

4 Reconhecimento de Padrões

Este capítulo apresenta de forma ilustrada os conceitos básicos do Reconhecimento de Padrões e visa mostrar o potencial desta ferramenta em diversas aplicações. Trata-se de um texto introdutório e expositivo, recheado de exemplos, voltado para não-especialistas em área da Ciência da Computação.

O Reconhecimento de Padrões é o campo da ciência que tem por objetivo a classificação de objetos em um determinado número de categorias ou classes a partir da observação de suas características (Theodoridis & Koutroumbas, 2003). O Reconhecimento de Padrões visa construir uma representação mais simples de um conjunto de dados através de suas características mais relevantes, possibilitando sua partição em classes (Duda et al., 2001).

As técnicas de Reconhecimento de Padrões podem ser usadas para classificar os objetos (pixels, fases, regiões, etc.) presentes em uma imagem. Esta é a abordagem empregada no presente trabalho. Contudo, suas aplicações podem ser tão variadas quanto os objetos e dados em questão. A análise digital de imagens constitui-se, neste caso, em uma ferramenta utilizada para a extração de atributos (características) dos objetos, ou seja, para a obtenção de medidas.

Dado um conjunto de objetos com características mensuráveis, a classificação consiste em tentar discriminá-los em classes. Tais características formam um espaço multidimensional (espaço de características), onde cada objeto é representado por um vetor de características (padrão), um ponto neste espaço. Assim, a tarefa da classificação pode ser geometricamente entendida como o reconhecimento de agrupamentos no espaço de características. A Figura 18 mostra um espaço formado por três características (C_1 , C_2 e C_3), tridimensional portanto, onde é claramente possível identificar dois grupos distintos de objetos.

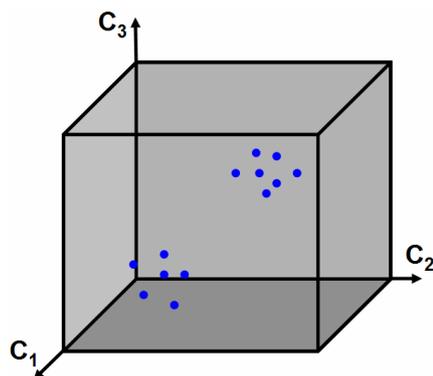


Figura 18 - Espaço de características.

As técnicas de classificação dividem-se em dois grandes grupos, classificação supervisionada e classificação não-supervisionada. Na classificação supervisionada, as classes são definidas a partir de uma base de conhecimento formada por exemplos dos padrões conhecidos. São fornecidos os exemplos e suas respectivas classificações com as quais o sistema é treinado.

Já, na classificação não-supervisionada, não há nenhuma informação prévia sobre as classes às quais os padrões na amostra pertencem. Dado um conjunto de padrões, métodos não supervisionados os agrupam em função de sua disposição no espaço de características. A comparação entre a Figura 19 e a Figura 20 ilustra esta diferença.

Na Figura 19, pode-se observar um conjunto de objetos representados em um espaço de características bidimensional. Como a legenda indica, estes objetos são conhecidos e foram previamente rotulados (classe 1, classe 2, classe 3). Assim, a partir desta base de conhecimento, pode ser atribuída uma classe a um objeto desconhecido através de um procedimento de classificação supervisionada. No exemplo contido nesta figura, o objeto desconhecido é classificado como pertencente à classe 2. O critério utilizado é a proximidade, no espaço de características, aos objetos desta classe.

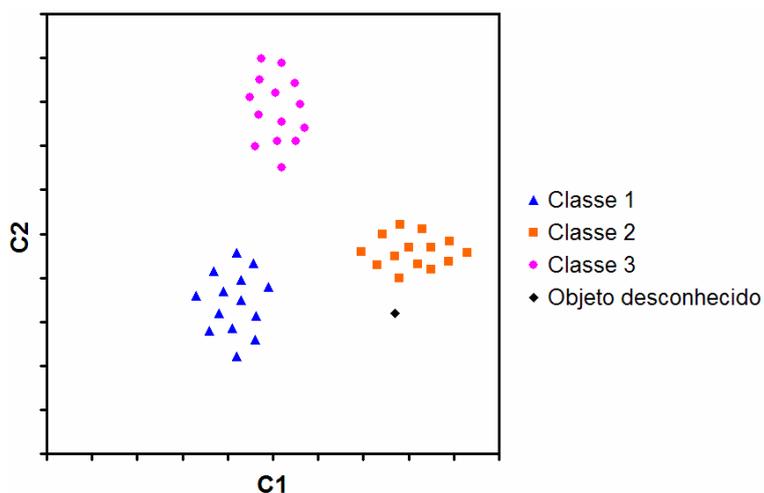


Figura 19 - Classificação supervisionada.

A Figura 20 mostra a classificação não-supervisionada. Nela, um outro conjunto de objetos está representado no espaço de características bidimensional, contudo, agora os padrões dos objetos não são conhecidos. Um procedimento de classificação não-supervisionada procura por objetos similares e os agrupa em classes. No exemplo em questão, os objetos foram divididos entre duas classes distintas (classe A e classe B).

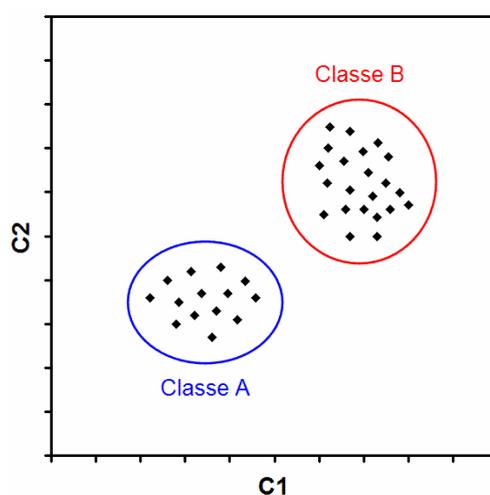


Figura 20 - Classificação não-supervisionada.

Cabe aqui ressaltar que a classificação não-supervisionada foge ao escopo deste trabalho.

4.1. Classificação supervisionada

A classificação supervisionada atribui uma classe a um objeto desconhecido através de uma medida de similaridade deste objeto com objetos conhecidos previamente rotulados (conjunto de treinamento). A partir da medição de

determinadas características dos objetos do conjunto de treinamento, estimam-se os parâmetros que caracterizam cada classe no espaço de características.

No domínio do espaço de características opera uma função discriminante, também chamada classificador, que, baseada na informação denotada pelo conjunto de treinamento, determina a semelhança de um novo padrão a uma das classes. Geometricamente, o trabalho do classificador pode ser entendido como a tarefa de particionar o espaço de características em sub-espacos, cada qual domínio de uma classe. Assim, a um objeto desconhecido, é atribuída uma classe a partir do seu posicionamento no espaço de características.

Pode-se recorrer a um exemplo (adaptado de Russ, 1990) a fim de facilitar a compreensão. Imagine um sistema para classificação de quatro espécies de fruta (ameixas, maçãs, limões, melões). As classes seriam estas (ameixas, maçãs, limões, melões), mas quais seriam as características? Pensando em um sistema baseado em análise de imagens, as características poderiam ser o tamanho (diâmetro médio) e a “vermelhidão”, uma medida de quão vermelha é a fruta.

A escolha das características adequadas à classificação deve feita a partir da observação dos objetos conhecidos e de suas respectivas classes, ou seja, do conjunto de treinamento. Conhecendo-se o domínio do problema, as frutas em questão, fica evidente que o tamanho pode ser usado para discriminar maçãs e melões entre si e das demais classes. No entanto, ameixas e limões têm tamanhos semelhantes e assim viriam a ser confundidos. Deste modo, utiliza-se também uma segunda característica, “vermelhidão”, capaz de distinguir ameixas de limões. Na prática, raramente uma única característica é suficiente em um sistema de classificação.

O conjunto de treinamento é composto por ameixas, maçãs, limões e melões previamente rotulados. O sistema mede as características (diâmetro médio e “vermelhidão”) de cada um destes objetos do conjunto de treinamento e os representa no espaço de características, como mostrado na Figura 21. A partir daí, pode-se reconhecer uma fruta desconhecida (não rotulada). O sistema mede suas características e então o classificador estima medidas de similaridade entre esta fruta desconhecida e as classes de frutas do conjunto de treinamento. Desta forma, é determinado a qual classe ela pertence, ou seja, que fruta ela é.

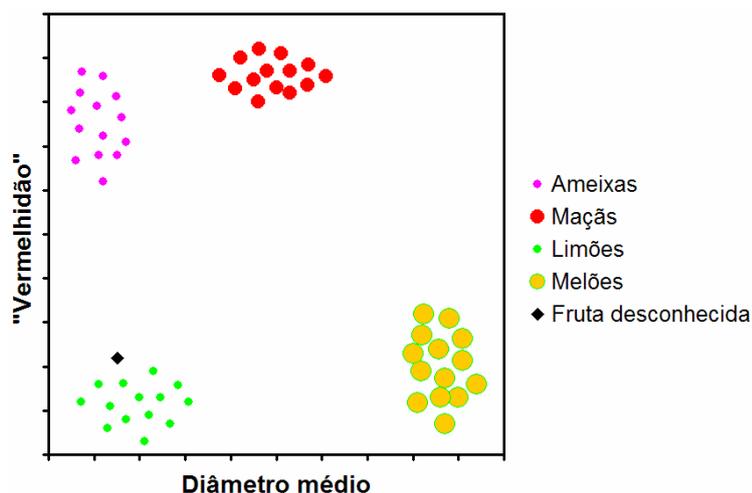


Figura 21 - Exemplo de classificação supervisionada (classificação de frutas).

Na Figura 21, pode-se observar que uma certa fruta desconhecida apresenta características similares às dos limões do conjunto de treinamento, ficando, portanto, próxima a eles no espaço de características. Assim, o classificador provavelmente classificaria esta fruta desconhecida como um limão.

Em Ciência dos Materiais, um exemplo da utilização da classificação supervisionada aliada à análise digital de imagens é a classificação de partículas de grafita em ferro fundido (Gomes, 2001; Gomes & Paciornik, 2005). A norma ISO-945 apresenta seis classes para caracterizar as diferentes formas de partículas de grafita e fornece seis imagens sintéticas de referência para representá-las (Figura 22).

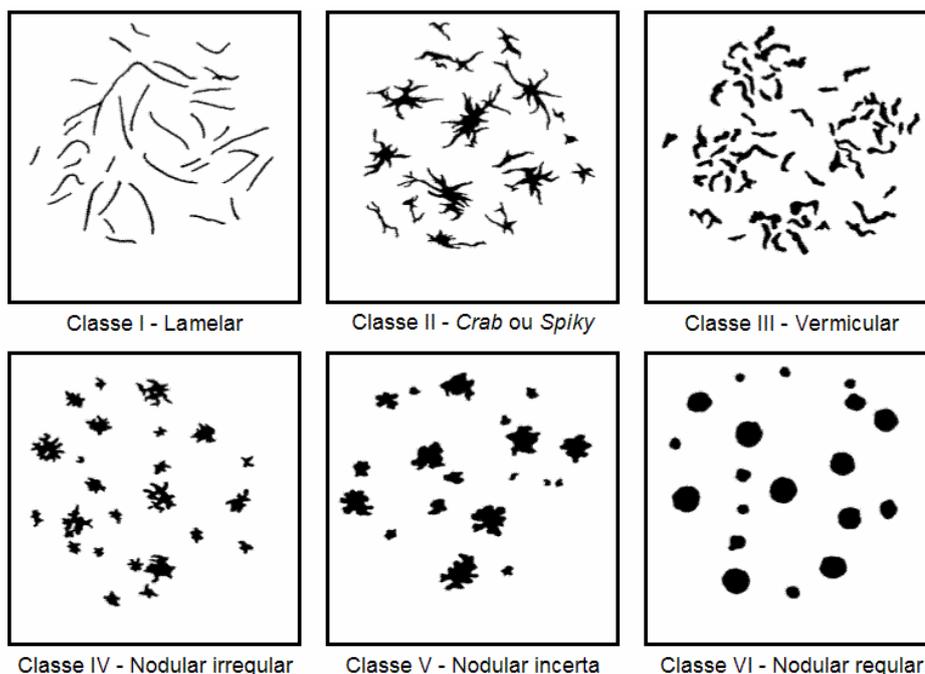


Figura 22 - Imagens de referência da norma ISO-945.

Os objetos desenhados nestas imagens da Figura 22 são usados para formar o conjunto de treinamento. Como características, são empregados diversos parâmetros descritores de forma e tamanho, constituindo, portanto, um espaço de características multidimensional.

O classificador treina o sistema com as imagens do conjunto de treinamento. A partir daí, o sistema está pronto para classificar partículas de grafita em imagens de ferro fundido obtidas em microscópio óptico com 100x de magnificação, de acordo com a norma ISO-945. A Figura 23 apresenta uma imagem de ferro fundido ao lado de uma representação pictórica do resultado da classificação de suas partículas de grafita. As cores referem-se às seis classes definidas na norma ISO-945.

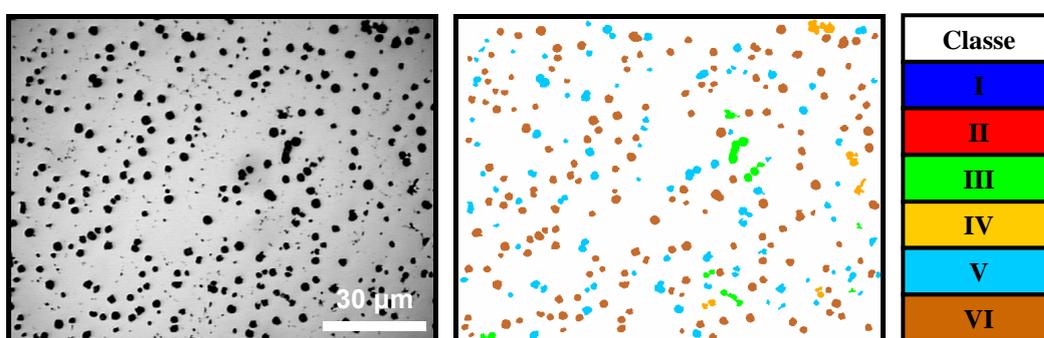


Figura 23 - Classificação de partículas de grafita em ferro fundido.

Deste modo, fornecendo-se um conjunto de treinamento e um conjunto de características a um classificador, o reconhecimento de um objeto desconhecido pode ser feito automaticamente em um típico procedimento de classificação supervisionada (Duda et al., 2001; Gonzalez & Woods, 2002).

Contudo, é usual avaliar o desempenho do sistema de classificação antes de classificar objetos desconhecidos. Esta avaliação é feita através de uma etapa de validação, também conhecida como etapa de teste. Assim, na verdade, um procedimento de classificação supervisionada deve ser composto por três etapas consecutivas: treinamento, validação e classificação.

A validação estima o desempenho do sistema de classificação e verifica sua capacidade de generalização. Toussaint (1974) descreve e avalia diversos métodos de validação.

Um dos métodos mais simples é a auto-validação (*resubstitution estimate*). A auto-validação é realizada através da classificação dos objetos do conjunto de treinamento e conseguinte medição da taxa de acerto desta classificação. No entanto, a auto-validação fornece apenas uma estimativa superestimada do desempenho do sistema e não avalia sua capacidade de generalização.

Um método mais apropriado é a validação cruzada (*holdout estimate*). Neste método de validação, os objetos conhecidos disponíveis são particionados em dois conjuntos complementares: o conjunto de treinamento e o conjunto de validação. Após o treinamento, os objetos do conjunto de validação são classificados e a taxa de acerto é determinada. É importante notar que, em geral, a taxa de acerto da validação cruzada será inferior à obtida em um procedimento de auto-validação.

Todavia, se o número total de objetos conhecidos for pequeno, o resultado da validação cruzada será fortemente dependente da escolha específica dos objetos de cada conjunto (treinamento e validação). Assim, quando existem poucos objetos conhecidos disponíveis, são feitas diferentes partições, com tamanhos fixos, destes objetos; a validação é realizada várias vezes e a taxa de acerto média é utilizada como resultado (Toussaint, 1974; Duda et al., 2001).

Caso a etapa de validação indique, com altas taxas de acerto, que o treinamento foi bem sucedido, a classificação é então possível. Um novo conjunto de treinamento é formado, com todos os objetos conhecidos à disposição, e o treinamento é feito outra vez. A partir daí, objetos desconhecidos podem ser classificados.

4.2. Classificação supervisionada de pixels

A definição de objeto em uma imagem pode ser um tanto difícil. Uma definição bem genérica é a de que um objeto é qualquer porção da imagem que tenha pelo menos uma característica mensurável que a diferencie do restante da imagem. Neste contexto, regiões podem ser categorizadas como objetos por terem determinado tamanho ou até mesmo por apresentarem certa forma, como no caso, citado anteriormente, das partículas de grafita em ferro fundido.

Os pixels de uma imagem também podem ser considerados objetos. Apesar de possuírem indistintamente a mesma forma e tamanho em uma imagem, os pixels podem apresentar diferentes cores ou intensidades. Deste modo, os pixels podem ser classificados como quaisquer outros tipos de objetos. A classificação de pixels em imagens constitui-se em um procedimento de segmentação.

A segmentação por classificação supervisionada de pixels é uma técnica de segmentação espectral que pode ser utilizada em imagens multi-componente. De fato, ela é bastante usada, por exemplo, em Sensoriamento Remoto para a análise de imagens multi-espectrais.

Contudo, para a análise de imagens de materiais obtidas por técnicas de microscopia, a segmentação por classificação supervisionada de pixels não é muito comum. Na literatura, são encontrados alguns exemplos, em microscopia eletrônica de varredura, referentes principalmente a imagens de mapeamento de raios X (EDS e WDS), além de outros sinais, como BSE e catodoluminescência (Tovey & Krinsley, 1991; Bonnet, 1995; Bonnet et al., 1997; MacRae et al., 2001; Kotula et al., 2003; MacRae & Wilson, 2005). No entanto, em microscopia óptica de materiais, os exemplos são poucos (Pirard & Bertholet, 2000; Komenda, 2001; Pirard, 2004).

As implementações podem ser as mais diversas. Mas, basicamente, o que se tem é a seleção manual, geralmente através do cursor do *mouse* em uma interface gráfica, de regiões de cada fase ou classe de interesse em uma ou mais imagens. A partir destas regiões selecionadas, são construídas imagens para representar as classes. Nestas imagens das classes, cada pixel constitui-se de fato em um objeto previamente classificado, de modo que estas imagens formam o conjunto de treinamento. Em seguida, escolhe-se um espaço de características e um classificador adequados. Daí, medidas as características dos padrões de cada classe, o sistema poderá classificar pixels de imagens desconhecidas, ou seja, segmentá-las.

No caso das imagens coloridas, como as adquiridas ao microscópio óptico, as características dos pixels podem ser justamente as três componentes das imagens: R, G e B. A Figura 24 mostra uma imagem de minério de cobre, obtida ao microscópio óptico, ao lado de sua representação no espaço de características bidimensional formado por R e G. Neste espaço, um classificador poderia segmentar a imagem, particionando-o em sub-espacos, cada um domínio de uma fase, como indicado pelas fronteiras de decisão (linhas azuis).

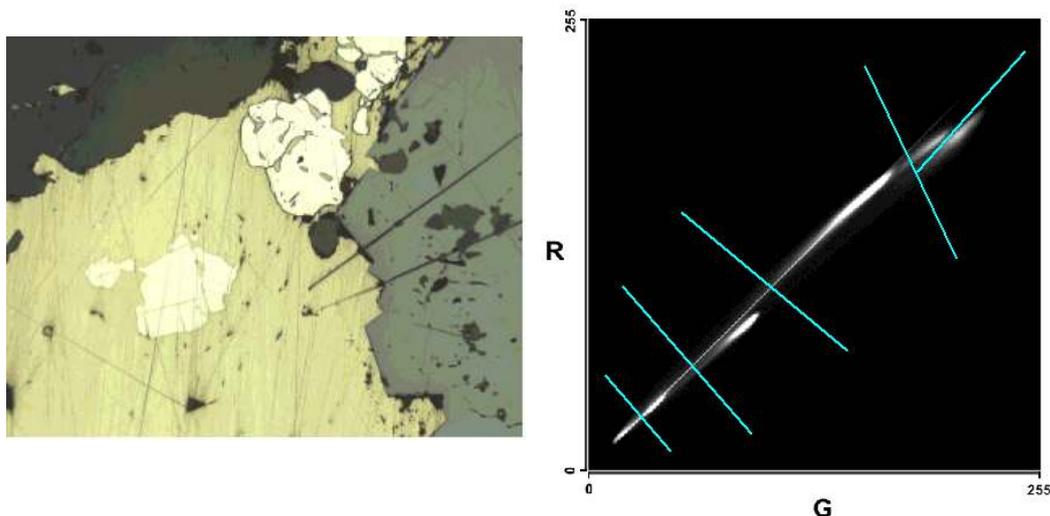


Figura 24 - Imagem RGB e sua representação no espaço de características RG.

Cabe aqui uma nota. A segmentação por limiarização, muito comumente usada e largamente disponível nos programas analisadores de imagem, constitui-se na verdade em um caso específico da segmentação por classificação de pixels. Neste contexto, a segmentação por limiarização é conhecida como classificador de função paralelepípedo, pois o que ela realmente faz é particionar o espaço de características formando paralelepípedos.

Na Figura 25, pode-se ver o espaço de características da imagem apresentada acima, agora com os respectivos histogramas unidimensionais das componentes R e G mostrados junto aos eixos. Assim, a limiarização é realizada através da delimitação do espaço por limiares em cada dimensão, representados neste exemplo pelas linhas tracejadas horizontais e verticais.

Uma limiarização unidimensional é feita apenas com as linhas tracejadas horizontais (componente R) ou verticais (componente G). Já uma limiarização em duas dimensões (R e G) é realizada utilizando a intersecção dos setores delimitados por estes pares de linhas, ou seja, o retângulo azul. Note que o retângulo é o correspondente bidimensional do paralelepípedo, daí a denominação deste método.

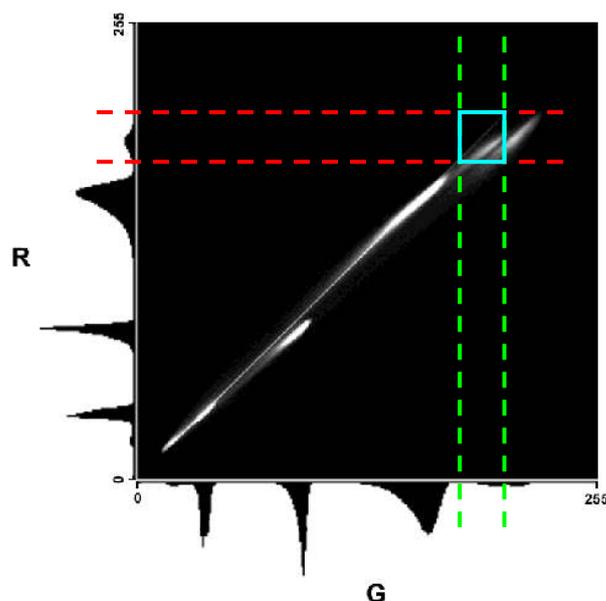


Figura 25 - Segmentação por classificação de função paralelepípedo.

Ao se observar a Figura 24 e a Figura 25, fica evidente a superioridade da classificação de pixels frente à limiarização para a segmentação de imagens multi-componente. Isto ocorre pois a partição do espaço de características através das fronteiras de decisão mostradas na Figura 24 consegue representar melhor as classes. A região delimitada pelo retângulo azul (Figura 25) claramente contém padrões de duas classes distintas.

Todavia, há ainda um outro aspecto a ser considerado, pois na segmentação de imagens coloridas há duas questões fundamentais: qual método de segmentação e qual sistema de cores devem ser utilizados (Cheng et al., 2001). O sistema de cores é o artifício matemático usado para codificar cor através de componentes. No caso do RGB, cada cor é representada por um vetor de três elementos que armazena suas intensidades nas três cores primárias (vermelho, verde e azul).

Ao se utilizar a classificação supervisionada de pixels como método de segmentação, o sistema de cores pode ser usado para definir o espaço de características. Deste modo, cada componente denota uma característica. Entretanto, estas características oriundas do sistema de cores original nem sempre são as mais apropriadas para o sistema de classificação. Assim sendo, pode-se converter a imagem, para que seja representada em outro sistema de cores, dando origem a novas características (Vandenbroucke et al., 2003).

O sistema de cores RGB é o mais utilizado por câmeras digitais e monitores de vídeo, porém ele geralmente não é adequado à segmentação. Existe uma alta correlação entre as componentes do RGB, pois elas são fortemente dependentes da

intensidade (Littmann & Ritter, 1997). Além disso, o sistema RGB não representa as diferenças entre as cores em uma escala uniforme, o que impossibilita a medição da similaridade entre duas cores através de sua distância no espaço RGB (Cheng et al., 2001).

Existem diversos sistemas de cores (Sharma & Trussell, 1997). Na verdade, partindo-se do sistema RGB, pode-se definir quantos sistemas de cores se queira, através de transformações lineares e não-lineares (Vandenbroucke et al., 2003). No Apêndice A, são apresentados quatro sistemas de cores baseados em transformações não-lineares do RGB (rgb, HSI, $L^*a^*b^*$ e $L^*u^*v^*$). As características destes sistemas são geralmente mais adequadas à classificação.

4.3. Escolha das características

A escolha das características adequadas à classificação é feita a partir da observação dos objetos conhecidos e de suas respectivas classes, ou seja, do conjunto de treinamento. O conjunto de características deve, por si só, descrever bem os objetos, agrupando os objetos similares e separando os objetos distintos. Ele precisa ser robusto para tolerar as diferenças dentro de cada classe e ser sensível bastante para discriminar essas classes. Assim, as características são escolhidas visando a separação das classes de modo a facilitar a tarefa do classificador.

Na prática, raramente uma única característica é suficiente para distinguir duas ou mais classes, sendo geralmente utilizado um conjunto com várias características. Por outro lado, a adição de mais características não significa sempre uma melhora no desempenho do classificador (Chen, 1973).

O aumento da dimensionalidade do espaço de características, ou seja, do número de características, torna o sistema mais complexo, custa um maior tempo de treinamento e pode reduzir a capacidade de generalização do sistema (Theodoridis & Koutroumbas, 2003). Além disso, um grande número de características tende a gerar redundância de informação, vindo também a prejudicar o desempenho do sistema.

Adicionalmente, o número de elementos do conjunto de treinamento precisa crescer exponencialmente com o aumento da dimensionalidade do espaço de características (Raudys & Jain, 1991; Duda et al., 2001). Contudo, nem sempre é possível obter mais objetos conhecidos para ampliar o conjunto de treinamento.

O caso extremo deste aumento do número de características sem o correspondente aumento do conjunto de treinamento leva ao Teorema do Patinho

Feio de Watanabe (1985). Depreende-se dele que dois objetos aleatórios parecerão similares se forem descritos por um número suficientemente grande de características. Assim, um cisne e um pato e um par de cisnes podem ficar igualmente similares (Kanal, 1993).

Este fenômeno de queda no desempenho do classificador devida ao aumento da dimensionalidade do espaço de características é conhecido como a maldição da dimensionalidade (*curse of dimensionality*). Segundo ele, dado um conjunto de treinamento, a classificação só melhora até um determinado número ótimo de dimensões, a partir do qual, o desempenho do classificador piora (Jain et al., 2000; Marques de Sá, 2001).

Há ainda a questão de não se poder visualizar objetos flutuando em um espaço de características com mais de três dimensões, o que dificulta a compreensão e conseqüentemente o projeto do sistema (Bonnet, 2000). Tudo isso enfatiza a necessidade de uma cuidadosa escolha do conjunto de características.

A redução da dimensionalidade do espaço de características constitui-se assim em uma importante etapa do projeto de um sistema de classificação. Na prática, esta questão pode ser resumida em se utilizar um número pequeno de características, selecionando e/ou compondo as características mais adequadas, a partir de todas as características disponíveis. Para isso, a redução de dimensionalidade é levada a cabo através de técnicas de seleção e de combinação de características.

A seleção de características pode ser feita através da busca exaustiva do conjunto de características que obtenha o melhor desempenho na classificação, o conjunto ótimo. No entanto, quando se tem um grande número de características disponível, na prática não é factível o teste de todos os conjuntos possíveis. Assim, busca-se um conjunto que apresente um desempenho sub-ótimo.

A busca de um conjunto sub-ótimo a partir das características que sozinhas apresentam as melhores taxas de acerto não é uma garantia de bons resultados. Diversos métodos de seleção de características são encontrados na literatura (Kudo & Skalansky, 2000). Nos problemas do presente trabalho, o número de características disponíveis é relativamente pequeno e assim não são empregados métodos sub-ótimos de seleção de características.

Para a combinação de características, duas técnicas clássicas são a Análise Discriminante de Fisher (FDA) e a Análise de Componentes Principais (Fukunaga, 1990; Duda et al., 2001). Ambas reduzem a dimensionalidade do espaço de

características, compondo novas características, através de combinações lineares das características originais. No presente trabalho, a técnica utilizada para a redução de dimensionalidade é a Análise Discriminante de Fisher Local (LFDA), uma variante da FDA que também costuma apresentar bons resultados quando existem classes multimodais no problema (Sugiyama, 2007).

Geometricamente, a combinação linear de características ocorre como no exemplo mostrado na Figura 26. Nesta figura, pode-se observar um espaço de características com duas dimensões onde existem três classes de objetos. As classes cor-de-rosa e cor-de-laranja não são distinguíveis a partir da observação de apenas uma das características originais, C_1 ou C_2 . No entanto, a nova característica (N_1) parece ser capaz de, sozinha, separar todas as classes.

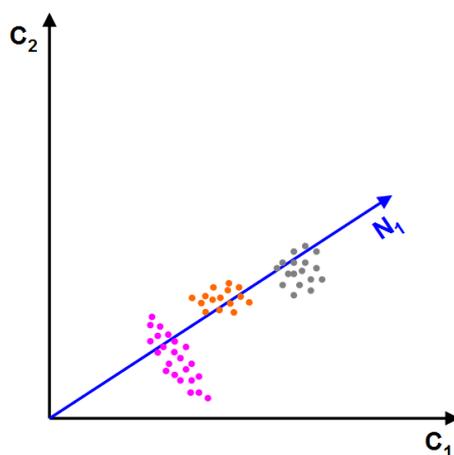


Figura 26 - Redução de dimensionalidade.

4.4. Classificador

O classificador é a função que calcula as medidas de similaridade entre os objetos no espaço de características. Na classificação supervisionada, a um objeto desconhecido é atribuída uma determinada classe a partir da similaridade deste objeto com os objetos representantes da classe no conjunto de treinamento. Existem inúmeros classificadores diferentes e a escolha ou projeto do mais adequado depende especificamente de cada caso. De forma geral, pode-se dividir os classificadores em dois tipos principais: os estatísticos (paramétricos e não-paramétricos) e os conexionistas (redes neurais).

Nos classificadores estatísticos, os objetos do conjunto de treinamento são utilizados para estimar certos parâmetros estatísticos de cada classe. Estes parâmetros

especificam o classificador. Além disso, os classificadores estatísticos paramétricos precisam estimar ou assumir uma determinada distribuição para cada classe.

Os classificadores estatísticos não-paramétricos são os classificadores mais simples e intuitivos. Eles utilizam uma função de distância como medida de similaridade, atribuindo, a um objeto desconhecido, a classe que menos se distancia dele no espaço de características. Dois classificadores estatísticos não-paramétricos comumente usados são o de distância euclidiana e o de distância de Mahalanobis.

O classificador de distância euclidiana é especificado pelo vetor média de cada classe, estimado a partir dos objetos da classe no conjunto de treinamento. Ele atribui a um objeto desconhecido a classe cujo centróide (vetor média) estiver à menor distância euclidiana do padrão do objeto no espaço de características. Dado um objeto \mathbf{x} , em um espaço de características multidimensional, a distância euclidiana ao quadrado do padrão deste objeto ao centróide da classe i é dada pela seguinte equação:

$$DE_i^2 = \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_i\|^2 \quad (4)$$

onde \mathbf{x} é o padrão do objeto x e $\bar{\mathbf{x}}_i$ é o vetor média da classe i .

Como se pode ver, o classificador de distância euclidiana é bem simples e de fácil compreensão, sendo portanto de grande valor didático. No entanto, só há garantia que ele apresente bons resultados caso todas as classes tenham a mesma variância em todas as características. Além disso, as características têm que ser decorrelatadas. Em um espaço com apenas duas dimensões, isto equivale a distribuições em forma de círculos, todos com o mesmo raio. Na prática, isto raramente ocorre.

A Figura 27 exemplifica esta limitação, mostrando um espaço de características bidimensional onde as distribuições de duas classes têm formas aproximadamente elípticas. Nesta figura, o objeto desconhecido é atribuído à classe 2 pelo classificador de distância euclidiana. Contudo, o bom senso provavelmente levaria uma pessoa a atribuí-lo à classe 1. Esta dicotomia existe porque, ao contrário do classificador de distância euclidiana, a pessoa em questão consideraria a forma das distribuições das classes, quando da sua tomada de decisão.

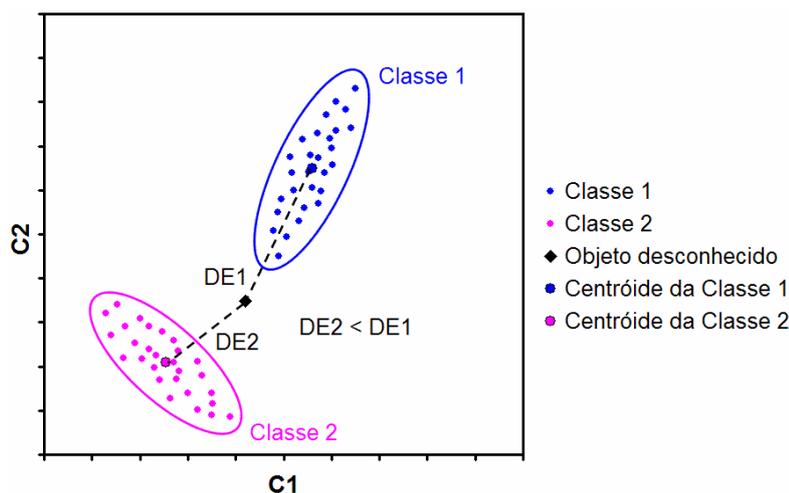


Figura 27 - Distância euclidiana x Mahalanobis.

Este tipo de problema é mais bem atendido pelo classificador de distância de Mahalanobis. Ele é especificado pelo vetor média e pela matriz de covariância de cada classe e, assim, leva em consideração a forma das distribuições das classes. A distância de Mahalanobis ao quadrado do padrão de um objeto \mathbf{x} à classe i é calculada de acordo com a seguinte equação:

$$DM_i^2 = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_i)^T \mathbf{C}_i^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_i) \quad (5)$$

onde \mathbf{x} é o padrão do objeto x ; $\bar{\mathbf{x}}_i$ é o vetor média da classe i e \mathbf{C}_i é a matriz de covariância da classe i , definida como:

$$\mathbf{C}_i = \frac{1}{N_i - 1} \sum_{\mathbf{x} \in \omega_i} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_i)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_i)^T \quad (6)$$

onde N_i é número de objetos da classe i e ω_i representa a classe i .

Na verdade, os classificadores de distância euclidiana e de Mahalanobis são casos muito especiais do classificador de Bayes (Schowengerdt, 1983), que é um classificador estatístico paramétrico, como mostrado a seguir.

O classificador de Bayes, também conhecido como classificador bayesiano, atribui, a um dado objeto, a classe que tem maior probabilidade de ser a verdadeira, dadas as características deste objeto. Esta probabilidade é chamada probabilidade *a posteriori* $P(i | \mathbf{x})$ e pode ser calculada segundo a Regra de Bayes (Duda et al., 2001):

$$P(i | \mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} | i)P(i)}{p(\mathbf{x})} \quad (7)$$

onde n é número de classes;

$P(i)$ é a probabilidade *a priori*;

$p(\mathbf{x} | i)$ é a função densidade de probabilidade da classe i ; e

$p(\mathbf{x})$ é a densidade de probabilidade, definida como:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n p(\mathbf{x} | i)P(i) \quad (8)$$

Todavia, como a densidade de probabilidade $p(\mathbf{x})$ está presente na equação da probabilidade *a posteriori* para todas as classes, ela pode ser eliminada da regra de decisão. Assim, o classificador de Bayes atribui, a um dado objeto \mathbf{x} , a classe i que apresentar a maior função de decisão $d_i(\mathbf{x})$, calculada conforme a equação a seguir:

$$d_i(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x} | i)P(i) \quad (9)$$

O classificador de Bayes é considerado o classificador ótimo, pois minimiza a probabilidade média de erro na classificação (Duda et al., 2001). No entanto, para que ele realmente seja ótimo, devem ser conhecidas, para cada classe, a probabilidade *a priori* $P(i)$ e a função densidade de probabilidade $p(\mathbf{x} | i)$.

As probabilidades *a priori* das classes ($P(i)$) podem, muitas vezes, ser inferidas a partir de algum conhecimento externo do problema. Quando isto não é possível, na prática, assume-se que todas as classes têm a mesma probabilidade *a priori*, por exemplo, 0,5 para um problema de duas classes. Obviamente, o classificador tende a apresentar melhores resultados no primeiro caso (Schowengerdt, 1983).

As funções densidade de probabilidade das classes ($p(\mathbf{x} | i)$) precisam ser estimadas. Contudo, na prática, esta estimação é difícil, especialmente se o conjunto de treinamento for pequeno ou se as distribuições das classes forem mal-comportadas. Assim, via de regra, o classificador de Bayes assume uma determinada distribuição para cada classe, geralmente a distribuição normal (gaussiana). Quanto mais próxima da realidade for esta assunção, mais o classificador de Bayes se aproximará do classificador ótimo (Gonzalez & Woods, 2002).

A partir das distribuições assumidas, o classificador de Bayes adota as expressões analíticas das respectivas funções densidade de probabilidade e estima os parâmetros estatísticos de cada classe. No caso de assumir distribuições normais, o então classificador bayesiano-gaussiano é especificado pelo vetor de média e pela matriz de covariância de cada classe no conjunto de treinamento. A seguir, é mostrada a expressão da função de decisão do classificador bayesiano-gaussiano:

$$d_i(\mathbf{x}) = \ln(P(i)) - \frac{1}{2} \ln|\mathbf{C}_i| - \frac{1}{2} [(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_i)^T \mathbf{C}_i^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_i)] \quad (10)$$

onde $P(i)$ é a probabilidade *a priori*; \mathbf{x} é o padrão do objeto \mathbf{x} ; $\bar{\mathbf{x}}_i$ é o vetor média da classe i ; e \mathbf{C}_i é a matriz de covariância da classe i .

Os chamados classificadores conexionistas são redes neurais artificiais. As redes neurais artificiais constituem classificadores mais complexos, inspirados na estrutura neural de organismos inteligentes, que aprendem por experiência.

A escolha do tipo de classificador a ser empregado depende especificamente do problema em questão. Os classificadores estatísticos são mais adequados quando os objetos nas várias classes estão distribuídos no espaço de características de acordo com topologias simples e preferencialmente conhecidas. Por outro lado, as redes neurais possuem capacidade de se ajustar a qualquer topologia de classes. Assim, as redes neurais são mais indicadas para os casos onde há classes com distribuições mal-comportadas (Marques de Sá, 2001; Gonzalez & Woods, 2002).

Para os problemas de classificação supervisionada de pixels aqui estudados, os classificadores estatísticos são eficazes. Deste modo, as redes neurais não fazem parte do escopo deste trabalho.