

### 3 Controle Passivo com Carregamento no Plano

#### 3.1. Conceitos Básicos

Conforme visto no Capítulo 1, os mecanismos de controle passivo não são controláveis e não requerem energia para operar. Estes sistemas de dissipação de energia abrangem uma ampla escala de materiais e sistemas para realçar o amortecimento, rigidez e resistência, e podem ser utilizados tanto para minorar os efeitos das forças ambientais quanto para reabilitação de estruturas deterioradas ou deficientes (Housner et al, 1997).

Os métodos de amortecimento passivo, incluindo sistemas de isolamento de base, amortecedores viscoelásticos e amortecedores de massa sintonizados, são amplamente aceitos pela engenharia como forma de redução dos efeitos do carregamento dinâmico sobre a estrutura (Spencer Jr. & Nagarajaiah, 2003).

Neste capítulo será abordada a análise do controle passivo proposto neste trabalho. Este controle consiste basicamente na alteração da rigidez da placa, para tanto é considerada a aplicação de uma força de compressão distribuída uniformemente no plano. Mostra-se aqui que estas forças de compressão alteram as frequências naturais da estrutura, portanto, em se conhecendo a frequência da excitação pode-se calibrar as forças de compressão de modo que os efeitos do carregamento dinâmico sejam minorados.

#### 3.2. Análise de Placas carregadas axialmente

Considere a equação diferencial de equilíbrio dinâmico para uma placa simplesmente apoiada em seus quatro lados e com carregamento  $N_x$  nas bordas  $x = 0, a$ .

$$D\nabla^4 w - N_x w_{,xx} - \bar{m}\omega^2 w = p \quad (3.1)$$

Uma solução para a eq. (3.1) pode ser proposta da seguinte forma

$$w(x, y, t) = X(x)Y(y) \quad (3.2)$$

onde  $X(x)Y(y)$  representam os modos de vibração da placa considerada. A solução da eq. (3.1) se dá da mesma forma como descrito no item 2.5.2.1 apenas levando agora em consideração os fatores de carga aplicados no plano. Tomando como função inicial para  $X(x)$  a seguinte expressão

$$X(x) = \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (3.3)$$

substituindo a eq. (3.3) na eq. (3.1) e fazendo as simplificações necessárias, obtém-se a seguinte equação diferencial

$$Y_{,yyyy} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_{,yy} + \left( \frac{m^4 \pi^4}{a^4} - \frac{N_x m^2 \pi^2}{a^2 D} - \frac{\bar{m} \omega^2}{D} \right) Y = 0 \quad (3.4)$$

A solução da eq. (3.4) é dada por:

$$Y(y) = C_1 \sin \lambda_1 y + C_2 \cos \lambda_1 y + C_3 \sinh \lambda_2 y + C_4 \cosh \lambda_2 y \quad (3.5)$$

onde  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  são constantes de integração e serão determinadas a partir das condições de contorno da placa considerada e,

$$\lambda_1 = \sqrt{-\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{\bar{m} \omega^2}{D} + \frac{m^2 \pi^2 N_x}{a^2 D}}} \quad (3.6)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{\bar{m} \omega^2}{D} + \frac{m^2 \pi^2 N_x}{a^2 D}}} \quad (3.7)$$

aplicando as condições de contorno para a placa simplesmente apoiada

$$w = w_{,y} = 0$$

$$w_{,yy} + \nu w_{,xx} = w_{,yyy} + (2 - \nu) w_{,xxy} = 0$$

e resolvendo o problema de autovalor resultante obtém-se uma expressão que fornece a relação entre a frequência natural  $\omega$  e o carregamento  $N_x$ .

Como exemplo prático é utilizada uma placa com  $a = 3\text{ m}$ ,  $b = 2\text{ m}$  e  $h = 0,10\text{ m}$ ,  $\bar{m} = 2500\text{ N/m}^2$ ,  $E = 30\text{ GPa}$  e  $\nu = 0,3$ . Para estas propriedades a expressão que relaciona a frequência natural  $\omega$  e o carregamento  $N_x$  é dada pela eq. (3.8).

$$\omega^2 = 51621,7964 - 0,001754 N_x \quad (3.8)$$

A representação gráfica desta expressão pode ser vista na Figura 18. Como a menor carga de flambagem para a relação  $a/b = 1,5$  ocorre para  $m = 2$  e  $n = 1$ , o valor da frequência natural  $\omega$  quando a placa está descarregada corresponde ao segundo modo de vibração.

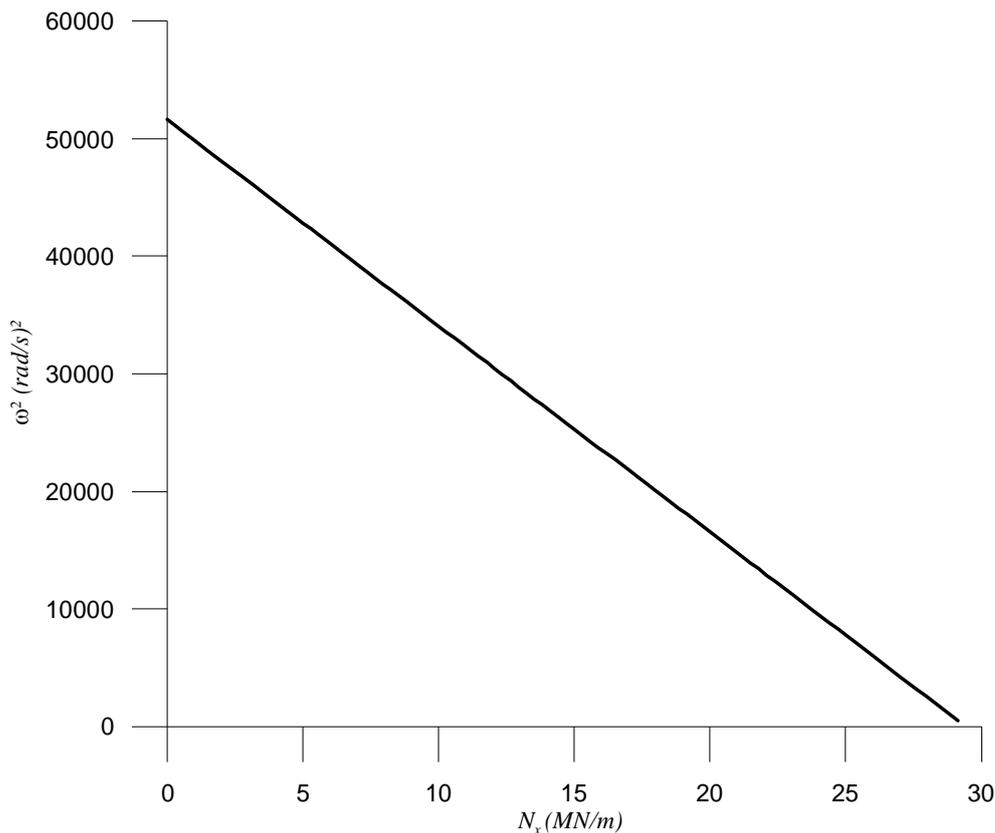


Figura 18 – Quadrado da frequência natural  $\omega$  x carregamento  $N_x$  para a placa simplesmente apoiada.

Na Figura 18 pode-se verificar claramente que o quadrado da frequência varia linearmente com o carregamento aplicado nas bordas da placa. Esta relação linear é exata se o modo de vibração for idêntico ao modo de flambagem da placa (Lurie, 1951). Em todos os casos, a carga correspondente à frequência zero é a carga crítica de flambagem.

A Tabela 9 mostra as frequências naturais da placa mostrada no exemplo anterior, onde  $N_{xc}$  é a carga crítica de flambagem.

Os valores da Tabela 9 mostram que, com o aumento da carga axial, tem-se um ligeiro decréscimo no valor das frequências naturais do sistema. Como será demonstrado a seguir podemos utilizar este método para alterar as frequências da placa e evitar, deste modo, que o sistema entre em ressonância, diminuindo a amplitude da resposta a um certo carregamento dinâmico.

O método de controle de vibrações proposto neste capítulo foi aplicado a uma placa simplesmente apoiada nos quatro lados com  $a = 3\text{ m}$ ,  $b = 2\text{ m}$  e  $h = 0,10\text{ m}$ ,  $\bar{m} = 2500\text{ N/m}^2$ ,  $E = 30\text{ GPa}$  e  $\nu = 0,3$ . Foi aplicado um

Tabela 9 – Freqüências naturais da placa com carregamento axial. ( Hz )  $a/b = 2/3$

Seqüência Modal	$\frac{N_x}{N_{xc}}$				
	0	0,005	0,01	0,05	0,10
1	18,8036	18,7600	18,7164	18,3637	17,9132
2	36,1607	36,0702	35,9794	35,2451	34,3050
3	57,8571	57,8430	57,8288	57,7157	57,5739
4	75,2142	75,1708	75,1272	74,7783	74,3399

carregamento  $N_x$  distribuído nos lados  $x = 0$  e  $x = a$ . A Figura 19 mostra os deslocamentos da placa em função do tempo na ausência do carregamento axial.

Na Figura 20 são representados os deslocamentos para uma carga axial correspondente a 5% da carga crítica de flambagem  $N_{xc}$ . Pode-se notar claramente um decréscimo significativo na amplitude dos deslocamentos, o que se torna mais claro na Figura 21, onde tem-se um carga aplicada com o valor de 10% da carga crítica de flambagem.

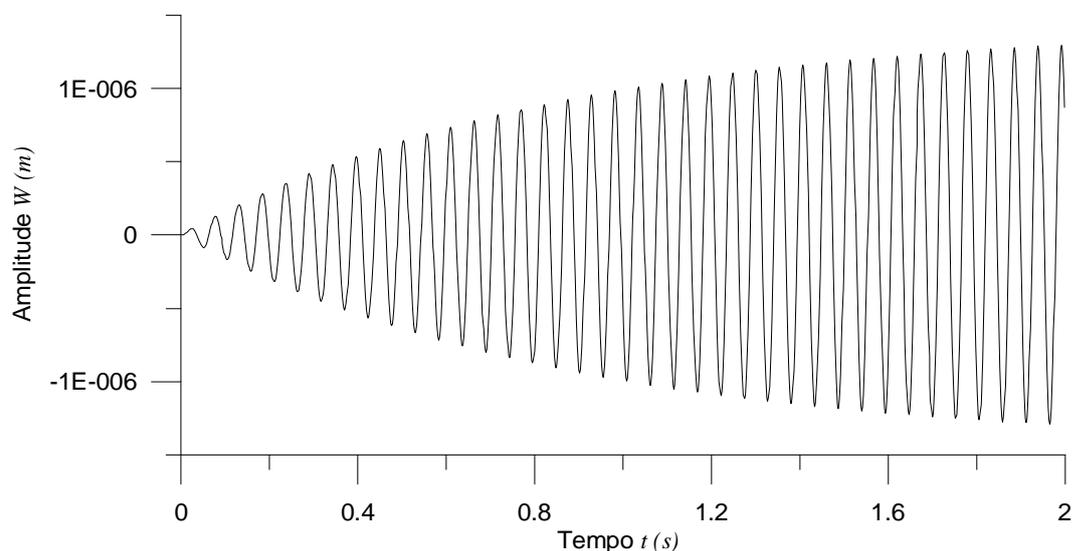


Figura 19 – Deslocamentos da placa simplesmente apoiada sem carregamento axial.

Nas Figura 22, Figura 23 e Figura 24, é mostrada a variação da velocidade em função do tempo para a placa sem carregamento e com carregamentos de 5% e 10% da carga crítica de flambagem respectivamente.

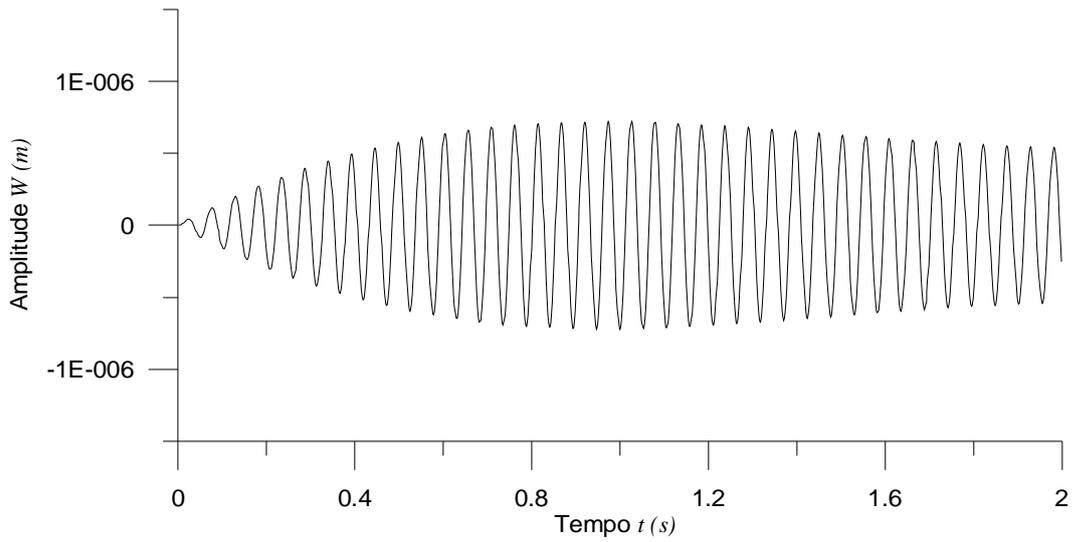


Figura 20 – Deslocamentos da placa simplesmente apoiada com 5% da carga crítica.

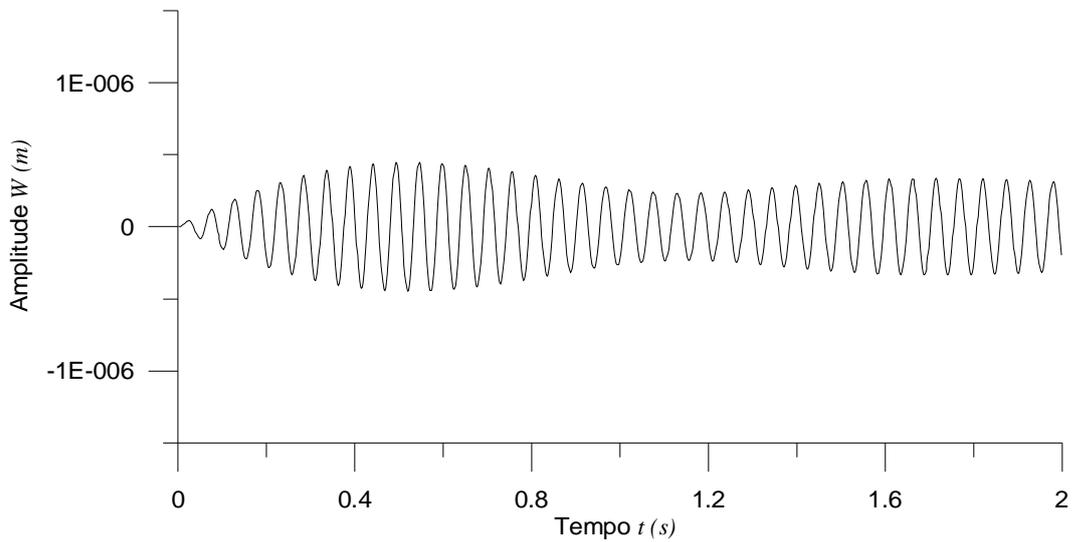


Figura 21 – Deslocamentos da placa simplesmente apoiada com 10% da carga crítica.

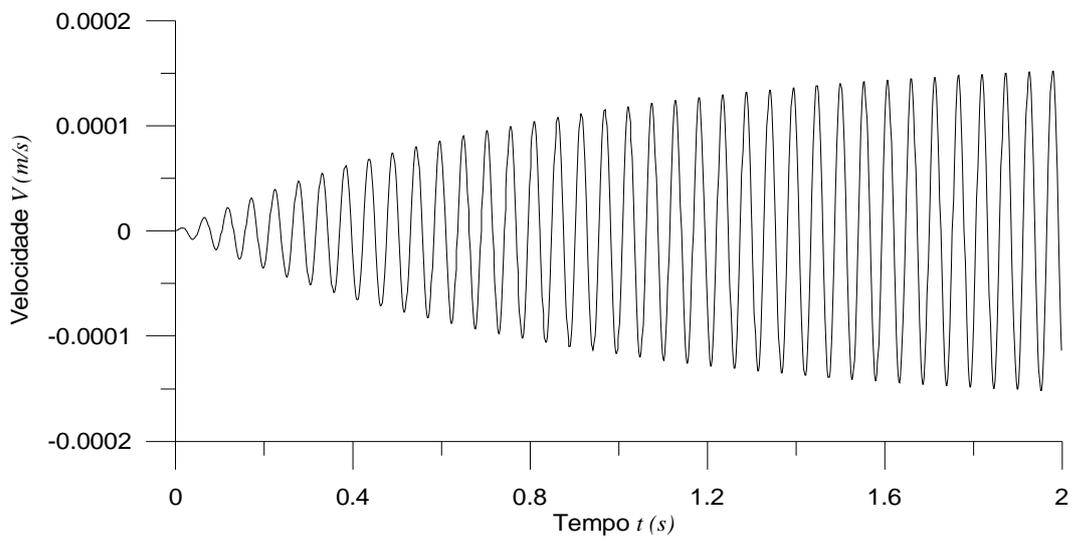


Figura 22 – Velocidades da placa simplesmente apoiada sem carregamento axial.

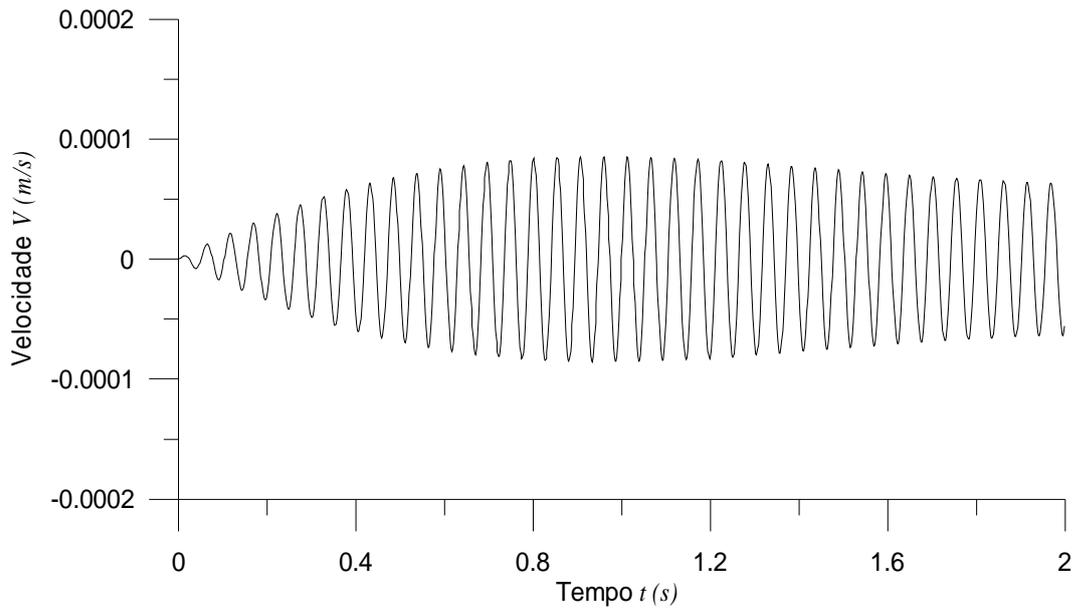


Figura 23 – Velocidades da placa simplesmente apoiada com 5% da carga crítica.

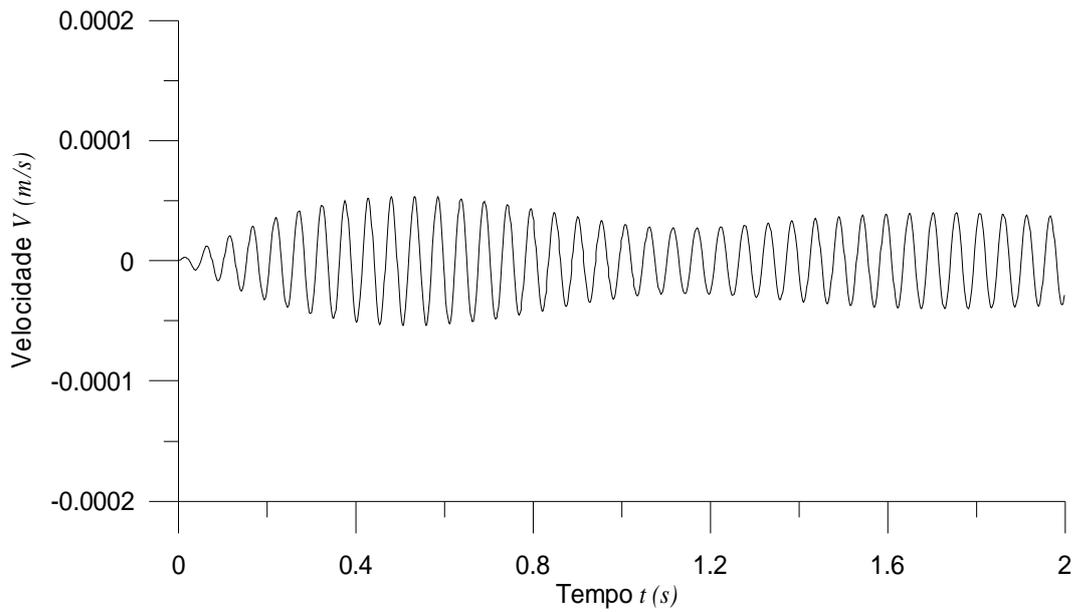


Figura 24 – Velocidades da placa simplesmente apoiada com 10% da carga crítica.

As Figura 25, Figura 26 e Figura 27 mostram as variações da aceleração em função do tempo para a placa sem carregamento axial aplicado e com carregamento de 5% e 10% da carga crítica de flambagem, respectivamente.

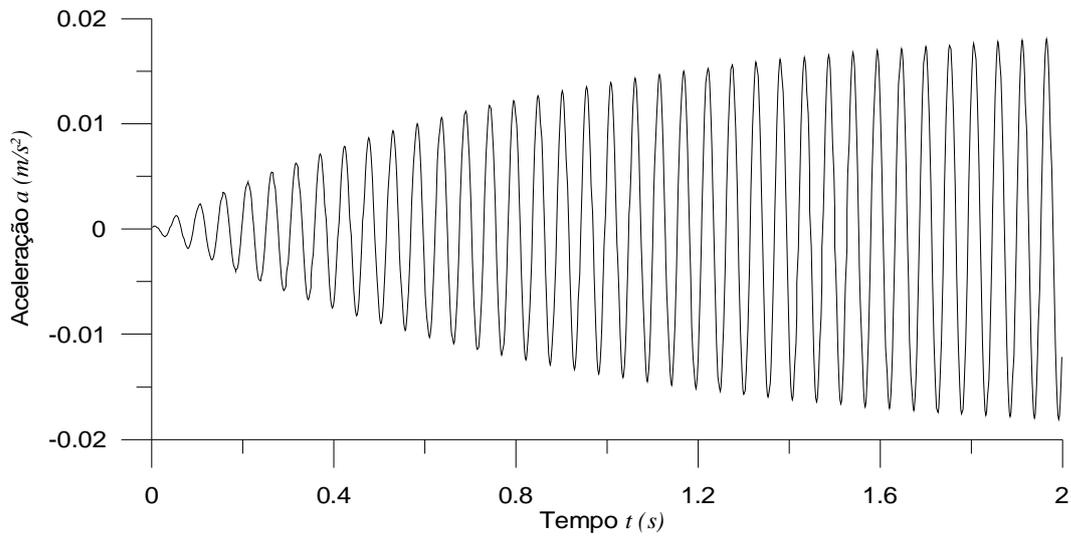


Figura 25 – Acelerações da placa simplesmente apoiada sem carregamento axial.

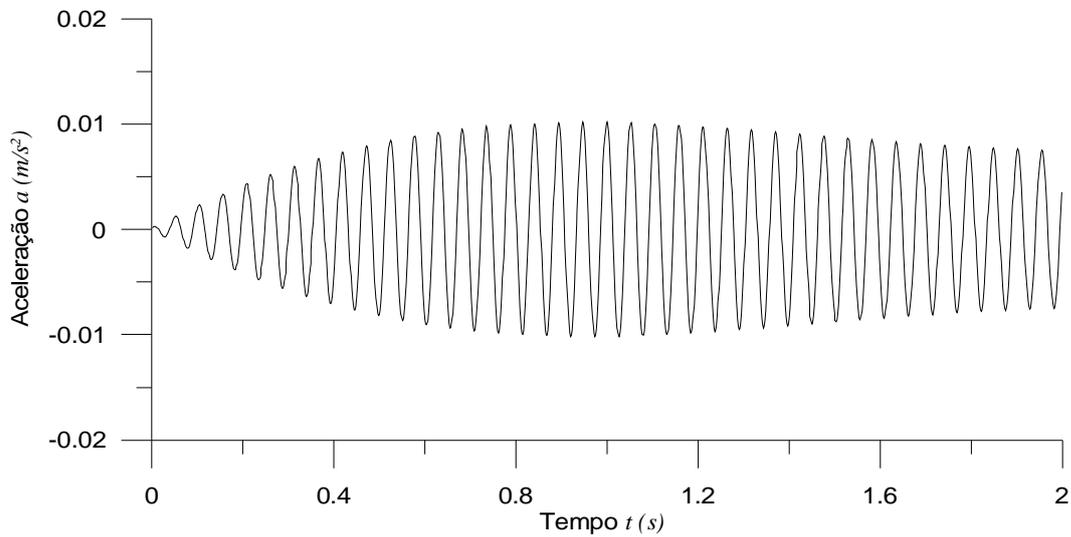


Figura 26 – Acelerações da placa simplesmente apoiada com 5% da carga crítica.

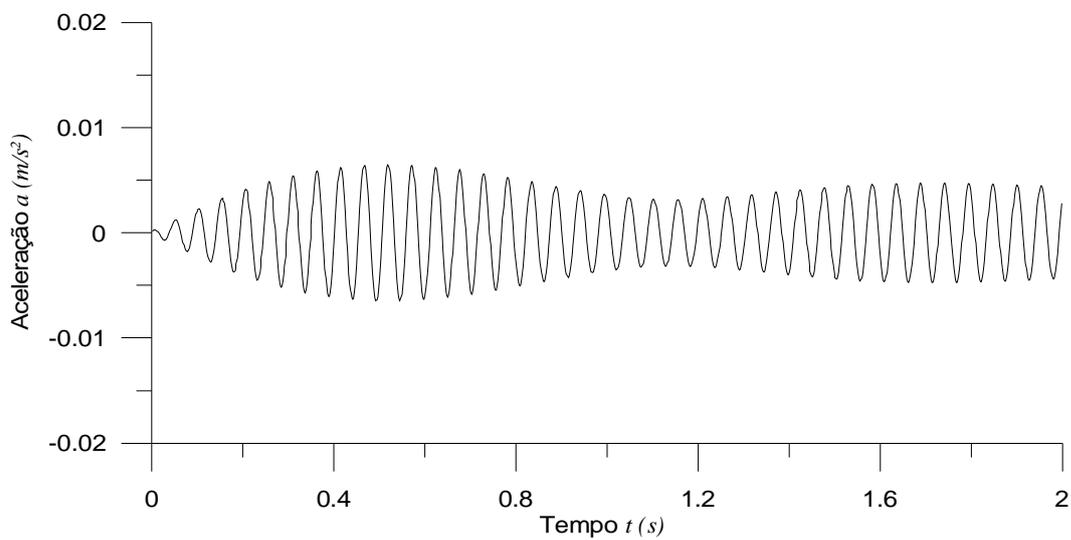


Figura 27 – Acelerações da placa simplesmente apoiada com 10% da carga crítica.

As Figura 28, Figura 29 e Figura 30 mostram a variação dos parâmetros estudados, amplitude, velocidade e aceleração, em função do acréscimo de carga na direção do eixo  $x$  da placa considerada. Obtém-se para os deslocamentos, velocidade e aceleração uma redução da ordem de 68% para um carregamento no valor de 10% da carga de flambagem.

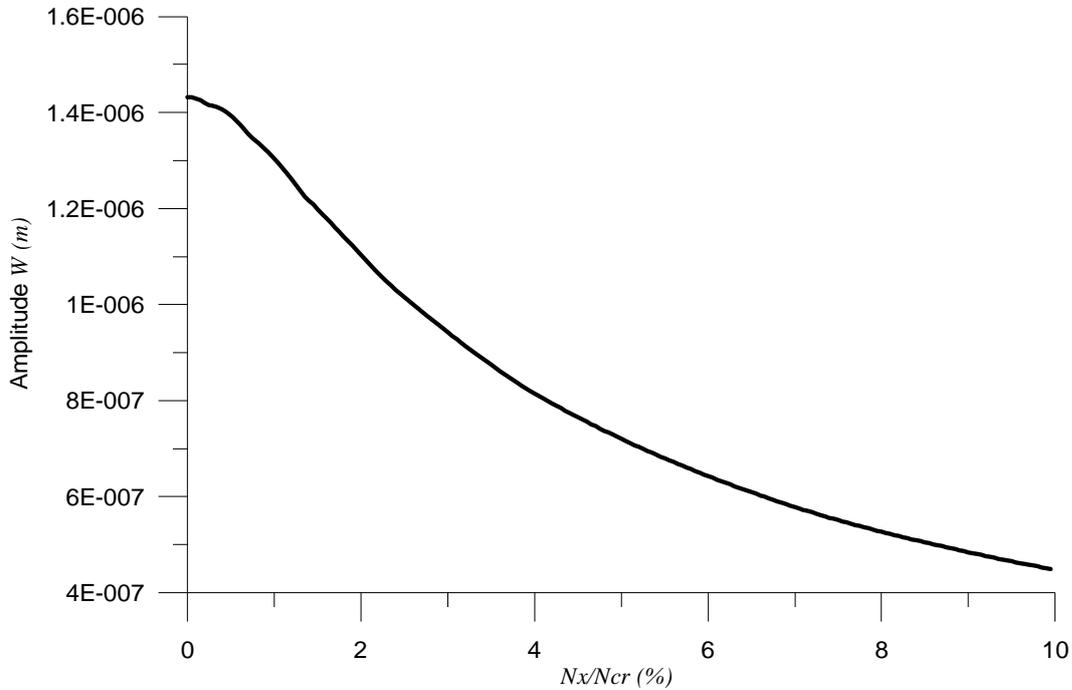


Figura 28 – Variação da amplitude com o aumento do carregamento axial.

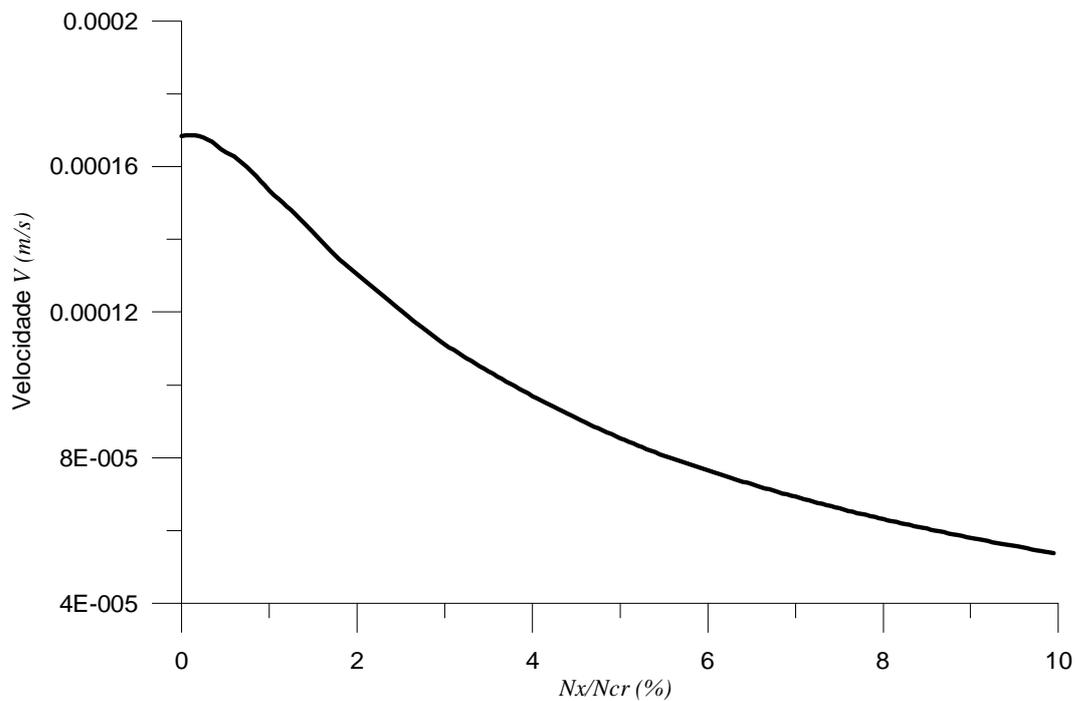


Figura 29 – Variação da velocidade com o aumento do carregamento axial.

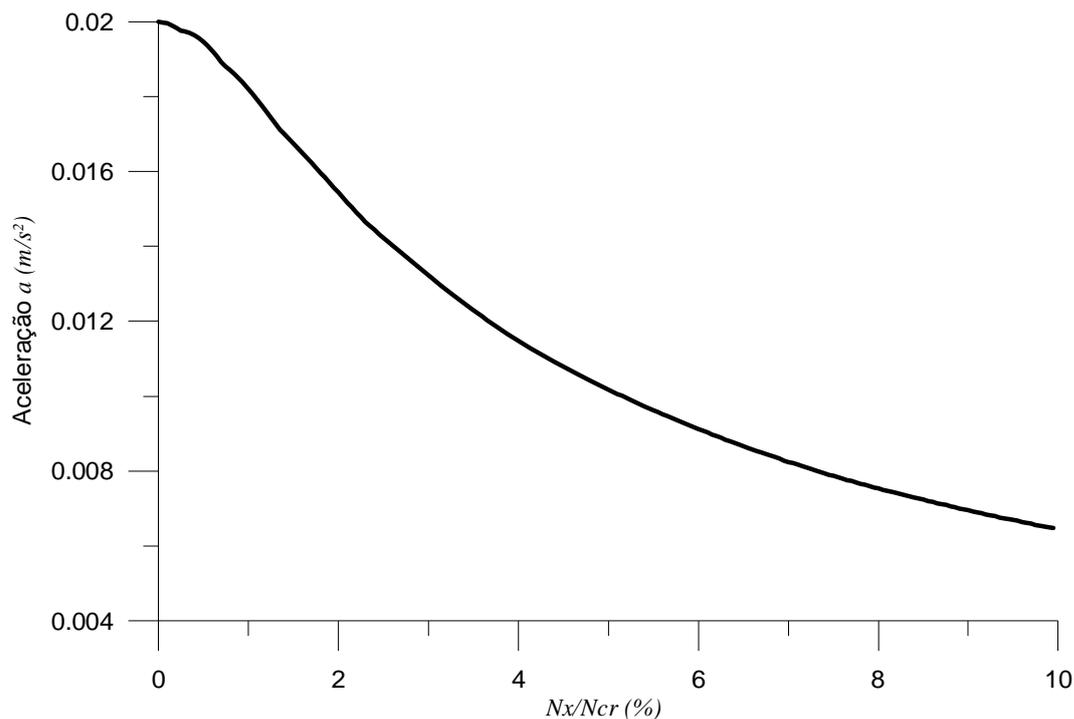


Figura 30 – Variação da aceleração com o aumento do carregamento axial.

Pode ser notado claramente que o efeito do carregamento axial é maior no início do carregamento e, conforme a carga cresce, a curva torna-se assintótica a zero quando a carga atinge 100% da crítica e a placa perde a estabilidade elástica. Obviamente esta consideração é puramente teórica, uma vez que, na prática, devido a imperfeições do material e pela dificuldade da aplicação exata da carga o estado de instabilidade é atingido antes da carga crítica teórica.

Na Figura 31 mostra-se o deslocamento do pico de ressonância devido à aplicação do carregamento axial. É possível verificar que para cargas de compressão (valores negativos) o pico tende a ocorrer em uma frequência mais baixa. Ocorrendo o contrário para o caso da tração (valores positivos). Pode ser visto ainda que o valor do deslocamento decresce significativamente quando existe um carregamento aplicado com a frequência igual a da estrutura descarregada.

### 3.3. Galerkin Iterativo para placa carregada no plano

Com o intuito de mostrar o método de resolução de uma placa carregada axialmente através do método de Galerkin Iterativo, será considerada uma placa com as quatro bordas engastadas. O carregamento  $N_x$  considerado está

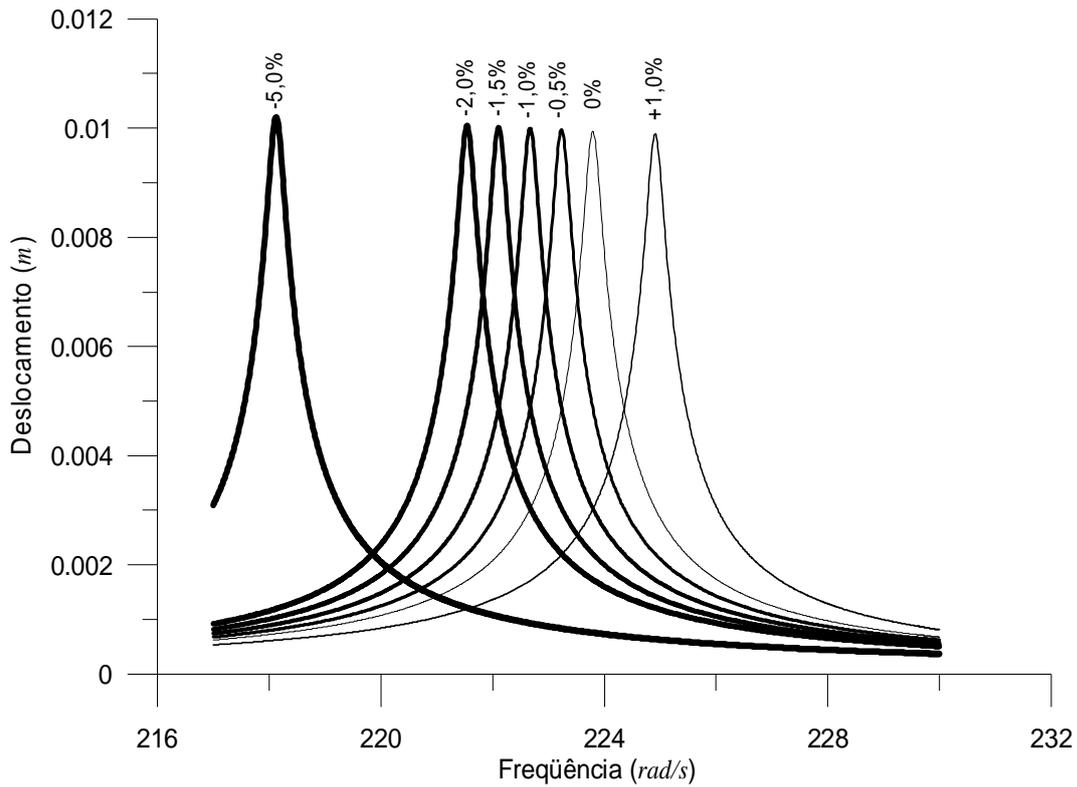


Figura 31 – Deslocamentos em função da freqüência para cada valor de  $\sigma_x/\sigma_{xc}$ .

aplicado uniformemente nas extremidades  $x=0, a$ . Desta forma, a equação a ser resolvida é a eq. (3.1).

A solução para a eq. (3.1) tem a seguinte forma

$$w(x, y, t) = X(x)Y(y) \tag{3.9}$$

onde  $X(x)Y(y)$  representam os modos de vibração da placa considerada.

Tomando como função inicial para  $X(x)$  a seguinte expressão polinomial

$$X(x) = -\frac{16x^4}{a^4} + \frac{32x^3}{a^3} - \frac{16x^2}{a^2} \tag{3.10}$$

substituindo a eq. (3.10) na eq. (3.1) e fazendo as simplificações necessárias, obtém-se a seguinte equação diferencial

$$c_1 Y_{,yyyy} + c_2 Y_{,yy} + (c_3 \omega^2 + c_4 N_x + c_5) Y = 0 \tag{3.11}$$

onde  $c_1, c_2, c_3, c_4$  e  $c_5$  são constantes que dependem das propriedades físicas da placa e foram adotadas a fim de ajudar nas simplificações.

Resolvendo a eq. (3.11), obtém-se

$$Y(y) = C_1 \text{sen } \lambda_1 y + C_2 \text{cos } \lambda_1 y + C_3 \text{senh } \lambda_2 y + C_4 \text{cosh } \lambda_2 y \tag{3.12}$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são funções das propriedades físicas consideradas, da freqüência

natural e do carregamento  $N_x$ . As constantes ( $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$ ) são determinadas a partir das condições de contorno em  $y = 0, b$ .

Aplicando as condições de contorno à eq. (3.12), obtém-se um sistema homogêneo de equações, que resulta em uma equação característica, da mesma forma como foi obtido para os casos descritos nas seções anteriores.

A partir da solução da equação característica, são obtidos para um dado carregamento os valores numéricos de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e, a partir destes, são calculadas as freqüências naturais e os valores das constantes ( $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$ ), obtendo-se assim os modos de vibração.

Nas Tabela 10, Tabela 11 e Tabela 12 são apresentadas as freqüências naturais e os modos de vibração para um dado carregamento aplicado. A placa considerada possui:  $a = 12$  m,  $b = 12$  m e  $h = 0,20$  m,  $\bar{m} = 5000$  N/m<sup>2</sup>,  $E = 30$  GPa e  $\nu = 0,3$ .

Tabela 10 – Freqüências Naturais e Modos de vibração para uma placa engastada (E-E-E-E) e sem carregamento axial

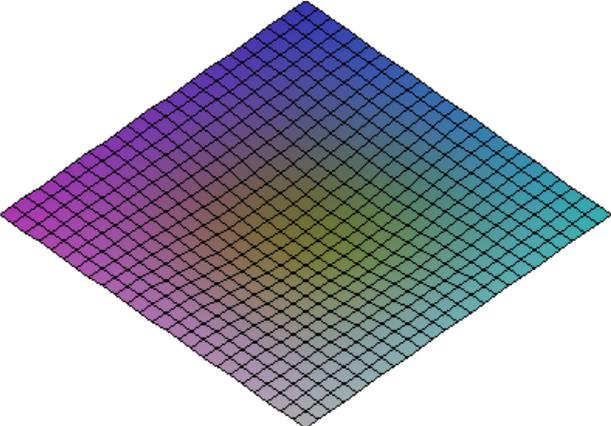
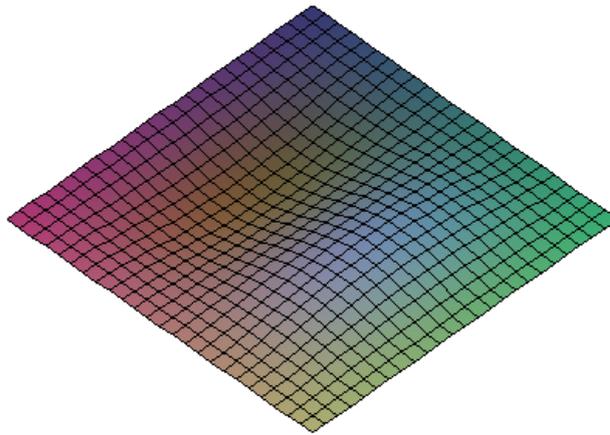
(m,n)	$\omega$ (Hz)	Modo $w(x, y) = X(x) * Y(y)$
(1,1)	5,276	$w(x, y) = [0,657 \text{ sen}(0,359x) - 0,436 \text{ cos}(0,359x) - 0,434 \text{ senh}(0,544x) + 0,436 \text{ cosh}(0,544x)] \cdot [0,657 \text{ sen}(0,359y) - 0,436 \text{ cos}(0,359y) - 0,434 \text{ senh}(0,544y) + 0,436 \text{ cosh}(0,544y)]$
		

Tabela 10 – *continuação...*

$$w(x, y) = [0,563 \operatorname{sen}(0,641x) - 0,477 \operatorname{cos}(0,641x) - 0,477 \operatorname{senh}(0,755x) + 0,477 \operatorname{cosh}(0,755x)] \cdot [0,839 \operatorname{sen}(0,322y) - 0,314 \operatorname{cos}(0,322y) - 0,314 \operatorname{senh}(0,859y) + 0,314 \operatorname{cosh}(0,859y)]$$

(2,1) 10,758



$$w(x, y) = [0,839 \operatorname{sen}(0,322y) - 0,314 \operatorname{cos}(0,322y) - 0,314 \operatorname{senh}(0,859y) + 0,314 \operatorname{cosh}(0,859y)] \cdot [0,563 \operatorname{sen}(0,641x) - 0,477 \operatorname{cos}(0,641x) - 0,477 \operatorname{senh}(0,755x) + 0,477 \operatorname{cosh}(0,755x)]$$

(1,2) 10,758

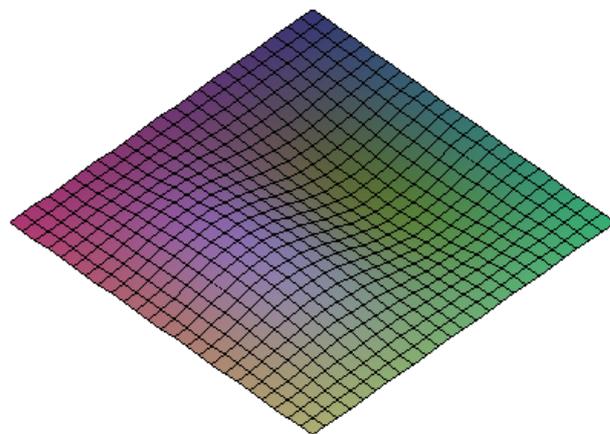


Tabela 10 – *continuação...*

$$w(x, y) = [0,684 \text{ sen}(0,616x) - 0,421 \text{ cos}(0,616x) - 0,421 \text{ sinh}(1,000x) + 0,421 \text{ cosh}(1,000x)] \cdot [0,684 \text{ sen}(0,616y) - 0,421 \text{ cos}(0,616y) - 0,421 \text{ sinh}(1,000y) + 0,421 \text{ cosh}(1,000y)]$$

(2,2)      15,862

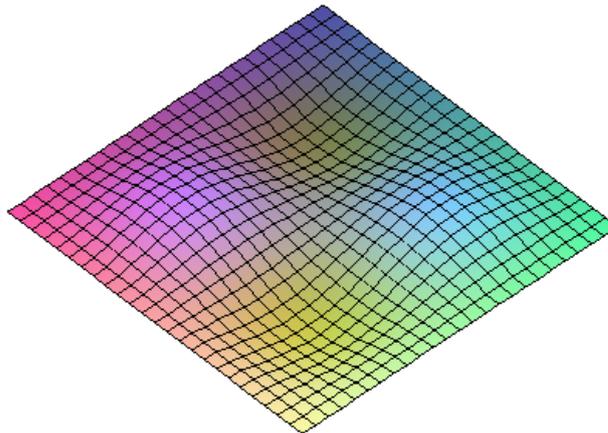


Tabela 11 – Frequências Naturais e Modos de vibração para uma placa engastada (E-E-E-E) e com carregamento de  $0,10N_{xc}$

(m,n)	$\omega$ (Hz)	Modo $w(x, y) = X(x)*Y(y)$
-------	---------------	----------------------------

$$w(x, y) = [0,703 \text{ sen}(0,350x) - 0,411 \text{ cos}(0,350x) - 0,410 \text{ sinh}(0,600x) + 0,411 \text{ cosh}(0,600x)] \cdot [0,656 \text{ sen}(0,360y) - 0,436 \text{ cos}(0,360y) - 0,435 \text{ sinh}(0,543y) + 0,436 \text{ cosh}(0,543y)]$$

(1,1)      5,520

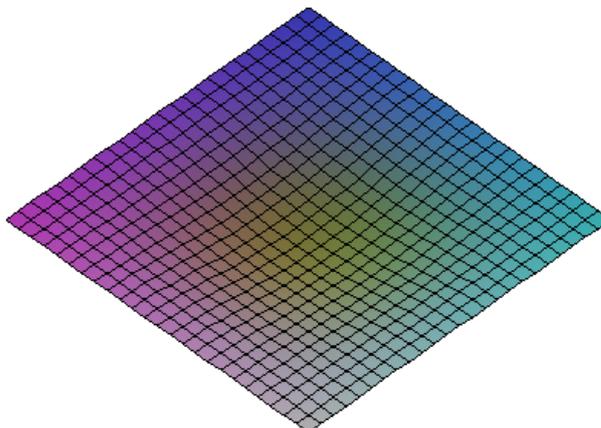
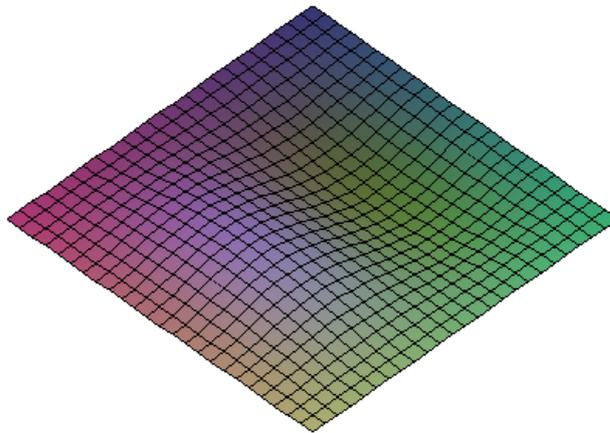


Tabela 11 – *continuação...*

$$w(x, y) = [0,852 \text{ sen}(0,319x) - 0,302 \text{ cos}(0,319x) - 0,302 \text{ senh}(0,898x) + 0,302 \text{ cosh}(0,898x)] \cdot [0,562 \text{ sen}(0,641y) - 0,477 \text{ cos}(0,641y) - 0,477 \text{ senh}(0,755y) + 0,477 \text{ cosh}(0,755y)]$$

(1,2) 10,875



$$w(x, y) = [0,586 \text{ sen}(0,636x) - 0,468 \text{ cos}(0,636x) - 0,468 \text{ senh}(0,797x) + 0,468 \text{ cosh}(0,797x)] \cdot [0,838 \text{ sen}(0,322y) - 0,315 \text{ cos}(0,322y) - 0,315 \text{ senh}(0,857y) + 0,315 \text{ cosh}(0,857y)]$$

(2,1) 11,215

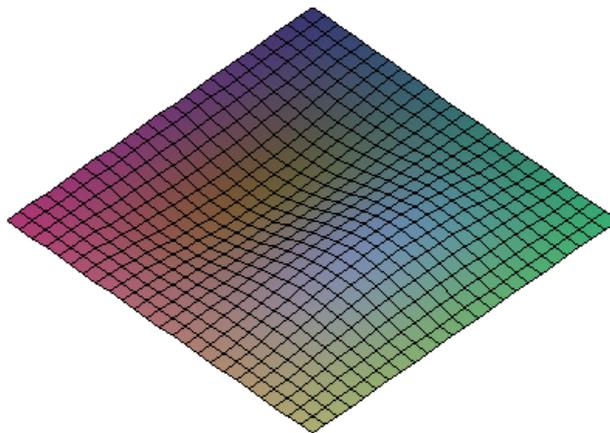


Tabela 11 – *continuação...*

$$w(x, y) = [0,698 \text{ sen}(0,613x) - 0,414 \text{ cos}(0,613x) - 0,414 \text{ senh}(1,034x) + 0,414 \text{ cosh}(1,034x)] \cdot [0,684 \text{ sen}(0,616y) - 0,421 \text{ cos}(0,616y) - 0,421 \text{ senh}(0,999y) + 0,421 \text{ cosh}(0,999y)]$$

(2,2)      16,170

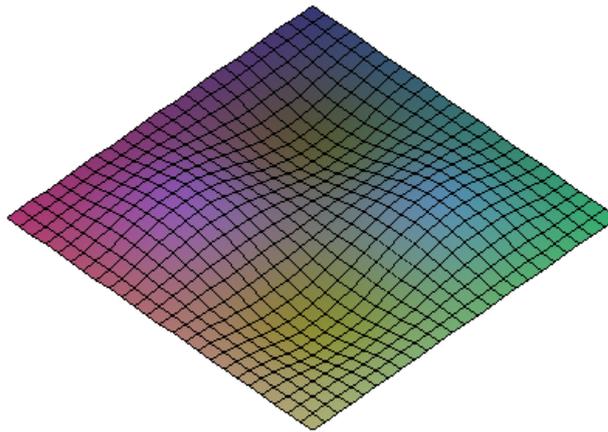


Tabela 12 – Frequências Naturais e Modos de vibração para uma placa engastada (E-E-E-E) e com carregamento de  $0,30N_{xc}$

(m,n)	$\omega$ (Hz)	Modo $w(x, y) = X(x) * Y(y)$
-------	---------------	------------------------------

$$w(x, y) = [0,770 \text{ sen}(0,336x) - 0,369 \text{ cos}(0,336x) - 0,368 \text{ senh}(0,703x) + 0,369 \text{ cosh}(0,703x)] \cdot [0,654 \text{ sen}(0,360y) - 0,437 \text{ cos}(0,360y) - 0,436 \text{ senh}(0,541y) + 0,437 \text{ cosh}(0,541y)]$$

(1,1)      5,970

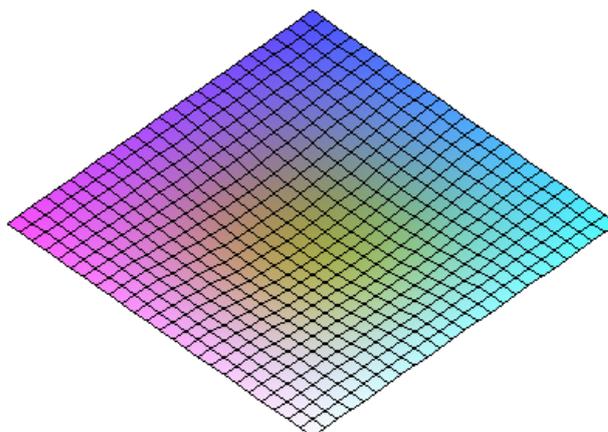
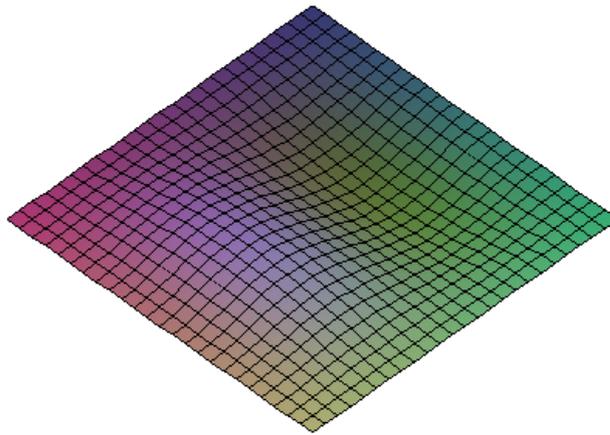


Tabela 12 – *continuação...*

$$w(x, y) = [0,873 \text{ sen}(0,314x) - 0,282 \text{ cos}(0,314x) - 0,282 \text{ sinh}(0,973x) + 0,282 \text{ cosh}(0,973x)] \cdot [0,562 \text{ sen}(0,641y) - 0,478 \text{ cos}(0,641y) - 0,478 \text{ sinh}(0,754y) + 0,478 \text{ cosh}(0,754y)]$$

(1,2)      11,104



$$w(x, y) = [0,628 \text{ sen}(0,627x) - 0,449 \text{ cos}(0,627x) - 0,449 \text{ sinh}(0,876x) + 0,449 \text{ cosh}(0,876x)] \cdot [0,838 \text{ sen}(0,322y) - 0,315 \text{ cos}(0,322y) - 0,315 \text{ sinh}(0,855y) + 0,315 \text{ cosh}(0,855y)]$$

(2,1)      12,073

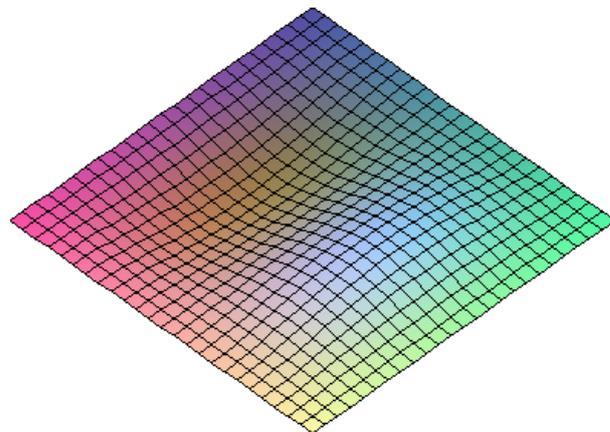
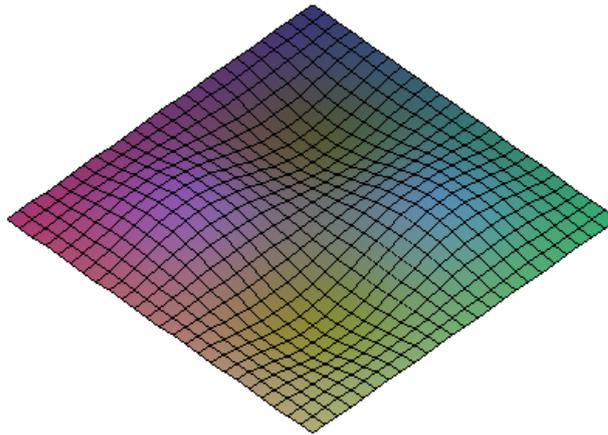


Tabela 12 – *continuação...*

$$w(x, y) = [0,722 \text{ sen}(0,608x) - 0,400 \text{ cos}(0,608x) - 0,400 \text{ senh}(1,098x) + 0,400 \text{ cosh}(1,098x)] \cdot [0,683 \text{ sen}(0,616y) - 0,422 \text{ cos}(0,616y) - 0,422 \text{ senh}(0,998y) + 0,422 \text{ cosh}(0,998y)]$$

(2,2)      16,766



Pode-se notar que a aplicação do carregamento além de alterar as frequências naturais também tem significativa influência sobre o modo de vibração da placa, neste caso, alterando o modo na direção do eixo  $x$ , onde a força foi aplicada.