1
Preliminares

1.1
Teoria das Curvas

1.1.1
Curvas em $\mathbb{R}^3$

Definição 1 *Uma* curva diferenciável parametrizada *é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de um intervalo aberto $I = (a, b)$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$ e seu* traço *é a imagem dessa aplicação.*

Definição 2 *Uma curva diferenciável parametrizada $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada* regular *se $\alpha'(t) \neq 0 \ \forall \ t \in I$.*

Definição 3 *O* comprimento de arco *de uma curva regular $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, a partir de um dado $t_0 \in I$, é:*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_0} |\alpha'(t)|\, dt,$$

onde

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

é o comprimento do vetor $\alpha'(t)$. Como $\alpha'(t) \neq 0$, o comprimento de arco s é uma função diferenciável de t e $\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|$

Definição 4 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável parametrizada. A curva α diz-se parametrizada por* comprimento de arco *se $|\alpha'(t)| = 1$*

Definição 5 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $s \in I$. O número $|\alpha''(s)| = k(s)$ chama-se* curvatura *de α em s.*

Assim $k(s) \neq 0$, fica bem definido pela equação $\alpha''(s) = k(s)\mathbf{n(s)}$, um vetor $\mathbf{n(s)}$ na direção de $\alpha''(s)$. Temos também que $\alpha''(s)$ é normal a $\alpha'(s)$, pois derivando $\langle \alpha'(s), \alpha' \rangle = 1$ obtemos $\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0$. Daí $\mathbf{n(s)}$ é normal a $\alpha'(s)$ e é chamado *vetor normal* em s. Os vetores $\alpha'(s)$ e $\mathbf{n(s)}$ determinam um plano chamado *plano osculador* em s.

Para definirmos completamente o *triedo de Frenet* assumiremos sempre que $k(s) \neq 0$. Com isso podemos indicar por $\mathbf{t(s)} = \alpha'(s)$ o vetor tangente unitário de α em s. Portanto, $\mathbf{t'(s)} = k(s)\mathbf{n(s)}$.

O vetor unitário $\mathbf{b(s)} = \mathbf{t(s)} \times \ \mathbf{n(s)}$ é normal ao plano osculador e é chamado *vetor binormal* em s. Para determinar $\mathbf{b'(s)}$ observamos que $\mathbf{b'(s)}$ é normal a $\mathbf{b(s)}$ e

$$\mathbf{b'(s)} = \mathbf{t'(s)} \times \ \mathbf{n(s)} + \mathbf{t(s)} \times \mathbf{n'(s)},$$

isto é, $\mathbf{b(s)}$ é normal a $\mathbf{t(s)}$. Concluímos, então, que $\mathbf{b'(s)}$ é colinear a $\mathbf{n(s)}$ e, assim, podemos escrever:

$$\mathbf{b'(s)} = \tau(s)\mathbf{n(s)}$$

onde $\tau(s)$ é alguma função.

Observamos que $\mathbf{n}$ é normal a $\mathbf{b}$ e a $\mathbf{t}$, ou seja, $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \ \mathbf{t}$, então a derivada $\mathbf{n'}$ é:

$$\mathbf{n'(s)} = \mathbf{b'(s)} \times \ \mathbf{t(s)} + \mathbf{b(s)} \times \mathbf{t'(s)} = -\tau \ \mathbf{b(s)} - k\mathbf{t(s)}$$

Assim podemos destacar as equações de Frenet:

$$\begin{cases} \mathbf{t'} = k\mathbf{n} \\ \mathbf{n'} = -k\mathbf{t} - \tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b'} = \tau \ \mathbf{n} \end{cases}$$

Definição 6 *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s tal que $a''(s) \neq 0$, $s \in I$. O número $\tau(s)$ definido por $\boldsymbol{b'(s)} = \tau(s)\boldsymbol{n(s)}$ é chamado* torção *de α em s.*

Teorema 1 (Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas) *Dadas as funções diferenciáveis $k(s) > 0$ e $\tau(s)$, $s \in I$, existe uma curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que s é o comprimento de arco, $k(s)$ é a curvatura e $\tau(s)$ é a torção de α. Além disso, qualquer outra curva $\tilde{\alpha}$, satisfazendo as mesmas condições, difere de α por um movimento rígido; isto é, existe uma transformação linear ortogonal ρ de $\mathbb{R}^3$, com determinante positivo, e um vetor c tal que $\tilde{\alpha} = \rho \circ \alpha + c$*

Observação 1 *As considerações anteriores demonstram a primeira parte do teorema, essa que usaremos nos próximos capítulos. O principal ingrediente da recíproca é o teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias.*

1.1.2
Curvas no espaço de Minkowski-$\mathbb{R}^3_1$

Definição 7 (Espaço de Minkowski) *O espaço* $\mathbb{R}^3_1$, *chamado espaço de* Minkowski *ou espaço de* Lorentz, *é definido como o espaço* $\mathbb{R}^3$ *usual, porém é dotado do produto interno:*

$$\langle X, Y\rangle_1 = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

onde $X = (x_1, x_2, x_3)$ *e* $Y = (y_1, y_2, y_3)$.

Definição 8 *Um vetor* X *é chamado:*

tipo-espaço, se	$\langle X, X\rangle_1 > 0,$
tipo-tempo, se	$\langle X, X\rangle_1 < 0,$
tipo-luz ou isotrópico ou vetor nulo, se	$\langle X, X\rangle_1 = 0$ *mas* $X \neq 0$

Definição 9 *Uma curva regular* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ *é chamada:*

tipo-espaço, se	$\langle \alpha', \alpha'\rangle_1 > 0,$
tipo-tempo, se	$\langle \alpha', \alpha'\rangle_1 < 0,$
tipo-luz ou isotrópica ou curva nula, se	$\langle \alpha', \alpha'\rangle_1 = 0$

Definição 10 *O* comprimento de arco *de uma curva regular tipo-tempo* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$, *a partir de um dado* $t_0 \in I$, *é:*

$$s(t) = -\int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|\, dt,$$

onde

$$|\alpha'(t)|_1 = \sqrt{-(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

é o comprimento do vetor $\alpha'(t)$. *Como* $\alpha'(t) \neq 0$, *o comprimento de arco* s *é uma função diferenciável de* t *e* $\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|_1$.

Definição 11 *Seja* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ *uma curva tipo-tempo. Diremos que a curva* α *é parametrizada pelo comprimento de arco em* $\mathbb{R}^3_1$ *se* $|\alpha'(t)|_1 = -1$.

Definição 12 *Seja* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ *uma curva tipo-espaço. Diremos que a curva* α *é parametrizada pelo comprimento de arco em* $\mathbb{R}^3_1$ *se* $|\alpha'(t)|_1 = 1$.

Definição 13 *Seja* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ *uma curva tipo-tempo ou tipo-espaço, parametrizada pelo comprimento de arco* $s \in I$. *Chamaremos o número* $|\alpha''(s)|_1 = k(s)$ *de* curvatura *de* α *em* s.

Teorema 2 *Se* $k \equiv 0$ *então* α *é uma linha reta.*

Nos pontos onde $k \neq 0$, fica bem definido pela equação $\alpha''(s) = k(s)\mathbf{n(s)}$ um vetor unitário $\mathbf{n(s)}$; indicaremos por $\mathbf{t(s)} = \alpha'$ o vetor tangente unitário de α em s.

Definição 14 *Seja* e_1, e_2 *e* e_3*, três vetores. Para* e_1 *e* e_2 *temos* $\langle e_i, e_i, \rangle_1 = \pm 1$ *e* $\langle e_1, e_2, \rangle_1 = 0$*, o terceiro vetor é definido por* $e_3 := e_1 \times e_2$*, portanto* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *é uma base ortonormal de* $\mathbb{R}^3_1$*. Definimos* ϵ, $\eta \in \{1, -1\}$ *por* $\langle e_1, e_1, \rangle_1 = \epsilon$, $\langle e_1, e_2, \rangle_1 = \eta$ *e* $\langle e_3, e_3, \rangle_1 = -\epsilon\eta$*. Chamamos* e_1, e_2 *e* e_3 *de* $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ *respectivamente.*

Lema 1 *Seja* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3_1$*, então*

$$\mathbf{v} = \epsilon\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{t}\rangle_1 \boldsymbol{t} + \eta\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{n}\rangle_1 \boldsymbol{n} - \epsilon\eta\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{b}\rangle_1 \boldsymbol{b},$$

isto é, cada vetor em $\mathbb{R}^3_1$ *pode ser decomposto de uma única maneira em três componentes.*

Prova: Temos que $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ é uma base, assim podemos escrever $\mathbf{v} = v_1\mathbf{t} + v_2\mathbf{n} + v_3\mathbf{b}$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{t}\rangle_1 = v_1\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}\rangle_1 + v_2\langle \mathbf{n}, \mathbf{t}\rangle_1 + v_3\langle \mathbf{b}, \mathbf{t}\rangle_1$$

Temos que $\langle \mathbf{n}, \mathbf{t}\rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{t}\rangle = 0$, assim:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}, \mathbf{t}\rangle_1 &= \epsilon v_1 \\
\langle \mathbf{v}, \mathbf{n}\rangle_1 &= v_1\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}\rangle_1 + v_2\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle_1 + v_3\langle \mathbf{b}, \mathbf{n}\rangle_1 \\
\langle \mathbf{v}, \mathbf{n}\rangle_1 &= \eta v_2 \\
\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}\rangle_1 &= v_1\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}\rangle_1 + v_2\langle \mathbf{n}, \mathbf{b}\rangle_1 + v_3\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle_1 \\
\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}\rangle_1 &= -\epsilon\eta v_3
\end{aligned}$$

concluímos que:

$$\mathbf{v} = \epsilon\langle \mathbf{v}, \mathbf{t}\rangle_1 \mathbf{t} + \eta\langle \mathbf{v}, \mathbf{n}\rangle_1 \mathbf{n} - \epsilon\eta\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}\rangle_1 \mathbf{b}$$

■

Definição 15 *Seja* α *uma curva tipo-tempo ou tipo-espaço, parametrizada pelo comprimento de arco que satisfaz* $\langle \alpha'', \alpha''\rangle_1 \neq 0$*. Assim as equações de*

Frenet são definidas como:

$$\begin{cases} \boldsymbol{t}' = \eta k \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{n}' = -\epsilon k \boldsymbol{t} + \epsilon \eta \tau \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}' = \eta \tau \boldsymbol{n} \end{cases}$$

Teorema 3 (Teorema Fundamental das Curvas em $\mathbb{R}^3_1$) *Dadas as funções diferenciáveis $k(s) > 0$ e $\tau(s)$, $s \in I$, existe uma curva parametrizada regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3_1$ tal que s é o comprimento de arco, $k(s)$ é a curvatura e $\tau(s)$ é a torção de α.*

1.2 Teorias das Superfícies

Definição 16 *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma* superfície regular *se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $X : U \to V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:*

1. *X é de classe C^∞;*
2. *X é um homeomorfismo (ou seja, sua inversa $X^{-1} : V \cap S \to U$ é contínua);*
3. *Para qualquer $q \in U$, a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva.*

Definição 17 *Definimos o* espaço tangente *a uma superfície S num ponto p, que denotamos por T_pS, como sendo o conjunto dos vetores tangentes, no ponto p, das curvas cujo traço esteja em S:*

$$T_pS = \{\alpha'(0) | \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \text{ é } C^\infty \text{ e } \alpha(0) = p\}$$

Definição 18 *A* primeira forma fundamental *de* S *em $p \in S$ é a forma quadrática $I_p : T_pS \to \mathbb{R}^+$ definida por $I_p(v) = \langle v, v\rangle_p$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ é a restrição a T_pS do produto usual em $\mathbb{R}^3$. Se $X(u, v)$ for uma parametrização de* S *e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva diferenciável, temos*

$$\begin{aligned} I_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) &= \langle u'(t)X_u + v'(t)X_v, u'(t)X_u + v'(t)X_v\rangle_{\alpha(t)} \\ &= I_{\alpha(t)}(X_u)(u'(t))^2 + 2\langle X_u, X_v\rangle_{\alpha(t)} u'(t)v'(t) + I_{\alpha(t)}(X_v)(v'(t))^2 \\ &= E(u'(t))^2 + 2F u'(t)v'(t) + G(v'(t))^2, \end{aligned}$$

onde E, F *e* G *são os* coeficientes da primeira forma fundamental *para a parametrização* $X(u,v)$, *definidos por:*

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle \end{aligned}$$

Definição 19 *Seja* $S \subset \mathbb{R}^3$ *uma superfície, diremos que* S *é orientável se existir uma aplicação diferenciável* $N : S \to \mathbb{S}^2$ *tal que* $N(p)S$ *seja normal unitário a* S *em* p, N *é chamado* aplicação de Gauss *de* S.

A diferencial dN_p de N em $p \in S$ é uma aplicação linear de T_pS em $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$. Temos que T_pS e $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ são o mesmo espaço vetorial pois ambos são o complementar ortogonal da reta gerada por N, assim dN_p pode ser olhada como uma aplicação linear em T_pS.

Proposição 1 *A diferencial* $dN_p : T_pS \to T_pS$ *da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.*

Definição 20 *O máximo da curvatura normal* k_1 *e o mínimo da curvatura normal* k_2, *são chamados curvaturas principais em* p.

Definição 21 *Seja* $p \in S$ *e seja* $dN_p : T_pS \to T_pS$ *a diferencial da aplicação de Gauss. O negativo da metade do traço de* dN_p *é chamado a* curvatura média H *de* S *em* p. *Em termos das curvaturas principais* k_1 *e* k_2 *temos*

$$H := \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Definição 22 *Seja* c *uma curva regular em* S *que passa por* $p \in S$, k *a curvatura de* c *em* p, *e* $\cos\theta = \langle n, N \rangle$, *onde* n *é o vetor normal a* c *e* N *é o vetor normal a* S *em* p. *O número* $k_n = k\cos\theta$ *é chamado a curvatura normal de* c *em* p.

A diferencial $dN_p : T_pS \to T_pS$ por ser uma aplicação auto-adjunta nos permite associar dN_p a uma forma quadrática, assim temos a seguinte definição:

Definição 23 *A forma quadrática* II_p, *definida em* T_pS *por* $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$, *é chamada a segunda forma fundamental de* S *em* p.

Dada uma parametrização $X(u,v)$ em um ponto $p \in S$ de uma superfície S, seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S, com $\alpha(0) = p$, vamos considerar que todas funções abaixo têm seus valores no ponto p.

Observamos que $\alpha' = X_u u' + X_v v'$ e

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

Como N_u e N_v pertencem a T_pS, escrevemos

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v, \tag{1-1}$$

$$N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v, \tag{1-2}$$

e assim,

$$dN(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v;$$

logo,

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

Portanto na base $\{X_u, X_v\}$, dN é dada pela matriz (a_{ij}), $i, j = 1, 2$. Notamos que essa matriz não é necessariamente simétrica, a não ser que $\{X_u, X_v\}$ seja uma base ortonormal.

Por outro lado, a expressão da segunda forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ é dado por

$$\begin{aligned} II_p &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2, \end{aligned}$$

onde e, f e g são os *coeficientes da segunda forma fundamental* nas coordenadas (u,v); agora já que $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$,

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle \\ g &= -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Vamos agora determinar a matriz $(a_{ij}), i, j = 1, 2$ em termos de e, f, g. As entradas da matriz são determinadas pelas igualdades (1-1) e (1-2). Formando o produto interno de cada uma dessas igualdades com X_u e X_v obtemos:

$$\begin{aligned} f &= -a_{11}F - a_{21}G, \\ f &= -a_{12}E - a_{22}F, \\ e &= -a_{11}E - a_{21}F, \\ g &= -a_{12}F - a_{22}G, \end{aligned}$$

que sob a forma de matricial escrevemos

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

donde,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \tag{1-3}$$

Calculando o traço de (1-3) temos:

$$H = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG-F^2}\,\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\frac{eG-2fF+gE}{EG-F^2},$$

isto é,

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG-2fF+gE}{EG-F^2}$$

Definição 24 *Uma superfície parametrizada regular é chamada* mínima *se a sua curvatura média é identicamente nula.*

Observação 2 *Seja S uma superfície mínima, temos que $H \equiv 0$, mas $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$, assim $k_1 = -k_2$*

Vamos entender o emprego da palavra *mínima* para tais superfícies, assim vamos introduzir a noção de variação. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular, escolhemos um domínio limitado $D \subset U$ e uma função diferenciável $h : \bar{D} \to \mathbb{R}$, onde $\bar{D}$ é a união do domínio D e sua fronteira ∂D. A *variação normal* de $X(\bar{D})$, determinada por h, é a aplicação dada por:

$$\varphi : \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(u,v,t) = X(u,v) + th(u,v)N(u,v), (u,v) \in D, t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ fixado, a aplicação $X^t : D \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u,v) = \varphi(u,v,t)$$

é uma superfície parametrizada com

$$\frac{\partial x^t}{\partial u} = X_u + thN_u + th_uN,$$

$$\frac{\partial x^t}{\partial v} = X_v + thN_v + th_vN.$$

Assim, denotamos por E^t, F^t, G^t os coeficientes da primeira forma fundamental de X^t, obtemos:

$$E^t = E + th(\langle X_u, N_u\rangle + \langle X_u, N_u\rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_u\rangle + t^2h_uhu$$

$$F^t = F + th(\langle X_u, N_v\rangle + \langle X_v, N_u\rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_v\rangle + t^2h_uhv$$

$$G^t = G + th(\langle X_v, N_v\rangle + \langle X_v, N_v\rangle) + t^2h^2\langle N_v, N_v\rangle + t^2h_vhv$$

Utilizando o fato de que

$$\langle X_u, N_u\rangle = -e,\ \langle X_u, N_v\rangle + \langle X_v, N_u\rangle = -2f,\ \langle X_v, N_v\rangle = -g,$$

e que a curvatura média H é dada por

$$H = \frac{1}{2}\frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}$$

obtemos

$$\begin{aligned} E^tG^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R \end{aligned}$$

onde $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{R}{t} = 0$

Temos então que ε é suficientemente pequeno, X^t é uma superfície parametrizada regular. Além disso a área $A(t)$ de $X^t(\bar{D})$ é

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_D \sqrt{E^tG^t - (F^t)^2}dudv \\ &= \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}}\sqrt{EG - F^2}dudv, \end{aligned}$$

onde $\bar{R} = R/(EG - F^2)$. Assim, se ε é pequeno, A é uma função diferenciável e a sua derivada em $t = 0$ é

$$A'(0) = -\int_{\bar{D}} 2hH\sqrt{EG - F^2}dudv$$

Agora podemos justificar o emprego da palavra mínima para superfícies com curvatura média nula.

Proposição 2 *Seja* $X : U \to \mathbb{R}^3$ *uma superfície parametrizada regular e seja* $D \subset U$ *um domínio limitado em* U*. Então* X *é mínima se e somente se* $A'(0) = 0$ *para todo* $\bar{D}$ *e toda variação normal de* $X(\bar{D})$*.*

Assim, qualquer região limitada $X(\bar{D})$ de uma superfície mínima é um ponto crítico para a função área de qualquer variação normal de $X(\bar{D})$. Devemos notar que esse ponto crítico pode não ser um mínimo e que isso faz o uso da palavra mínima um pouco estranha, porém esta terminologia é consagrada pelo uso.

Definição 25 *Vamos definir em* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\begin{aligned}
\bar{e} &= \langle X_u \times X_v, X_{uu} \rangle = (X_u, X_v, X_{uu}) \\
\bar{f} &= \langle X_u \times X_v, X_{uv} \rangle = (X_u, X_v, X_{uv}) \\
\bar{g} &= \langle X_u \times X_v, X_{vv} \rangle = (X_u, X_v, X_{vv}) \\
\bar{H} &= \bar{e}G - 2\bar{f}F + \bar{g}E
\end{aligned}$$

Onde o vetor normal de uma superfície parametrizada $X(u, v)$ *é* $X_u \times X_v$

Lema 2 H *anula-se se e somente se* $\bar{H}$ *anula-se.*

Prova: Temos que $H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$, como $e = \frac{(X_u, X_v, X_{uu})}{|X_u \times X_v|}$ e $\bar{e} = (X_u, X_v, X_{uu})$, logo $\bar{e} = |X_u \times X_v|e$ e analogamente $\bar{f} = |X_u \times X_v|f$ e $\bar{g} = |X_u \times X_v|g$. Assim $H = \frac{1}{2}\frac{\bar{e}G - 2\bar{f}F + \bar{g}E}{EG - F^2}$, mas $\bar{H} = \bar{e}G - 2\bar{f}F + \bar{g}E$, portanto $H = \frac{\bar{H}}{2(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}}$. ■

Corolário 1 *A superfície é mínima se e somente se* $\bar{H} \equiv 0$*.*

Observação 3 *Agora sempre usaremos a notação* $\bar{e}$*,* $\bar{f}$*,* $\bar{g}$ *e* $\bar{H}$*.*

1.2.1
Superfícies em uma Variedade Riemaniana

Definição 26 *Uma* variedade diferenciável *de dimensão n é o conjunto M junto com uma família $(M_i)_{i\in I}$ de subconjuntos tais que:*

1. $M = \bigcup_{i\in I} M_i$
2. *Para todo $i \in I$ existe uma aplicação injetiva $\varphi_i : M_i \to \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi_i(M_i)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$*
3. *Para $M_i \cap M_j \neq \phi$, $\varphi(M_i \cap M_j)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, e a composição*

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(M_i \cap M_j) \to \varphi_j(M_i \cap M_j)$$

é diferenciável para i, j arbitrários.

Observação 4 *A partir de agora quando nos referirmos a M, variedade de dimensão n, escreveremos apenas M^n.*

Definição 27 *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é chamada uma* curva diferenciável *em M. Suponhamos que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $\mathcal{F}$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. A função $\alpha'(0) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d(f\circ\alpha)}{dt}\right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{F}.$$

é o vetor tangente *à curva α em $t = 0$. Um* vetor tangente em p *é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. Indicamos o conjuntos de vetores tangentes a M em p por T_pM.*

Definição 28 *Sejam M^n e N^n variedades diferenciáveis. Chamamos de* imersão *a aplicação diferenciável $\varphi : M \to N$ se $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Além disso se φ é homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N, diz-se que φ é um* mergulho. *Se $M \subset N$ é um mergulho, diz-se que M é uma* subvariedade *de N.*

Definição 29 *O conjunto*

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

é chamado a esfera em $\mathbb{R}^3$.

Definição 30 *O conjunto*

$$\mathbb{H}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_1 | -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1, x_1 > 0\},$$

munido da restrição do produto interno $\langle\ ,\ \rangle_1$ *é chamado modelo do hiperbolóide do plano hiperbólico.*

Teorema 4 *A restrição de* $\langle\ ,\ \rangle_1$ *a* $\mathbb{H}^2$ *é positiva, isto é,* $(\mathbb{H}^2, \langle\ ,\ \rangle_1)$ *é uma superfície riemanniana.*

Exemplos de variedades de dimensão 3

- $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ com métrica induzida de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.
- $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com métrica induzida de $\mathbb{R}^4_1 = \mathbb{R}^3_1 \times \mathbb{R}$.

Definição 31 *Seja* $X : U \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ *uma parametrização local de uma superfície* S *de* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$*, e* $\boldsymbol{N}$ *um vetor normal não nulo à superfície. Vamos definir:*

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \langle \boldsymbol{N}, X_{uu} \rangle \\ \bar{f} &= \langle \boldsymbol{N}, X_{uv} \rangle \\ \bar{g} &= \langle \boldsymbol{N}, X_{vv} \rangle \\ \bar{H} &= \bar{e}G - 2\bar{f}F + \bar{g}E \end{aligned}$$

Definição 32 *Seja* $X : U \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ *uma parametrização local de uma superfície* S *de* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$*, e* $\boldsymbol{N}$ *um vetor normal não nulo à superfície. Vamos definir:*

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \langle \boldsymbol{N}, X_{uu} \rangle_1 \\ \bar{f} &= \langle \boldsymbol{N}, X_{uv} \rangle_1 \\ \bar{g} &= \langle \boldsymbol{N}, X_{vv} \rangle_1 \\ \bar{H} &= \bar{e}G - 2\bar{f}F + \bar{g}E \end{aligned}$$

Proposição 3 S *é mínima se e somente se* $\bar{H} = 0$.