

2 Formalismo de Análise

Neste Capítulo apresentamos o formalismo utilizado neste trabalho de tese. Primeiramente vamos realizar uma identificação das variáveis cinemáticas que caracterizam um decaimento de quatro corpos chegando até um conjunto mínimo de variáveis que definem o espaço de fase do processo. Depois definimos os tipos de decaimentos ressonantes e não-ressonantes e identificamos as sub-estruturas ressonantes que poderiam participar do decaimento $D^+ \rightarrow K_S \pi^- \pi^+ \pi^+$, obtendo assim, uma lista com todos os possíveis canais ressonantes a serem considerados na análise de amplitudes. Após isso, fazemos uma descrição do modelo isobárico que é o modelo fenomenológico adotado para fazer a nossa análise de amplitudes, e descrevemos as amplitudes invariantes de Lorentz para cada tipo de processo intermediário.

2.1 O Espaço de Fase

Se consideramos um decaimento de quatro corpos,

$$p_0 \rightarrow p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \quad (2-1)$$

o conjunto de todos os valores que podem assumir os quadri-vetores que representam as partículas no estado final é chamado de espaço de fase. Se não existisse nenhum tipo de restrição nos valores desses quadri-vetores, o espaço de fase estaria dado por um espaço de 16 dimensões, (*4 partículas* \times *4 dimensões cada partícula*). Pela conservação de quadri-momento esse número de graus de liberdade é diminuído por causa de quatro restrições

$$E_0 = \sum_{i=1}^4 E_i, \quad (2-2)$$

$$\mathbf{p}_0 = \sum_{i=1}^4 \mathbf{p}_i. \quad (2-3)$$

Sabemos também que as energias e momentos estão relacionados de tal maneira que fornecem outras quatro restrições:

$$E_i = \mathbf{p}_i^2 + m_i^2, \quad i = 0, 1, \dots, 4. \quad (2-4)$$

Então, até o momento, o número de variáveis possíveis no espaço de fase é 8. Além disso, estamos tratando com partículas sem spin. Ao ser analisado o decaimento no centro de massa da partícula que decai, não existe privilégio na orientação da configuração de momentos (isotropia) diminuindo assim o número de dimensões em 3, resultando finalmente um espaço de 5 dimensões.

No estudo da dinâmica de decaimento de partículas, raramente são escolhidos os vetores de momento \mathbf{p}_i para definir as variáveis do espaço de fase. É mais frequente escolher, por exemplo, massas invariantes ou momentos transferidos, o que permite formular modelos teóricos e também fornece uma melhor apreciação de características interessantes dos dados analisados. Para o nosso modelo, escolhemos um conjunto de massas quadradas invariantes de dois corpos. Assim, um ponto do espaço de fase é definido por:

$$\phi = \{s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{23}, s_{34}\}, \quad (2-5)$$

onde

$$\begin{aligned} s_{12} &= (p_1 + p_2)^2 \\ s_{13} &= (p_1 + p_3)^2 \\ s_{14} &= (p_1 + p_4)^2 \\ s_{23} &= (p_2 + p_3)^2 \\ s_{34} &= (p_3 + p_4)^2 \end{aligned} \quad (2-6)$$

Cada evento dos dados analisados pode assumir um e só um valor de ϕ , ou seja, cada evento ocupa um ponto do espaço de fase. Qualquer outra variável cinemática pode ser expressa em termos de ϕ .

A transformação de todos os possíveis valores $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ em variáveis ϕ nada mais é que uma projeção de um espaço de fase de 16 dimensões para um espaço de fase de 5 dimensões. Essa transformação é dada através da função $\rho(\phi)$, definida como a densidade de espaço de fase. Ela contém todos os fatores necessários para transformar os valores dos quadri-momentos do estado final do decaimento em variáveis ϕ . Diferentes valores de $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ podem ser representados pelo mesmo valor ϕ .

2.2 Decaimentos Ressonantes e Não-Ressonantes

Uma partícula que decai em quatro corpos pode fazê-lo de duas maneiras: um decaimento direto em quatro corpos chamado decaimento não-ressonante e um outro tipo de decaimento chamado decaimento ressonante, caracterizado pela presença de estados intermediários ou ressonâncias. Uma ressonância por sua vez decai por um processo de interação forte em duas ou três outras partículas ou novas ressonâncias. A figura 2.1 apresenta todos os possíveis decaimentos de quatro corpos. Podemos apreciar que existem 4 possibilidades

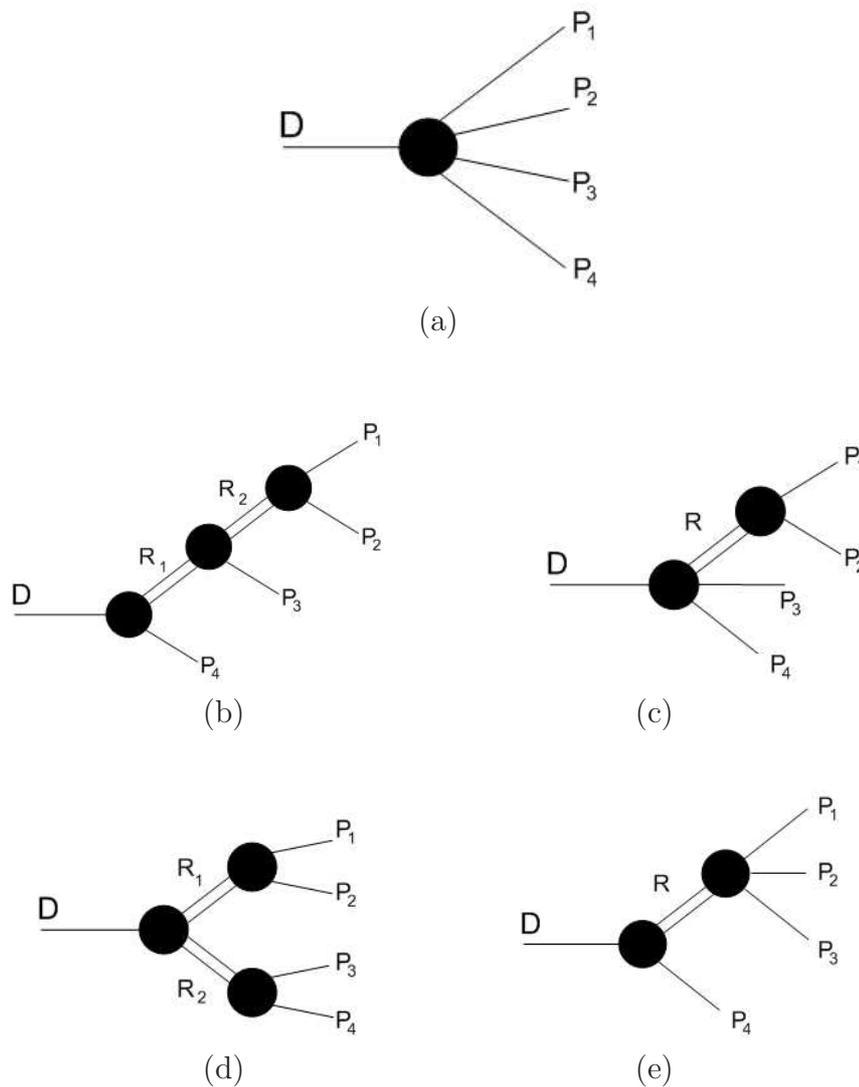


Figura 2.1: Decaimentos de 4 Corpos. (a) decaimento não-ressonante. (b), (c), (d) e (e) decaimentos ressonantes. (b) três decaimentos de dois corpos sucessivos. (c) um decaimento de três corpos seguido de um decaimento de dois corpos. (d) um decaimento de dois corpos seguido de dois decaimentos de dois corpos. (e) um decaimento de dois corpos seguido de um decaimento de três corpos.

para os decaimentos ressonantes. P_1, P_2, P_3 e P_4 são as partículas do estado final enquanto que R, R_1 e R_2 representam as ressonâncias.

2.2.1

Os Estados Intermediários dos Decaimentos Ressonantes

Para modelar um decaimento de 4 corpos, temos que levar em conta um considerável número de canais ressonantes que poderiam decair em duas ou três das partículas do estado final. Sabendo que as partículas que formam o estado final do decaimento são: K_S, π^-, π^+, π^+ , a Tabela 2.1 apresenta uma lista com a possível estrutura dos estados intermediários.

# Corpos	Tipo de Ressonância
2	$\pi^-\pi^+, K_S\pi^-, K_S\pi^+$
3	$\pi^-\pi^+\pi^+, K_S\pi^-\pi^+$

Tabela 2.1: Possíveis Estados Intermediários.

Uma maneira rápida e simples de inferir a provável contribuição de um estado intermediário é observar a projeção de massa invariante correspondente àquele estado específico. Por exemplo, se queremos verificar a existência de alguma ressonância $K_S\pi^-$, então observamos a projeção de massa invariante $K_S\pi^-$ e procuramos algum pico que possa colocar em evidência a ressonância. Porém, nem sempre essa inspeção visual é tão evidente devido aos fenômenos de interferência que podem mascarar a presença de determinadas ressonâncias.

As ressonâncias devem satisfazer requisitos de conservação adequados ao decaimento. Também, a taxa de decaimento ao estado respectivo deve ser significativa. Na Tabela 2.2, temos uma lista com as ressonâncias extraídas do PDG que poderiam ser um dos estados intermediários. Assim, por exemplo, no caso da estrutura $K_S\pi^-$, as possíveis ressonâncias seriam $K^{*-}(892), K_0^{*-}(1430), K_2^{*-}(1430), K^{*-}(1680)$ e $\kappa^-(800)$.

Estado Final	Ressonância
$\pi^-\pi^+\pi^+ = \{ u \bar{d} \}$	$a_1^+(1260), a_2^+(1320)$
$K_S\pi^-\pi^+ = \{ s \bar{d} \}$ ou $\{ \bar{s} d \}$	$K_1^0(1270), K_1^0(1400), K_1^{*0}(1410), K_1^{*0}(1430)$
$\pi^-\pi^+ = \{ u \bar{u} \} - \{ \bar{d} d \}$	$\rho's, f'_0s, f'_2s, \sigma$
$K_S\pi^- = \{ s \bar{u} \}$	$K^{*-}(892), K_0^{*-}(1430), K_2^{*-}(1430), K^{*-}(1680), \kappa^-$

Tabela 2.2: Lista de Ressonâncias Conhecidas.

Na figura 2.2, temos todos os diagramas correspondentes ao modo Favorecido por Cabibbo para o decaimento $D^+ \rightarrow K_S \pi^- \pi^+ \pi^+$. No caso do diagrama (a), a sub-estrutura $R_{u\bar{d}}$, segundo a Tabela 2.2, poderia ser a ressonância $a_1^+(1260)$ ou $a_2^+(1320)$, enquanto que a sub-estrutura $R_{d\bar{u}}$ poderia ser $\rho's$, $f_0's$, $f_2's$ ou σ .

Assim por exemplo, se supusermos que $R_{u\bar{d}}$ é o méson vetor axial $a_1^+(1260)$ e que $R_{d\bar{u}}$ é o vetor ρ^0 , teremos formado o canal:

$$D^+ \rightarrow a_1^+ \bar{K}_0, a_1^+ \rightarrow \rho^0 \pi^+, \rho^0 \rightarrow \pi^- \pi^+ \quad (2-7)$$

cujo modo genérico seria

$$D^+ \rightarrow AP_4, A \rightarrow VP_3, V \rightarrow P_1 P_2 \quad (2-8)$$

onde, P, V e A denotam pseudo-escalar, vetor e vetor-axial respectivamente.

Por outro lado, se ao invés do vetor ρ^0 , escolhermos o escalar σ teremos o canal:

$$D^+ \rightarrow a_1^+ \bar{K}_0, a_1^+ \rightarrow \sigma^0 \pi^+, \sigma^0 \rightarrow \pi^- \pi^+ \quad (2-9)$$

com modo

$$D^+ \rightarrow AP_4, A \rightarrow SP_3, S \rightarrow P_1 P_2 \quad (2-10)$$

onde S denota escalar.

Realizando um procedimento análogo para todos os outros diagramas da figura 2.2 e ressonâncias da Tabela 2.2 criamos a lista dos possíveis canais:

- $D^+ \rightarrow AP_4, A \rightarrow VP_3, V \rightarrow P_1 P_2$
- $D^+ \rightarrow a_1^+ \bar{K}_0, a_1^+ \rightarrow \rho^0 \pi^+, \rho^0 \rightarrow \pi^- \pi^+$
- $D^+ \rightarrow \bar{K}_1(1270)^0 \pi^+, \bar{K}_1(1270)^0 \rightarrow K^{*-}(892) \pi^+, K^{*-} \rightarrow \bar{K}_0 \pi^-$
- $D^+ \rightarrow \bar{K}_1(1270)^0 \pi^+, \bar{K}_1(1270)^0 \rightarrow \rho^0 \bar{K}_0, \rho^0 \rightarrow \pi^- \pi^+$
- $D^+ \rightarrow \bar{K}_1(1400)^0 \pi^+, \bar{K}_1(1400)^0 \rightarrow K^{*-}(892) \pi^+, K^{*-} \rightarrow \bar{K}_0 \pi^-$
- $D^+ \rightarrow \bar{K}_1(1400)^0 \pi^+, \bar{K}_1(1400)^0 \rightarrow \rho^0 \bar{K}_0, \rho^0 \rightarrow \pi^- \pi^+$
- $D^+ \rightarrow AP_4, A \rightarrow SP_3, S \rightarrow P_1 P_2$
- $D^+ \rightarrow a_1^+ \bar{K}_0, a_1^+ \rightarrow \sigma^0 \pi^+, \sigma^0 \rightarrow \pi^- \pi^+$
- $D^+ \rightarrow \bar{K}_1(1270)^0 \pi^+, \bar{K}_1(1270)^0 \rightarrow K_0^{*-}(1430) \pi^+, K_0^{*-}(1430) \rightarrow \bar{K}_0 \pi^-$
- $D^+ \rightarrow \bar{K}_1(1270)^0 \pi^+, \bar{K}_1(1270)^0 \rightarrow \kappa^- \pi^+, \kappa^- \rightarrow \bar{K}_0 \pi^-$
- $D^+ \rightarrow \bar{K}_1(1270)^0 \pi^+, \bar{K}_1(1270)^0 \rightarrow \sigma^0 \bar{K}_0, \sigma^0 \rightarrow \pi^- \pi^+$
- $D^+ \rightarrow \bar{K}_1(1270)^0 \pi^+, \bar{K}_1(1270)^0 \rightarrow f_0^0(980) \bar{K}_0, f_0^0(980) \rightarrow \pi^- \pi^+$
- $D^+ \rightarrow \bar{K}_1(1400)^0 \pi^+, \bar{K}_1(1400)^0 \rightarrow K_0^{*-}(1430) \pi^+, K_0^{*-}(1430) \rightarrow \bar{K}_0 \pi^-$
- $D^+ \rightarrow \bar{K}_1(1400)^0 \pi^+, \bar{K}_1(1400)^0 \rightarrow \kappa^- \pi^+, \kappa^- \rightarrow \bar{K}_0 \pi^-$

- $D^+ \rightarrow \bar{K}_1(1400)^0 \pi^+, \bar{K}_1(1400)^0 \rightarrow \sigma^0 \bar{K}_0, \sigma^0 \rightarrow \pi^- \pi^+$
- $D^+ \rightarrow \bar{K}_1(1400)^0 \pi^+, \bar{K}_1(1400)^0 \rightarrow f_0^0(980) \bar{K}_0, f_0^0(980) \rightarrow \pi^- \pi^+$
- $D^+ \rightarrow VP_3P_4, V \rightarrow P_1P_2$
 - $D^+ \rightarrow \rho^0 \bar{K}_0 \pi^+, \rho^0 \rightarrow \pi^- \pi^+$
 - $D^+ \rightarrow K^{*-}(892) \pi^+ \pi^+, K^{*-} \rightarrow \bar{K}_0 \pi^-$
- $D^+ \rightarrow SP_3P_4, S \rightarrow P_1P_2$
 - $D^+ \rightarrow \sigma^0 \bar{K}_0 \pi^+, \sigma^0 \rightarrow \pi^- \pi^+$
 - $D^+ \rightarrow f_0^0(980) \bar{K}_0 \pi^+, f_0^0(980) \rightarrow \pi^- \pi^+$
 - $D^+ \rightarrow K_0^{*-}(1430) \pi^+ \pi^+, K_0^{*-}(1430) \rightarrow \bar{K}_0 \pi^-$
 - $D^+ \rightarrow \kappa^- \pi^+ \pi^+, \kappa^- \rightarrow \bar{K}_0 \pi^-$

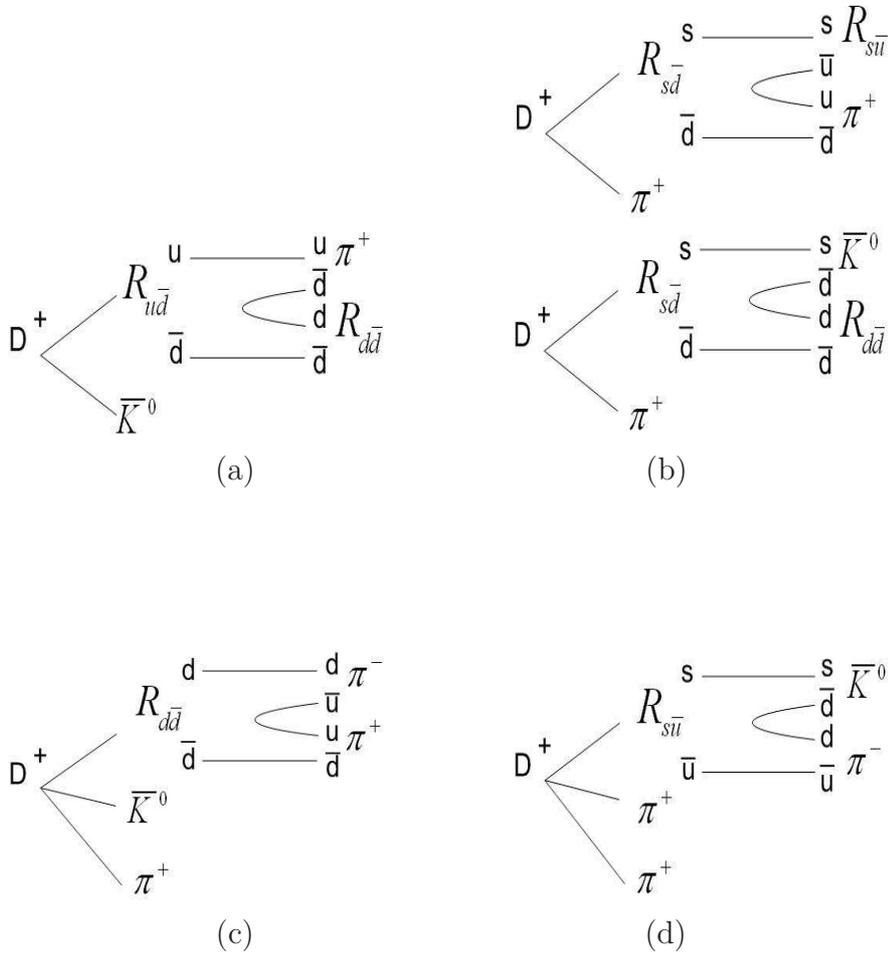


Figura 2.2: Diagramas correspondentes ao modo Favorecido por Cabibo para o decaimento $D^+ \rightarrow K_S \pi^- \pi^+ \pi^+$.

2.3

O Modelo Isobárico

O modelo isobárico é uma teoria fenomenológica para as interações fortes de energia intermediária (até alguns GeV) [2, 9]. Espera-se que a QCD forneça uma explicação fundamental das interações descritas pelo modelo isobárico. Atualmente o modelo isobárico não pode ser derivado da QCD e não é uma explicação fundamental das interações fortes, mas fornece uma descrição de muitos fenômenos das interações fortes.

O modelo isobárico supõe que a produção de partículas e decaimentos acontece através de ressonâncias. Para o caso do decaimento de uma partícula, o modelo isobárico é equivalente a *decaimentos seqüenciais de dois corpos*. Basicamente o modelo isobárico se baseia nas seguintes premissas:

- A amplitude deve ser uma função invariante de Lorentz dos quadrimomentos e spins dos estados inicial e final.
- A amplitude total pode ser representada como a soma dos produtos de funções *Breit-Wigners* as quais representam ressonâncias conhecidas.
- As ressonâncias são sempre as mesmas em todos os processos, ou seja, têm a mesma massa nominal, largura nominal, carga, etc.
- Cada decaimento de dois corpos tem associado um elemento de matriz invariante de Lorentz que representa a distribuição angular devido aos spins das partículas que intervêm no decaimento.
- Cada decaimento de dois corpos tem associada uma amplitude que é usualmente parametrizada como uma constante complexa. Em um decaimento de dois corpos para partículas sem spin, a forma invariante mais geral para esta amplitude poderia ser uma função arbitrária da massa invariante de dois corpos. Uma constante complexa é uma razoável aproximação para ressonâncias finas. Já para o caso de ressonâncias largas, isto constitui uma hipótese.

2.3.1

A Função Breit-Wigner

A função Breit-Wigner depende da massa e largura das ressonâncias. A fórmula da Breit-Wigner foi adotada pelo Modelo Isobárico a partir da física atômica e molecular, onde os picos muito finos nas seções de choque são interpretados tipicamente como estados ligados em um potencial central e descritos através dessas funções. Quando foram descobertas as ressonâncias no espalhamento pión-nucleón, foi feita uma analogia com os estados observados dos picos mais finos encontrados na física atômica e molecular, então a

Breit-Wigner passou a ser aplicada nas interações hadrônicas de baixa energia.

Como exemplo para mostrar a origem da função Breit-Wigner consideremos a função de onda de uma partícula não-relativística:

$$\psi(t) = \psi_0 e^{\frac{-iEt}{\hbar}} \quad (2-11)$$

Para que ocorra uma transição (decaimento) onde as partículas se desintegram independentemente e que a probabilidade de decaimento seja independente do tempo, a energia deve ser complexa, digamos $E = E_0 - i\Gamma/2$. Logo, calculando a transformada de Fourier da equação 2-11

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(E) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{iEt}{\hbar}} \psi(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi_0 \int_0^{+\infty} e^{i\frac{(E-E_0)t}{\hbar} - \frac{\Gamma t}{2\hbar}} dt, \end{aligned} \quad (2-12)$$

se $\Gamma \ll |E - E_0|$:

$$\tilde{\psi}(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi(0) \frac{1}{(E - E_0) + i\frac{\Gamma}{2}}. \quad (2-13)$$

obtem-se assim a função Breit-Wigner não-relativística:

$$BW_{NRel} = \frac{1}{(E - E_0) + i\frac{\Gamma}{2}} \quad (2-14)$$

Observa-se que a densidade de probabilidade $|\tilde{\psi}(E)|^2$ alarga-se em torno de E_0 e Γ indica a largura total do decaimento. Este parâmetro Γ difere para cada partícula de acordo às interações que determinam seu decaimento.

O Modelo Isobárico usa algumas variantes da fórmula de Breit-Wigner, podendo esta ser uma Breit-Wigner relativística ou não-relativística onde a massa m_0 é constante e a largura Γ pode ser constante Γ_0 ou uma função dependente da massa $\Gamma(m)$. Quando a ressonância é fina, a fórmula da Breit-Wigner com largura Γ_0 constante não é muito diferente da fórmula com Breit-Wigner de largura $\Gamma(m)$, mas quando a ressonância é larga, essas duas versões podem ser significativamente diferentes.

Estaremos aqui considerando a Breit-Wigner relativística [4] para o decaimento de uma ressonância R , $R \rightarrow AB$:

$$BW_{R,AB} = \frac{1}{m_{0R}^2 - m_{AB}^2 - im_{0R}\Gamma_R}, \quad (2-15)$$

onde m_{AB} é o momento total das partículas A e B, m_{0R} é a massa nominal da ressonância R e Γ_R sua largura, que depende da massa e para o caso de decaimento de dois corpos está dada pela expressão:

$$\Gamma_R = \frac{F_R^2(p^*)}{F_R^2(p_0^*)} \left(\frac{p^*}{p_0^*} \right)^{2J+1} \frac{m_{0R}}{m_{AB}} \Gamma_{0R} \quad (2-16)$$

Γ_{0R} é a largura total de R e onde p^* é o módulo do momento dos (dois) mésons produzidos no referencial de repouso do méson que decai. p_0^* é o valor que p^* assume para $m_{AB} = m_{0R}$.

Esta fórmula 2-16, é a que usaremos para as ressonâncias $R \rightarrow PP$. As massas e larguras de alguns estados ressonantes que decaem em dois corpos são mostrados na Tabela 2.3.

Ressonância	Massa (MeV/c ²)	Largura (MeV/c ²)
σ	478	324
$\rho^0(770)$	775	149
κ	797	410
$f_0(980)$	980	40-100
$K^*(890)^-$	892	50.8
$K^*(1430)$	1414	290

Tabela 2.3: Valores de massa e largura nominais de algumas ressonâncias. Os valores são tirados do PDG [31] com exceção do σ [20] e κ [22], cujos parâmetros vêm do experimento E791.

Para os vetores-axiais $K_1(1270)$, $K_1(1400)$, $a_1(1260)$, que decaem, em 3 corpos, a fórmula 2-16 não é mais válida. Para eles, iremos utilizar a expressão para o cálculo da largura em decaimentos de três corpos definida como:

$$d\Gamma(M) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32M^3} |\mathcal{M}|^2 dm_{12}^2 dm_{23}^2, \quad (2-17)$$

onde m_{12}^2 e m_{23}^2 são as duas massas invariantes das partículas do estado final, M é a massa da partícula que decai em três corpos e \mathcal{M} é a amplitude invariante de Lorentz (que obedece a conservação de momento angular). Dessa maneira, para encontrar o valor da largura, devemos então integrar a expressão 2-17 no espaço de fase de três corpos. Mostraremos detalhadamente no Capítulo 6 o procedimento utilizado para encontrar a forma dessas larguras. Os valores nominais de massa e largura dos vetores-axiais são apresentados na Tabela 2.4, como constam no PDG. Para o caso do vetor-axial a_1 , estes valores não estão bem estabelecidos, por esse motivo, foi aplicado um método de busca, que também será apresentado no Capítulo 6.

2.3.2

As Amplitudes ou Elementos de Matriz de Cada Canal

As Amplitudes ou Elementos de Matriz de cada canal estão dadas pelo produto de Amplitudes que representam a distribuição angular na interação devido ao spin das partículas que interagem e por Fatores de Forma. Assim,

Ressonância	Massa (MeV/c ²)	Largura (MeV/c ²)
$K_1(1270)$	1273	90
$K_1(1400)$	1402	174
$a_1(1260)$	1230	250-600

Tabela 2.4: Massa e largura nominais dos vetores-axiais considerados, segundo o PDG .

Spin J	Fator de Forma $^J F_X$
0	$e^{-(p^* r_X)^2/12}$
1	$\frac{1}{\sqrt{1+r_X^2 p^{*2}}}$
2	$\frac{1}{\sqrt{9+3 r_X^2 p^{*2}+r_X^4 p^{*4}}}$

Tabela 2.5: Fatores de Forma para os diferentes momentos angulares relativos. Para $J = 0$, usa-se o fator de forma de Tornqvist e para $J = 1$ ou $J = 2$ usa-se o fator de forma Blatt-Weisskopf. r_X é o raio efetivo da partícula X

por exemplo, para o decaimento da ressonância R , $R \rightarrow AB$, a amplitude será dada por $\mathcal{A}_{R \rightarrow AB} = {}^J R F_{R,AB} \mathcal{M}_{R \rightarrow AB}$.

2.3.3 Os Fatores de Forma

Os fatores de forma são usados para expressar dependência de energia ou descrever o tamanho finito dos hádrons. Os fatores de forma representam o efeito de penetração dos mésons necessário à interação. Para o caso em que o momento angular relativo é 1 ou 2 são usados fatores de forma de Blatt-Weisskopf [3] enquanto que para $J = 0$ usamos fatores de forma de Tornqvist[18]. As funções dos fatores de forma de Blatt-Weisskopf e Tornqvist estão dadas na Tabela 2.5 , onde o parâmetro r é uma medida do raio efetivo da interação. Valores obtidos anteriormente em análises similares [17] indicam $r_D = 3 - 7 GeV^{-1}$ para o méson D e $r_R = 0 - 3 GeV^{-1}$ para ressonâncias $K\pi$ e $\pi\pi$. Neste trabalho fixamos $r_D = 5.0 GeV^{-1}$ e $r_R = 1.5 GeV^{-1}$.

Os fatores de forma variam lentamente com a energia. Verificamos no capítulo 7 que o resultado do ajuste não é muito sensível aos valores de r_D e r_R .

2.3.4 A Distribuição Angular

Para representar a distribuição angular devido ao spin das partículas que interagem, são construídas amplitudes usando o formalismo tensorial relativístico [5], o qual explora a conexão entre os únicos observáveis disponíveis (os quadri-momentos das partículas do estado final) e a dinâmica do momento

angular. O momento angular envolvido em cada vértice é representado pelos quadri-vetores de polarização, os quais, ao igual que todos os quadri-momentos relevantes, são escritos em termos dos quadri-momentos do estado final. Todas as possíveis combinações entre os quadri-momentos e quadri-vetores de polarização são restritas por covariância, invariância por rotações e conservação de paridade.

As regras específicas para formar as amplitudes são [19, 14, 13, 34]:

- As amplitudes devem ser formadas por combinações contraídas dos quadri-momentos disponíveis e dos quadri-vetores de polarização. As amplitudes devem ser invariantes de Lorentz. Todos os quadri-vetores de polarização devem ser usados para formar as amplitudes mas os quadri-momentos nem sempre. Isto significa que há uma certa liberdade de escolha na representação das amplitudes.
- As amplitudes devem ser escalares ou pseudo-escalares, dependendo dos requerimentos das propriedades de paridade. O produto das paridades intrínsecas da partícula que decai e das partículas finais determina os requerimentos das propriedades de transformação de paridade das amplitudes.
- Fótons devem satisfazer $\epsilon^\mu p_\mu = 0$, ϵ é o seu quadri-vetor de polarização e p seu quadri-momento.
- Estados intermediários devem ser somados sobre suas helicidades usando as relações de completeza:

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}^{\lambda*} \epsilon_{\nu}^{\lambda} = -g_{\mu\nu} + \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{M^2} \quad (2-18)$$

2.4

Aplicando o Modelo Isobárico aos Modos Ressonantes do Decaimento

Tínhamos visto em 2.2.1 que os possíveis modos ressonantes para o decaimento $D^+ \rightarrow K_S \pi^- \pi^+ \pi^+$ são:

$$\begin{aligned} \text{Modo AV : } D^+ &\rightarrow AP_4, A \rightarrow VP_3, V \rightarrow P_1 P_2 \\ \text{Modo AS : } D^+ &\rightarrow AP_4, A \rightarrow SP_3, S \rightarrow P_1 P_2 \\ \text{Modo VPP : } D^+ &\rightarrow VP_3 P_4, V \rightarrow P_1 P_2 \\ \text{Modo SPP : } D^+ &\rightarrow SP_3 P_4, S \rightarrow P_1 P_2 \end{aligned} \quad (2-19)$$

onde, P, S, V e A denotam pseudo-escalar, escalar, vetor e vetor-axial respectivamente.

A estes modos ressonantes acrescentamos também o modo não-ressonante:

$$D^+ \rightarrow P_1 P_2 P_3 P_4 \quad (2-20)$$

A seguir, aplicamos o modelo isobárico para cada um desses modos de decaimento para assim obter as expressões para as amplitudes correspondentes a cada canal de decaimento.

Tendo em vista que no modo $D^+ \rightarrow AP_4, A \rightarrow VP_3, V \rightarrow P_1 P_2$ o Axial A pode ter momento angular correspondente à onda-S ou onda-D, analisamos os dois casos para este canal.

2.4.1

Modo AV em Onda-S

O canal $D^+ \rightarrow AP_4, A \rightarrow VP_3, V \rightarrow P_1 P_2$ está composto por 3 decaimentos sucessivos de dois corpos. Para cada decaimento teremos associado um fator da amplitude total do canal: $\mathcal{A}_{D^+ \rightarrow AP_4}, \mathcal{A}_{A \rightarrow VP_3}$ e $\mathcal{A}_{V \rightarrow P_1 P_2}$. Cada fator deve ter as características que dependem dos requerimentos de conservação de momento angular e paridade. Pode ser observada a presença de duas ressonâncias: um vetor axial A e um vetor V . Cada ressonância deve ser representada por sua correspondente função Breit-Wigner, $BW_{A \rightarrow VP_3}$ e $BW_{V \rightarrow P_1 P_2}$. Reunindo todos estes ingredientes e somando sobre as correspondentes helicidades, formamos a amplitude do canal:

$$\mathcal{A} = \sum_{polariza\tilde{c}oes} \{ \mathcal{A}_{D^+ \rightarrow AP_4} \} \times BW_{A \rightarrow VP_3} \times \{ \mathcal{A}_{A \rightarrow VP_3} \} \times BW_{V \rightarrow P_1 P_2} \times \{ \mathcal{A}_{V \rightarrow P_1 P_2} \} \quad (2-21)$$

As amplitudes de cada decaimento intermediário estão formadas por um fator de forma e por um amplitude invariante de Lorentz,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{D^+ \rightarrow AP_4} &= {}^{J_D} F_{D, AP_4} \mathcal{M}_{D^+ \rightarrow AP_4} \\ \mathcal{A}_{A \rightarrow VP_3} &= {}^{J_A} F_{A, VP_3} \mathcal{M}_{A \rightarrow VP_3} \\ \mathcal{A}_{V \rightarrow P_1 P_2} &= {}^{J_V} F_{V, P_1 P_2} \mathcal{M}_{V \rightarrow P_1 P_2} \end{aligned} \quad (2-22)$$

Então da equação 2-21 temos:

$$\mathcal{A} = {}^{J_D} F_{D, AP_4} {}^{J_A} F_{A, VP_3} {}^{J_V} F_{V, P_1 P_2} BW_A BW_V \mathcal{M} \quad (2-23)$$

onde:

$$\mathcal{M} = \sum_{polariza\tilde{c}oes} \{ \mathcal{M}_{D^+ \rightarrow AP_4} \} \{ \mathcal{M}_{A \rightarrow VP_3} \} \{ \mathcal{M}_{V \rightarrow P_1 P_2} \} \quad (2-24)$$

Como dito anteriormente, as amplitudes invariantes de Lorentz devem

ser formadas por combinações contraídas dos quadri-momentos disponíveis e dos quadri-vetores de polarização.

Para o caso de $\mathcal{M}_{D \rightarrow AP_4}$, escolhe-se usar o quadri-momento p_{P_4} da partícula final P_4 e o vetor de polarização ϵ^A do axial A , assim

$$\mathcal{M}_{D \rightarrow AP_4} = p_{P_4}^\mu \epsilon_\mu^A \quad (2-25)$$

Para $\mathcal{M}_{A \rightarrow VP_3}$, devemos usar os quadri-vetores de polarização de A e de V , assim:

$$\mathcal{M}_{A \rightarrow VP_3} = \epsilon_\nu^{*A} \epsilon_\nu^V \quad (2-26)$$

Para $\mathcal{M}_{V \rightarrow P_1 P_2}$ consideramos o quadri-vetor de polarização ϵ^{*V} da ressonância V e o quadri-momento q_V formado pela diferença dos quadri-momentos das partículas P_1 e P_2 (a soma dos quadri-momentos de P_1 e P_2 é o momento de V , temos portanto $\epsilon^{*V} p_V = 0$).

$$\mathcal{M}_{V \rightarrow P_1 P_2} = \epsilon_V^{*\sigma} q_{V\sigma} \quad (2-27)$$

Desta maneira,

$$\mathcal{M} = \sum_{\text{polarizações}} \{p_{P_4}^\mu \epsilon_\mu^A\} \{\epsilon_\nu^{*A} \epsilon_\nu^V\} \{\epsilon_V^{*\sigma} q_{V\sigma}\} \quad (2-28)$$

Agrupando pelos respectivos somatórios de helicidade

$$\mathcal{M} = p_{P_4}^\mu \sum_{\lambda_A} \epsilon_\mu^A(\lambda_A) \epsilon_\nu^{*A}(\lambda_A) \sum_{\lambda_V} \epsilon_\nu^V(\lambda_V) \epsilon_V^{*\sigma}(\lambda_V) q_{V\sigma} \quad (2-29)$$

e aplicando relações de completeza:

$$\mathcal{M} = p_{P_4}^\mu \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_{A\mu} p_{A\nu}}{M_A^2} \right) \left(g^{\nu\sigma} - \frac{p_V^\nu p_V^\sigma}{M_V^2} \right) q_{V\sigma} \quad (2-30)$$

o que, após multiplicar e contrair dá:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & p_{P_4}^\mu q_{V\mu} - \left(\frac{(p_{P_4}^\mu p_{V\mu})(p_V^\sigma q_{V\sigma})}{M_V^2} \right) - \left(\frac{(p_{P_4}^\mu p_{A\mu})(p_{A\nu} q_V^\nu)}{M_A^2} \right) + \\ & \left(\frac{(p_{P_4}^\mu p_{A\mu})(p_{A\nu} p_V^\nu)(p_V^\sigma q_{V\sigma})}{M_A^2 M_V^2} \right) \end{aligned} \quad (2-31)$$

2.4.2

Modo AV em Onda-D

Este modo difere do modo de Onda-S em dois aspectos: primeiramente o fator de forma do vetor axial A considera aqui o momento angular orbital correspondente à onda-D, então $J^A = 2$. A segunda diferença é que na equação 2-24 o fator $\mathcal{M}_{A \rightarrow VP_3}$ é construído com os dois quadri-vetores de polarização ϵ^{*A} e ϵ^V mas também são usados os quadri-momentos da ressonância A : p_A e

q_A . Logo,

$$\mathcal{M}_{A \rightarrow VP_3} = \epsilon_\nu^{*A} q_A^\nu p_A^\sigma \epsilon_V^\nu \quad (2-32)$$

Desta maneira, a amplitude se escreve:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \sum_{\text{polarizações}} \{p_{P_4}^\mu \epsilon_\mu^A\} \{\epsilon_\nu^{*A} q_A^\nu p_A^\sigma \epsilon_V^\nu\} \{\epsilon_V^{*\sigma} q_{V\sigma}\} \\ &= \left(p_{P_4}^\mu \sum_{\lambda_A} \epsilon_\mu^A(\lambda_A) \epsilon_\nu^{*A}(\lambda_A) q_A^\nu \right) \left(p_A^\sigma \sum_{\lambda_V} -\epsilon_V^\sigma(\lambda_V) \epsilon_V^{*\alpha}(\lambda_V) q_V^\alpha \right) \\ &= \left(p_{P_4}^\mu \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_{A\mu} p_{A\nu}}{M_A^2} \right) q_A^\nu \right) \left(p_A^\sigma \left(-g_{\sigma\alpha} + \frac{p_{V\sigma} p_{V\alpha}}{M_V^2} \right) q_V^\alpha \right) \\ &= \left(p_{P_4}^\mu q_{A\mu} - \frac{(p_{P_4}^\mu p_{A\mu})(p_{A\nu} q_A^\nu)}{M_A^2} \right) \left(-p_A^\sigma q_{V\sigma} + \frac{(p_A^\sigma p_{V\sigma})(p_{V\alpha} q_V^\alpha)}{M_V^2} \right) \end{aligned} \quad (2-33)$$

2.4.3

Modo AP

No modo $D^+ \rightarrow AP_4, A \rightarrow SP_3, S \rightarrow P_1 P_2$ agimos de maneira similar aos casos anteriores

$$\mathcal{A} = \sum_{\text{polarizações}} \{\mathcal{A}_{D \rightarrow AP_4}\} \times BW_A \times \{\mathcal{A}_{A \rightarrow SP_3}\} \times BW_S \times \{\mathcal{A}_{S \rightarrow P_1 P_2}\} \quad (2-34)$$

$$= {}^{J_D} F_{D,AP_4} {}^{J_A} F_{A,SP_3} {}^{J_S} F_{S,P_1 P_2} BW_A BW_S \mathcal{M} \quad (2-35)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \sum_{\text{polarizações}} \{M_{D^+ \rightarrow AP_4}\} \{M_{A \rightarrow SP_3}\} \{M_{S \rightarrow P_1 P_2}\} \\ &= \sum_{\text{polarizações}} \{p_{P_4}^\mu \epsilon_\mu^A\} \{\epsilon_\nu^{*A} q^{A\nu}\} \{1\} \\ &= p_{P_4}^\mu \sum_{\lambda_A} \epsilon_\mu^A(\lambda_A) \epsilon_\nu^{*A}(\lambda_A) q^{A\nu} \\ &= p_{P_4}^\mu \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_{A\mu} p_{A\nu}}{M_A^2} \right) q^{A\nu} \\ &= (p_{P_4}^\mu q_{A\nu}) - \frac{(p_{P_4}^\mu p_{A\mu})(p_{A\nu} q^{A\nu})}{M_A^2} \end{aligned} \quad (2-36)$$

2.4.4

Modo VPP

Para o modo $D^+ \rightarrow VP_3P_4, V \rightarrow P_1P_2$, fazemos uma aproximação com o decaimento de três corpos $D^+ \rightarrow VP'_3, V \rightarrow P_1P_2$. P'_3 é uma partícula fictícia formada pelas partículas P_3 e P_4 .

A descrição geral, que estabelece amplitudes de decaimento ressonantes de 3 corpos para estados intermediários com qualquer spin, foi elaborada por Zemach [5, 6, 7] e está dada por:

$$\mathcal{A}_{D \rightarrow RP_3, R \rightarrow P_1P_2} = {}^{J_D}F_{D,RP_3} {}^{J_R}F_{R,P_1P_2} (-2 | \vec{p}_{P_1}^* || \vec{p}_{P_3}^* |)^{J_R} \times P_{J_R}(\cos\theta_{P_1P_3}) \times BW_R \quad (2-37)$$

Na expressão acima, P_{J_R} é o polinômio de Legendre de ordem J_R , J_R é o spin da ressonância R e $\theta_{P_1P_3}$ é o ângulo entre as partículas P_1 e P_3 que, como os momentos $\vec{p}_{P_1}^*$ e $\vec{p}_{P_3}^*$, está medido no referencial de repouso de R [12].

Aplicando no caso do decaimento $D^+ \rightarrow VP'_3, V \rightarrow P_1P_2$, com $J_V = 1$, temos

$$\mathcal{A} = {}^{J_D}F_{D,VP'_3} {}^{J_V}F_{V,P_1P_2} (-2 | \vec{p}_{P_1}^* || \vec{p}_{P'_3}^* |) \cos\theta_{P_1P'_3} \times BW_{V \rightarrow P_1P_2} \quad (2-38)$$

2.4.5

Modo SPP

No modo $D^+ \rightarrow SP_3P_4, S \rightarrow P_1P_2$:

$$\mathcal{A} = \sum_{\text{polarizações}} \{ \mathcal{A}_{D \rightarrow SP_3P_4} \} \times BW_{S \rightarrow P_1P_2} \times \{ \mathcal{A}_{S \rightarrow P_1P_2} \} \quad (2-39)$$

$$\mathcal{A} = {}^{J_D}F_{D,SP_3P_4} {}^{J_S}F_{S,P_1P_2} BW_{S \rightarrow P_1P_2} \mathcal{M} \quad (2-40)$$

onde:

$$\mathcal{M} = \sum_{\text{polarizações}} \{ \mathcal{M}_{D \rightarrow SP_3P_4} \} \{ \mathcal{M}_{S \rightarrow P_1P_2} \} \quad (2-41)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{D \rightarrow SP_3P_4} &= 1 \\ \mathcal{M}_{S \rightarrow P_1P_2} &= 1 \end{aligned} \quad (2-42)$$

então:

$$\mathcal{A} = {}^{J_D}F_{D,SP_3P_4} {}^{J_S}F_{S,P_1P_2} BW_{S \rightarrow P_1P_2} \quad (2-43)$$

2.4.6

Modo Não-ressonante

A contribuição não-ressonante, ou seja $D^+ \rightarrow P_1 P_2 P_3 P_4$, pelo fato de não apresentar uma estrutura dominante à amplitude de transição (funções Breit-Wigner), tem sido tomada como uniforme. Ou seja,

$$\mathcal{A}_{NR} = 1 . \quad (2-44)$$

2.5

A Amplitude Total

Dado que o decaimento $D^+ \rightarrow K_S \pi^- \pi^+ \pi^+$ apresenta dois píons idênticos (π_2^+ e π_3^+) no estado final, a amplitude do decaimento deve ser simetrizada em relação à troca de um pelo outro. Assim, por exemplo, a amplitude para o estado ressonante $D^+ \rightarrow a_1 K_S, a_1^+ \rightarrow \rho^0 \pi_3^+, \rho^0 \rightarrow \pi_1^- \pi_2^+$ está dada por:

$$\mathcal{A} = \begin{aligned} & J_D F_{D,a_1 K_S} J_{a_1} F_{a_1, \rho^0 \pi_3^+} J_{\rho^0} F_{\rho^0, \pi_1^- \pi_2^+} BW_{a_1 \rightarrow \rho^0 \pi_3^+} BW_{\rho^0 \rightarrow \pi_1^- \pi_2^+} \mathcal{M} + \\ & (\pi_2^+ \leftrightarrow \pi_3^+) , \end{aligned} \quad (2-45)$$

A amplitude total do decaimento deve ser construída a partir de todos os possíveis estados intermediários, podendo existir interferência entre eles. A amplitude mais geral possível deve ser escrita como uma superposição coerente de todas as amplitudes individuais, ressonantes e não-ressonantes. Para isso, multiplicamos as amplitudes individuais \mathcal{A}_i de cada sub-canal por um peso relativo real a_i e uma fase δ_i e somamos:

$$\mathcal{M}(D^+ \rightarrow K_S \pi^- \pi^+ \pi^+) = \sum_i a_i e^{i\delta_i} \mathcal{A}_i . \quad (2-46)$$

A expressão da amplitude de decaimento como mostrada acima vem sendo usualmente utilizada em análises de decaimentos do méson D . Deve-se considerar, entretanto, que essa amplitude é uma aproximação fenomenológica. Neste modelo, estamos admitindo que as fases δ_i e os coeficientes a_i são constantes, porém eles poderiam exibir alguma dependência em relação às variáveis cinemáticas.

A probabilidade de cada evento no espaço de fase é proporcional a:

$$\mathcal{P}_{D^+ \rightarrow K_S \pi^- \pi^+ \pi^+} \propto |\mathcal{M}_{D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+}|^2 \rho(\phi) . \quad (2-47)$$

onde $\rho(\phi)$ representa a densidade de espaço de fase no espaço de 5 dimensões ϕ 2-5.

O objetivo da análise é encontrar os parâmetros a_i e δ_i da equação 2-46 mediante um ajuste da função probabilidade \mathcal{P} acima à distribuição

experimental de eventos no espaço de fase.

Devido à presença de interferências, é necessário ter cuidado na interpretação da probabilidade do estado final ser formado via um determinado sub-canal i . A esta probabilidade nos referimos como *fração de decaimento* de i (f_i).

As frações do decaimento são obtidas a partir dos coeficientes a_i e δ_i , determinados pelo ajuste, via integração da amplitude total do sinal no espaço de fase do decaimento $D^+ \rightarrow K_S \pi^- \pi^+ \pi^+$:

$$f_i = \frac{\int d\phi \rho(\phi) |a_i e^{i\delta_i} \mathcal{A}_i(\phi)|^2}{\int d\phi \rho(\phi) |\sum_j a_j e^{i\delta_j} \mathcal{A}_j(\phi)|^2} = \frac{|a_i e^{i\delta_i}|^2}{\int d\phi \rho(\phi) |\sum_j a_j e^{i\delta_j} \mathcal{A}_j(\phi)|^2}, \quad (2-48)$$

onde as amplitudes individuais $\mathcal{A}_i(\phi)$ são normalizadas tal que $\int d\phi \rho(\phi) |\mathcal{A}_i(\phi)|^2 = 1$. Os erros nas frações incluem erros nas magnitudes e fases, e são calculados usando a matriz de covariância. Ao contrário de uma soma de frações convencional, temos em geral $\sum_i f_i \neq 1$ devido a efeitos de interferência.

2.6

Resultados Anteriores

2.6.1

Colaboração Mark III

A única análise para o decaimento de quatro corpos $D^+ \rightarrow K_S \pi^- \pi^+ \pi^+$ foi feita há 15 anos pela colaboração MARK III [15], com apenas 209 ± 20 eventos. Os resultados indicaram a predominância do estado $K_S a_1^+$ e contribuições de $\bar{K}_1(1400)^0 \pi^+$ e NR. Apenas limites superiores foram estabelecidos para outras contribuições. Os resultados estão mostrados na Tabela 2.6.

Com uma amostra cerca de 40 vezes maior que a da Colaboração Mark III, queremos, nesta análise, explorar a contribuição de outros canais de decaimento para os quais Mark III claramente não teve sensibilidade.

Amplitude	Fração (%)	Fase	Razão de Ramificação(%)
NR	$17.0 \pm 5.6 \pm 10.0$	1.09 ± 0.28	$1.1 \pm 0.4 \pm 0.7$
$K_S a_1^+$	$53.9 \pm 5.7 \pm 7.0$	0.0	$7.1 \pm 1.8 \pm 1.1$
$\bar{K}_1(1400)^0 \pi^+$	$27.7 \pm 4.7 \pm 8.0$	-0.07 ± 0.32	$4.1 \pm 1.2 \pm 1.2$
$\bar{K}_1(1270)^0 \pi^+$	-	-	< 1.1
$K^{*-} \pi^+ \pi^+$	-	-	< 1.3
$K_S \rho^0 \pi^+$	-	-	< 0.4
$\bar{K}^*(1415)^0 \pi^+$	-	-	< 0.7
$K_S a_2(1320)^+$	-	-	< 0.8

Tabela 2.6: Canais de decaimento $D^+ \rightarrow K_S \pi^- \pi^+ \pi^+$ MARK III.

2.6.2

D^+ em 4 píons pela Colaboração FOCUS

A colaboração FOCUS publicou recentemente o estudo do decaimento $D^0 \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^- \pi^+$ [34] com uma estatística de 6153 eventos.

O trabalho de tese apresentando aqui utiliza o mesmo formalismo desse estudo. A principal diferença entre ambos canais de decaimento (além do fato de se tratar do méson D^+ e do méson D^0) encontra-se no estado final. No caso do decaimento $D^0 \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^- \pi^+$, este é composto simplesmente por 4 píons e apenas ressonâncias do tipo $\pi\pi$ e $\pi\pi\pi$ podem ser produzidas. No nosso canal de estudo, $D^+ \rightarrow K_S \pi^- \pi^+ \pi^+$, além de ressonâncias $\pi\pi$ e $\pi\pi\pi$, também podem ser produzidas ressonâncias $K_S \pi$ e $K_S \pi\pi$.

Como vimos na secção 1.2.2, no estudo do decaimento $D^+ \rightarrow K_S \pi^- \pi^+ \pi^+$ iremos considerar apenas os canais ressonantes favorecidos por Cabibbo, cujos modos possíveis estão listados na expressão 2-19. Já o decaimento $D^0 \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^- \pi^+$, sendo suprimido por Cabibbo, considera também aqueles modos não considerados na nossa análise:

$$\begin{aligned} D^+ &\rightarrow V_1 V_2, V_1 \rightarrow P_1 P_2, V_2 \rightarrow P_3 P_4 \\ D^+ &\rightarrow S_1 S_2, S_1 \rightarrow P_1 P_2, S_2 \rightarrow P_3 P_4 \\ D^+ &\rightarrow VS, V \rightarrow P_1 P_2, S \rightarrow P_3 P_4 \end{aligned} \quad (2-49)$$

Como mencionamos, em ambos decaimentos espera-se a presença de subestruturas ressonantes do tipo $\pi\pi\pi - a_1(1260)$ – e do tipo $\pi\pi - \rho$ e σ . De fato, na tabela 2.7, onde são apresentados os resultados do estudo do decaimento $D^0 \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^- \pi^+$, encontramos o vetor-axial a_1^+ decaindo nos estados vetorial ρ^0 e escalar σ . Como se trata do mesmo estado a_1^+ , devemos esperar que o decaimento $D^+ \rightarrow K_S \pi^- \pi^+ \pi^+$ apresente semelhança com respeito a estes canais. Mais especificamente, aos canais

$$\begin{aligned} &- a_1^+ \pi^-, a_1 \rightarrow \rho^0 \pi^+ \\ &- a_1^+ \pi^-, a_1 \rightarrow \sigma \pi^+ \\ &- \sigma \pi^+ \pi^- \end{aligned}$$

corresponderiam, no nosso estudo, os canais:

$$\begin{aligned} &- a_1^+ K_S, a_1 \rightarrow \rho^0 \pi^+ \\ &- a_1^+ K_S, a_1 \rightarrow \sigma \pi^+ \\ &- \sigma \pi^+ K_S \end{aligned}$$

Mais adiante no Capítulo 7 discutiremos nossos resultados à luz desta comparação.

Modo	Magnitude	Fase(graus)	Fração (%)
$a_1^+ \pi^-, a_1 \rightarrow \rho^0 \pi^+$ (onda - S)	1.(fixo)	0(fixo)	$43.3 \pm 2.5 \pm 1.9$
$a_1^+ \pi^-, a_1 \rightarrow \rho^0 \pi^+$ (onda - D)	$0.241 \pm 0.033 \pm 0.024$	$82 \pm 5 \pm 4$	$2.5 \pm 0.5 \pm 0.4$
$a_1^+ \pi^-, a_1 \rightarrow \sigma \pi^+$	$0.439 \pm 0.026 \pm 0.021$	$193 \pm 4 \pm 4$	$8.3 \pm 0.7 \pm 0.6$
$a_1^+ \pi^-$ (all)	$60.0 \pm 3.0 \pm 2.4$
$\rho^0 \rho^0$ (paralelo)	$0.157 \pm 0.027 \pm 0.020$	$120 \pm 7 \pm 8$	$1.1 \pm 0.3 \pm 0.3$
$\rho^0 \rho^0$ (perpendicular)	$0.384 \pm 0.020 \pm 0.015$	$163 \pm 3 \pm 3$	$6.4 \pm 0.6 \pm 0.5$
$\rho^0 \rho^0$ (longitudinal)	$0.624 \pm 0.023 \pm 0.015$	$357 \pm 3 \pm 3$	$16.8 \pm 1.0 \pm 0.8$
$\rho^0 \rho^0$ (all)	$24.5 \pm 1.3 \pm 1.0$
$f_0(980) \pi^+ \pi^-$	$0.233 \pm 0.019 \pm 0.015$	$261 \pm 7 \pm 4$	$2.4 \pm 0.5 \pm 0.4$
$f_2(1270) \pi^+ \pi^-$	$0.338 \pm 0.021 \pm 0.016$	$317 \pm 4 \pm 4$	$4.9 \pm 0.6 \pm 0.5$
$\sigma \pi^+ \pi^-$	$0.432 \pm 0.027 \pm 0.022$	$254 \pm 4 \pm 5$	$8.2 \pm 0.9 \pm 0.7$
$R \pi^+ \pi^-$ (all)	$20.0 \pm 1.2 \pm 1.0$

Tabela 2.7: Resultados obtidos pela Colaboração FOCUS no estudo decaimento $D^0 \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^- \pi^+$.