendida. A variação total do custo da mistura pode ser determinada pelo somatório do produto das variações das quantidades de cada carvão pelo seu respectivo custo unitário. Outra maneira de determinar a variação total do custo

da mistura é aplicando diretamente os valores duais apresentados no tableau ótimo do método simplex. Considerando que os efeitos do aumento ou da redução de um limite de qualidade da mistura (alteração nos termos independentes) são similares ao aumento ou redução da disponibilidade de um recurso, e que tal aumento ou redução de disponibilidade de recurso corresponde, respectivamente, à redução ou aumento da folga de tal recurso, pode-se então determinar a variação total do custo da mistura apenas somando o produto entre a variação das folgas dos recursos que foram alterados e seus respectivos coeficientes na linha da função objetivo, no tableau final. Tais coeficientes são denominados “custos reduzidos das folgas”, e representam, no ótimo, a utilidade marginal dos recursos ou, simplesmente, os valores duais.

Custo reduzido é o nome dado aos coeficientes das variáveis na linha da função objetivo no tableau final do método simplex. Possuem esse nome porque são obtidos pela redução dos coeficientes iniciais da função objetivo através de operações elementares aplicadas sobre as linhas do tableau (pivotamentos). No tableau ótimo, o custo reduzido de cada variável básica é zero, o de cada variável não básica original do problema expressa a taxa de decréscimo ou de acréscimo, dependendo da direção de otimização, do valor da função objetivo, decorrente da substituição de uma variável básica por uma não básica. Já o custo reduzido de cada variável de folga ou de excesso, dependendo do tipo de restrição, fornece o valor dual de cada uma das restrições do problema.

Aplicado ao problema da mistura de carvões, o custo reduzido de um carvão que não pertence à mistura ótima pode ser interpretado como a taxa de aumento no custo total da mistura provocado por uma variação positiva na quantidade de tal carvão (Campos, 1997). Essa alteração do custo total é fácil de ser entendida, pois, como discutido na definição de taxa de substituição, se um carvão que não pertence à mistura tiver sua quantidade aumentada, alguns dos carvões que fazem parte da mistura terão suas quantidades reajustadas para que as restrições de qualidade e de quantidade do problema continuem sendo satisfeitas. Como consequência, o custo total da mistura terá seu valor alterado.

### **3.4.**

#### **Avaliação dos custos de desvios de especificação**

Campos (1997) trata em parte de sua pesquisa dos custos inerentes aos desvios de especificação no fornecimento de carvões e propõe uma metodologia para o cálculo das penalidades a serem aplicadas em decorrência de tais

desvios. Esta seção aborda os aspectos mais relevantes do referido trabalho, destacando algumas considerações, análises e conclusões importantes.

Conforme mencionado na seção 2.3, que apresenta as características dos contratos de fornecimento de carvões, na cláusula contratual que se refere às especificações do carvão, algumas delas são classificadas como “garantidas” pelo fornecedor, como o teor de umidade, o de cinzas, o de enxofre e o de matéria volátil. Caso o percentual de alguma dessas propriedades esteja excedendo o especificado em contrato, comprometendo a qualidade da mistura, penalidades contratuais são impostas ao fornecedor a fim de compensar o custo de tais desvios e de evitar a ocorrência futura dos mesmos. Vale ressaltar que, assim como existem penalidades para o não cumprimento do especificado em contrato, também existem prêmios que podem ser pagos pelo atendimento das especificações em melhores condições que as estipuladas no contrato.

Na prática, um teor de umidade excessivo no carvão significa um transporte maior de água e menor aquisição de carvão e, conseqüentemente, um aumento no custo unitário do frete, pois seria necessário comprar mais carvão para compensar o excesso de água, além dos inconvenientes ao processo, como a redução do rendimento de coque. Neste caso aplica-se um percentual fixo sobre o preço “CIF” (*Cost, Insurance and Freight – Custo, Seguro e Frete*) como penalidade para que a massa de água em excesso seja paga pelo fornecedor. O excesso de cinzas no carvão tem influência direta sobre o rendimento do coque dentro do alto-forno, pois determina a diminuição do carbono livre para a redução do minério de ferro, provocando um aumento no consumo de coque para a produção de gusa. Como o teor de cinzas pode ser controlado com eficiência pelo beneficiador, seu índice de não atendimento se torna muito baixo.

Diferentemente das cinzas, o teor de enxofre não depende tanto assim do processo de beneficiamento, mas da formação geológica do carvão, o que dificulta sua diminuição durante o beneficiamento. Deve-se lembrar que o excesso de enxofre no carvão produz um coque com alto teor de enxofre, ocasionando a diminuição do seu rendimento no alto-forno e a elevação dos custos de dessulfuração do gusa. A penalidade para o excesso de enxofre é um percentual sobre o preço “CIF” para cada ponto percentual de excesso. Já o excesso de matéria volátil diminui o rendimento do carvão na coqueria, com o aumento dos gases e das cinzas do coque. Para compensar a perda de rendimento do processo, uma quantidade maior de carvão deverá ser adquirida, o que aumenta o custo total de suprimento. A penalidade para o excesso de

matéria volátil é similar a definida para o excesso de enxofre, um percentual do preço “CIF” para cada ponto percentual de desvio.

Vale lembrar que quando uma propriedade extensiva do carvão, como a umidade, o teor de cinzas, de enxofre e de matéria volátil é afetada por um desvio de especificação, a massa de carvão é atingida de forma direta, havendo aumento ou diminuição do rendimento do mesmo, e a penalidade para tal desvio é calculada como descrito no parágrafo anterior. Mas se uma propriedade intensiva, como a refletância, a fluidez e a dilatação, que afetam diretamente o rendimento do coque no alto-forno e, com isso, o custo de produção do ferro gusa, for afetada por um desvio, a massa do carvão efetivamente entregue não é alterada, dificultando a determinação de uma penalidade contratual.

No entanto, é importante ressaltar o efeito que um desvio de qualidade tem sobre a mistura ótima, tanto para uma propriedade extensiva, quanto para uma intensiva. Em termos matemáticos, um desvio de especificação em qualquer das propriedades se traduz em uma alteração de algum coeficiente tecnológico de uma variável básica na solução ótima do problema, o que certamente acarretará na alteração da estrutura final do problema, podendo ocorrer, dependendo do desvio, mudança de base, alteração no conjunto das restrições ativas e aumento ou redução do custo total da mistura, dependendo do sentido do desvio. Como uma alteração nos coeficientes tecnológicos de um problema de programação linear, em geral, altera a matriz inversa dos coeficientes das variáveis básicas, torna-se muito complexo fazer qualquer tipo de análise ou de tirar qualquer conclusão antes de resolver novamente o problema e encontrar uma nova solução ótima.

Como conseqüência, duas situações distintas podem ocorrer na mistura ótima quando ocorre um desvio de especificação em algum dos carvões que compõem a mistura:

- O desvio não provoca uma mudança de base, ou seja, os componentes da mistura continuam os mesmos, mas com quantidades alteradas. Caso mais simples e de maior interesse para a negociação;
- O desvio provoca uma mudança de base, ou seja, uma mudança na estrutura da mistura. Situação comum na prática, mas complexa do ponto de vista matemático.

Na prática, os desvios de especificação podem ocorrer de forma bem mais complexa do que a apresentada por Campos (1997), pois um mesmo carvão pode apresentar desvios em mais de uma propriedade, ou ainda, mais de um carvão da mistura pode apresentar desvios nas mesmas ou em diferentes

propriedades. No entanto, mesmo com a simulação de cenários mais simples, é possível tirar importantes conclusões acerca do comportamento da mistura de carvões em decorrência dos desvios de especificação.

Campos (1997), ao fazer a distinção entre os desvios que provocam e os que não provocam mudança de base, realiza o cálculo das penalidades com o auxílio de curvas em que o custo total da mistura é função dos desvios de especificação. Para o caso onde não ocorre mudança de base, foram provocados desvios de duas naturezas distintas: desvios proporcionais ao coeficiente de qualidade de um dos carvões da mistura (coeficiente tecnológico de um carvão para uma propriedade específica) e desvios proporcionais à extensão dos limites de qualidade (inferior e superior) para uma propriedade específica. Já para o caso onde ocorre mudança de base, foram provocados desvios proporcionais a um determinado coeficiente de qualidade de um dos carvões pertencentes à mistura até que sua quantidade chegasse a zero, observando as mudanças de base durante esse percurso. Assim foram obtidos diversos pontos e traçadas as curvas de custo total.