

## 4 Controle Passivo com Carregamento Excêntrico

### 4.1. Conceitos Básicos

Neste capítulo é seguida a metodologia apresentada anteriormente para controle de vibrações em placas por meio da aplicação de cargas de compressão. Porém, agora serão levadas em consideração as cargas aplicadas fora do centro geométrico da seção transversal. Hui & Leissa (1983) estudaram o efeito de imperfeições geométricas na vibração de placas retangulares sujeitas a carregamentos uni e biaxiais. Para tanto, os autores simularam uma imperfeição geométrica de forma senoidal, semelhante aos modos de vibração da placa simplesmente apoiada. Será utilizada a formulação proposta por estes autores para resolução do problema proposto neste trabalho.

### 4.2. Determinação da equação da deformada da placa

Considere uma placa retangular simplesmente apoiada nas bordas e submetida a um carregamento axial excêntrico na direção do eixo  $y$ . Este carregamento pode ser substituído por uma carga compressiva mais um momento  $M_y$  uniformemente distribuído ao longo dos eixos  $y = \pm b/2$ . As deflexões causadas por este momento devem satisfazer a equação diferencial homogênea (4.1).

$$D\nabla^4 w = 0 \quad (4.1)$$

Utilizando a formulação proposta por Timoshenko & Woinowski-Krieger (1959), as seguintes condições de contorno devem ser impostas

$$w = w_{,xx} = 0 \quad \text{em } x = 0, a \quad (4.2)$$

$$w = 0 \quad \text{em } y = \pm b/2 \quad (4.3)$$

$$-D(w_{,yy})_{y=b/2} = M_y = N_y e \quad -D(w_{,yy})_{y=-b/2} = M_y = N_y e \quad (4.4)$$

onde  $e$  é a excentricidade da carga em relação ao eixo transversal da placa.

Assume-se a solução da eq. (4.1) como

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y(y) \text{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \quad (4.5)$$

Esta solução satisfaz as condições de contorno (4.2). A função  $Y(y)$  será tomada da seguinte forma

$$Y(y) = C_1 \text{senh} \left( \frac{m\pi y}{a} \right) + C_2 \cosh \left( \frac{m\pi y}{a} \right) + C_3 \left( \frac{m\pi y}{a} \right) \text{senh} \left( \frac{m\pi y}{a} \right) + C_4 \left( \frac{m\pi y}{a} \right) \cosh \left( \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (4.6)$$

Neste caso, a função  $Y(y)$  deve ser uma função par de  $y$ , para isso é necessário que  $C_1 = C_4 = 0$  na eq. (4.6). Substituindo a eq. (4.6) na eq. (4.5) obtém-se

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ C_2 \cosh \left( \frac{m\pi y}{a} \right) + C_3 \left( \frac{m\pi y}{a} \right) \text{senh} \left( \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \text{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \quad (4.7)$$

Para satisfazer as condições de contorno (4.3), tem-se

$$C_2 \cosh \alpha + C_3 \alpha \text{senh} \alpha = 0 \quad (4.8)$$

onde

$$\alpha = \frac{m\pi b}{2a} \quad (4.9)$$

Então,

$$C_2 = -C_3 \alpha \tanh \alpha \quad (4.10)$$

Assim a deflexão  $w$  para este caso toma a forma

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} C_3 \left[ \left( \frac{m\pi y}{a} \right) \text{senh} \left( \frac{m\pi y}{a} \right) - \alpha \tanh \alpha \cosh \left( \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \text{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \quad (4.11)$$

Para se determinar o valor da constante  $C_3$  usa-se a condição de contorno (4.4). A representação da distribuição dos momentos ao longo das bordas  $y = \pm b/2$  é dada pela série trigonométrica abaixo

$$M_y = \frac{4N_y e}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (4.12)$$

Substituindo as eqs. (4.11) e (4.12) nas condições de contorno (4.4), obtém-se

$$-2D \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} C_3 \cosh \alpha \text{sen} \frac{m\pi x}{a} = \frac{4N_y e}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (4.13)$$

e, a partir da eq. (4.13), tem-se

$$C_3 = \frac{2a^2 N_y e}{D\pi^3 m^3 \cosh \alpha} \quad (4.14)$$

Deste modo,

$$w = \frac{2N_y a^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3 \cosh \alpha} \left( \alpha \tanh \alpha \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \frac{m\pi x}{a} \quad (4.15)$$

A partir da eq. (4.15) pode-se determinar a deflexão  $w$  no centro da placa para qualquer relação de  $a/b$ . Esta é dada por

$$w = \frac{N_y e}{\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} \frac{1}{m^2} \frac{\tanh \alpha}{\cosh \alpha} \quad (4.16)$$

Timoshenko & Woinowski-Krieger, (1959), calcularam os valores da deflexão  $w$  em função dos momentos fletores, neste caso expressos por  $N_y e$ .

Estes valores estão mostrados na Tabela 13.

Tabela 13 – Deflexões no centro de uma placa retangular simplesmente apoiada e submetida a um carregamento  $N_y$  aplicado com excentricidade  $e$ . (Timoshenko & Woinowski-Krieger, 1959).

$b/a$	$w$
0,00	$0,1250N_y e b^2 / D$
0,50	$0,0964N_y e b^2 / D$
0,75	$0,0620N_y e b^2 / D$
1,00	$0,0368N_y e b^2 / D$
1,50	$0,0280N_y e b^2 / D$
2,00	$0,0174N_y e b^2 / D$

### 4.3.

#### Determinação das freqüências naturais e dos modos de vibração

Para determinação das freqüências naturais para a placa deformada devido a um carregamento axial excêntrico, devem ser generalizadas as eqs. (2.21) e (2.23) a fim de incorporar a possibilidade de uma deformação inicial  $w_0$  escrita em termos do deslocamento  $w$  e da função de tensão  $f$  como segue

$$D\nabla^4 W + \bar{m}\ddot{W} = F_{,YY} (W + W_0)_{,XX} - 2F_{,XY} (W + W_0)_{,XY} + F_{,XX} (W + W_0)_{,YY} \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 F = \left[ (W + W_0)_{,XY} \right]^2 - (W_0)_{,XY}^2 - (W + W_0)_{,XX} (W + W_0)_{,YY} + W_0)_{,XX} W_0)_{,YY} \quad (4.18)$$

Para facilitar os cálculos algébricos as eqs. (4.17) e (4.18) são normalizadas a seguir. São utilizadas as variáveis adimensionais

$$\begin{aligned} (w, w_0) &= (W, W_0)/h \\ f &= 2cF/Eh^3 \\ c &= \sqrt{3(1-\nu^2)} \\ (x, y) &= (1/b)(X, Y) \end{aligned} \quad (4.19)$$

O equilíbrio estático de uma placa comprimida biaxialmente é definido como

$$\begin{aligned} f_e(x, y) &= -\frac{1}{2}\bar{\sigma}_1 y^2 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_2 x^2 + f^*(x, y) \\ w_e(x, y) &= w^*(x, y) \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde

$$(\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y) = \frac{2cb^2}{Eh^3}(-N_x, -N_y) \quad (4.21)$$

Substituindo  $f = f_e(x, y)$  e  $w = w_e(x, y)$  nas eqs. (4.17) e (4.18), as equações não-lineares de equilíbrio estático e de compatibilidade ficam

$$\begin{aligned} \nabla^4 w^* &= 2c \left[ (-\bar{\sigma}_x + f_{,yy}^*) (w^* + w_0)_{,xx} + 2f_{,xy}^* (w^* + w_0)_{,xy} \right. \\ &\left. + (-\bar{\sigma}_y + f_{,xx}^*) (w^* + w_0)_{,yy} \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \nabla^4 f^* &= 2c \left\{ \left[ (w^* + w_0)_{,xy} \right]^2 - (w_{0,xy})^2 \right. \\ &\left. - (w^* + w_0)_{,xx} (w^* + w_0)_{,yy} + w_{0,xx} w_{0,yy} \right\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

A deformação inicial a ser aplicada é a calculada na seção anterior, ou seja, é a equação da deformada da placa quando submetida a um carregamento axial excêntrico, portanto

$$w_0(x, y) = \mu \text{sen}(J\pi x) \text{sen}(k\pi y) \quad (4.24)$$

onde  $\mu$  é a amplitude da deformação inicial calculada na seção anterior,  $J = jb/a$  e ambos  $j$  e  $k$  são inteiros positivos. Obviamente a forma do deslocamento estático será idêntico ao deslocamento inicial  $w_0$  considerado.

Deste modo tem-se:

$$w^*(x, y) = c_w \text{sen}(J\pi x) \text{sen}(k\pi y) \quad (4.25)$$

Substituindo as eqs. (4.24) e (4.25) na eq. (4.23), tem-se

$$\nabla^4 f^* = (\pi^4 c J^2 k^2) [(cw + \mu)^2 - \mu^2] [\cos(2J\pi x) + \cos(2k\pi y)] \quad (4.26)$$

Então a função de tensão  $f^*(x, y)$  que satisfaz exatamente a equação de compatibilidade é

$$f^*(x, y) = [(cw + \mu)^2 - \mu^2] [A_1 \cos(2J\pi x) + A_2 \cos(2k\pi y)] \quad (4.27)$$

onde as constantes  $A_1$  e  $A_2$  são

$$A_1 = \frac{ck^2}{16J^2} \quad (4.28)$$

$$A_2 = \frac{cJ^2}{16k^2}$$

Substituindo  $w^*(x, y)$ ,  $f^*(x, y)$  e  $w_0(x, y)$  na equação não-linear de equilíbrio estático (4.22) e aplicando o método de Galerkin (multiplicando ambos os lados por  $\sin(J\pi x)\sin(k\pi y)$  e integrando de  $x=0$  até  $a/b$  e  $y=0$  até 1), obtém-se uma equação cúbica em  $c_w + \mu$ . A partir de um dado valor do carregamento axial, pode-se encontrar  $c_w + \mu$  e, conseqüentemente,  $f^*(x, y)$ . Para simplificar os cálculos, far-se-á  $J = k = 1$ , deste modo esta expressão se torna

$$\frac{c^2}{2}(c_w^2 + \mu) + \left[ 4 - \frac{2c(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y)}{\pi^2} - \frac{c^2\mu^2}{2} \right] (c_w^2 + \mu)^3 - 4\mu = 0 \quad (4.29)$$

De posse dos resultados para a configuração de equilíbrio estática, esta pode ser adicionada ao estado dinâmico perturbado  $w_d(x, y, t)$  e  $f_d(x, y, t)$  e as equações diferenciais resultantes são linearizadas em relação ao estado dinâmico. Deste modo, as equações de equilíbrio e compatibilidade se tornam,

$$\nabla^4 w_d + (4\bar{m}c^2b^4/Eh^3)\ddot{w}_d = 2c \left[ (-\bar{\sigma}_x + f_{,yy}^*) w_{d,xx} + (-\bar{\sigma}_y + f_{,xx}^*) w_{d,yy} + f_{d,yy}(w^* + w_0)_{,xx} + f_{d,xx}(w^* + w_0)_{,yy} - 2f_{d,xy}(w^* + w_0)_{,xy} \right] \quad (4.30)$$

$$\nabla^4 f_d = 2c \left[ 2w_{d,xy}(w^* + w_0)_{,xy} - w_{d,yy}(w^* + w_0)_{,xx} - w_{d,xx}(w^* + w_0)_{,yy} \right] \quad (4.31)$$

O modo de vibração que satisfaz as condições de contorno para placa simplesmente apoiada está representado na eq. (4.32)

$$w_d(x, y, t) = \zeta \text{sen}(M\pi x) \text{sen}(n\pi y) e^{i\omega t} \quad (4.32)$$

onde  $\zeta$  é a amplitude do modo de vibração,  $M = mb/a$  e ambos  $m$  e  $n$  são inteiros positivos. Substituindo as eqs. (4.24), (4.25) e (4.32) na eq. (4.31),

obtem-se a equação de compatibilidade

$$\begin{aligned} \nabla^4 f_d = \zeta (c\pi^4/2)(c_w + \mu) \\ \left\{ -(Jn - kM)^2 \cos[(J + M)\pi x] \cos[(k + n)\pi y] \right. \\ + (Jn + kM)^2 \cos[(J + M)\pi x] \cos[(k - n)\pi y] + \\ + (Jn + kM)^2 \cos[(J - M)\pi x] \cos[(k + n)\pi y] + \\ \left. -(Jn - kM)^2 \cos[(J - M)\pi x] \cos[(k - n)\pi y] \right\} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Deve-se encontrar uma solução para a função de tensão  $f_d(x, y, t)$  que satisfaça exatamente a equação de compatibilidade, portanto:

$$\begin{aligned} f_d(x, y, t) = \zeta (c_w + \mu) e^{i\omega t} \\ \left\{ C_1 \cos[(J + M)\pi x] \cos[(k + n)\pi y] \right. \\ C_2 \cos[(J + M)\pi x] \cos[(k - n)\pi y] + \\ C_3 \cos[(J - M)\pi x] \cos[(k + n)\pi y] + \\ \left. C_4 \cos[(J - M)\pi x] \cos[(k - n)\pi y] \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde, adotando  $J = k = 1$  e  $M = n = 1$ , tem-se

$$\begin{aligned} C_1 = C_4 = 0 \\ C_2 = C_3 = c/8 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Desta forma pode ser obtida a função de tensão  $f_d(x, y, t)$ .

A equação de equilíbrio dinâmico é satisfeita aproximadamente, utilizando-se o método de Galerkin (multiplica-se ambos os lados da equação por  $\sin(J\pi x)\sin(k\pi y)$  e integra-se de  $x=0$  até  $a/b$  e  $y=0$  até 1). Assim, obtém-se uma função explícita para a frequência natural e para as forças de compressão no plano.

$$\Omega^2 + \frac{c(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y)}{2\pi^2} = -\frac{c}{16} \left[ -2c(c_w + \mu)^2 - \mu^2 \right] + \frac{c^2}{4} (c_w + \mu)^2 + 1 \quad (4.36)$$

onde

$$\Omega^2 = \frac{\bar{m}\omega^2 c^2 b^4}{Eh^3 \pi^4} \quad (4.37)$$

A Figura 32 mostra a variação da frequência natural em função do carregamento axial. Pode-se notar que a frequência cresce significativamente com o aumento da excentricidade. A curva mostra que a variação da frequência tem uma dependência maior da excentricidade do que do carregamento.

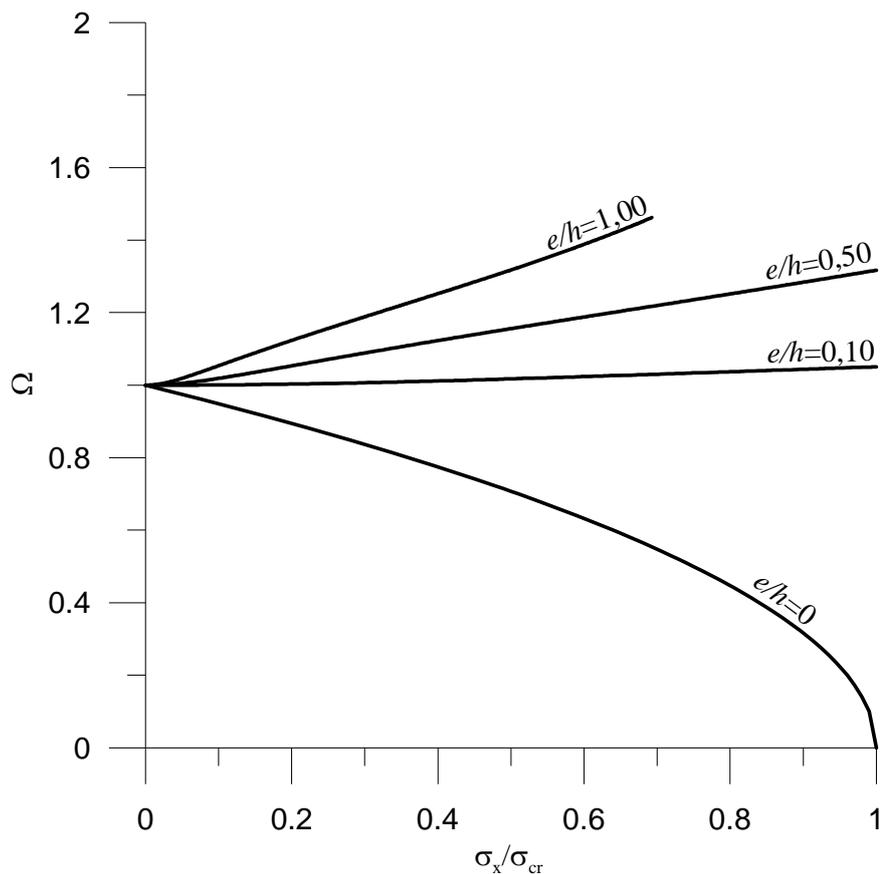


Figura 32 – Frequência natural em função do carregamento uniaxial para placa sem carregamento e com carregamento excêntrico.

Na Figura 33 mostra-se a relação entre a frequência e a excentricidade do carregamento. Pode-se notar claramente que o aumento da excentricidade aumenta a frequência a uma taxa praticamente linear.

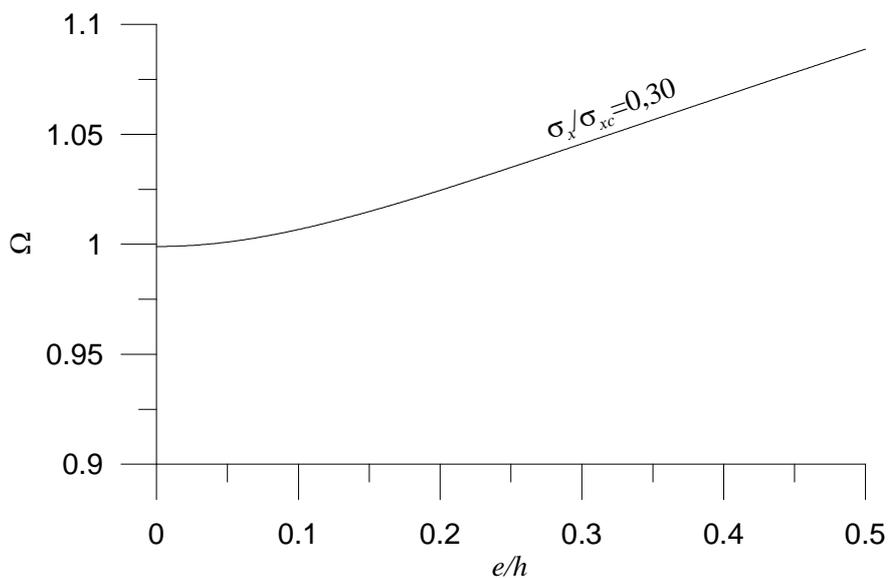


Figura 33 – Frequência natural em função da excentricidade do carregamento.

Os resultados da análise não-linear considerando carregamento excêntrico mostram que este método é também eficaz para o controle de vibrações em placas, pois a aplicação do carregamento altera a frequência natural da placa tornando possível a alteração das propriedades dinâmicas da estrutura e possibilitando um decréscimo nas amplitudes e velocidades do movimento harmônico.