

4

Transitividade de Sistemas Alternantes

Existem sistemas alternantes que não são transitivos. De fato, considere uma função $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável que satisfaz as hipóteses do Lema 3.3 e um ponto $x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ tais que x_0 é periódico de período 2, $f'(x_0) < 1$ e $f'(f(x_0)) < 1$ (veja Figura 4.1). Nesse caso, x_0 é um ponto periódico atrator com respeito à f e, portanto, existe um subconjunto $A = A_- \cup A_+$ (Figura 4.1) - que chamamos de *bacia de atração* da órbita periódica - tal que $\text{int}(A) \neq \emptyset$ e $f(A) \subset A$. Pelo Corolário 2.4, uma função desse tipo não pode ser transitiva.

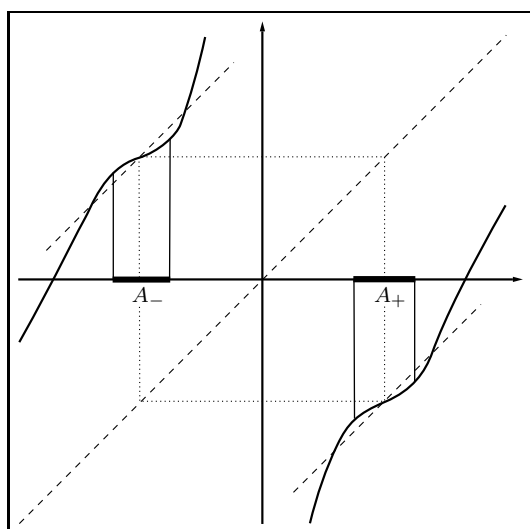


Figura 4.1: Um sistema alternante com órbita periódica atratora de período dois.

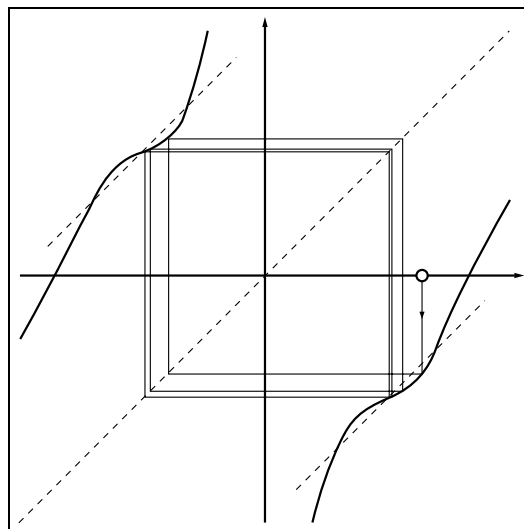


Figura 4.2: A órbita de um ponto $p \in A$ sendo atraída para a órbita de x_0 .

4.1

Átomo-expansividade

Nessa seção, definiremos o que é um sistema alternante A-expansivo e provaremos que esta propriedade é, de fato, equivalente à transitividade de sistemas alternante. Com isso, seremos capazes de mostrar que dois exemplos simples de sistemas alternantes crescentes, apresentados ao final da seção, são transitivos.

Definição 4.1 *Seja f um sistema alternante crescente. Dizemos que a função f é átomo-expansiva (ou, simplesmente, A -expansiva) se dados $x, y \in \mathbb{X} \equiv \mathbb{R} - \{f^{-n}(0) : n \geq 0\}$, existem átomos $A_1 \neq A_2$ da partição $\mathbb{P}_f$ induzida por f e um inteiro $N \geq 1$ tais que $f^N(x) \in A_1$ e $f^N(y) \in A_2$.*

Como $\mathbb{P}_f \cap I$ é uma partição de I , podemos estender a noção de átomo-expansividade para a transformação induzida f_I de forma natural: f_I é A -expansiva se, para todo par $x, y \in I \cap \mathbb{X}$, existe um inteiro $N > 0$ tal que $f_I^N(x)$ e $f_I^N(y)$ estão em átomos diferentes da partição $I \cap \mathbb{P}_f$.

Proposição 4.2 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ um sistema alternante crescente. Então a função f é A -expansiva se, e somente se, a transformação f_I induzida por f no intervalo distribuidor I é A -expansiva.*

Prova: Suponha a átomo-expansividade de f_I e considere, sem perda, $x, y \in \mathbb{X} \cap B_k^+$. Como, pela definição de B_k , $f^k(x), f^k(y) \in I$, podemos tomar o menor inteiro $N > 0$ tal que $f_I^N(f^k(x))$ e $f_I^N(f^k(y))$ estão em átomos diferentes da partição $I \cap \mathbb{P}_f$. Para todo $x \in I$, defina a sequência $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} n_1(x) &= n(x); \\ n_j(x) &= n(f^{n_{j-1}}(x)), \end{aligned}$$

onde $n(x)$ é o tempo de primeiro retorno (ver Definição 3.8). Repare que, pela minimalidade de N , $n_j(f^k(x)) = n_j(f^k(y))$ para todo $j \in \{1, \dots, N\}$.

Vamos, então, denotar $n_j(f^k(x))$ por n_j com $j \in \{1, \dots, N\}$. Assim, $f_I^N(f^k(x)) = f^{\sum_{j=1}^N n_j}(f^k(x))$ e, portanto, existe um inteiro $K = (k + \sum_{j=1}^N n_j)$ tal que $f^K(x)$ e $f^K(y)$ estão em átomos distintos da partição $\mathbb{P}_f$. Logo, f é átomo-expansiva.

Agora, suponha a átomo-expansividade de f e considere $x, y \in I \cap \mathbb{X}$ no mesmo átomo da partição $\mathbb{P}_f$. Seja $N > 0$ o menor inteiro tal que $f^N(x)$ e $f^N(y)$ estão em átomos diferentes. Pela dinâmica dos átomos, descrita em 3-1, $f^N(x)$ e $f^N(y)$ devem, necessariamente, estar em I . Assim, deve existir um inteiro $k \leq N$ tal que $f_I^k(x) = f^N(x)$ e $f_I^k(y) = f^N(y)$ e concluímos que f_I é átomo-expansiva. $\square$

Lema 4.3 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ um sistema alternante crescente. Se o conjunto $\{f^{-n}(0)\}_{n \geq 1}$ for denso em $\mathbb{R}$, então f é A -expansiva.*

Prova: Considere dois pontos $x < y$ de um mesmo átomo $A \in \mathbb{P}_f$. Se $\{f^{-n}(0)\}_{n \geq 1}$ é denso em $\mathbb{R}$, então existe $x < w < y$ tal que $f^n(w) = 0$. Mais ainda, pela propriedade de entrelaçamento de sistemas alternantes, para um inteiro $n > 0$ mínimo, existe um único $w \in (x, y)$ tal que $f^n(w) = 0$. Assim, pela continuidade de f , temos que $\text{signal}(f^n(x)) = -\text{signal}(f^n(y))$ e, em particular, $f^n(x)$ e $f^n(y)$ estão em átomos distintos. $\square$

Lema 4.4 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ um sistema alternante crescente. Se f é uma aplicação átomo-expansiva, então $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ é conjugado a $\sigma : \widetilde{\Sigma}_2 \rightarrow \widetilde{\Sigma}_2$.*

Prova: Obviamente, a escolha dos símbolos de uma dinâmica simbólica é totalmente irrelevante, o que importa é a cardinalidade do conjunto de símbolos. Na Seção 2.3, a escolha dos símbolos 0 e 1 era conveniente por causa da analogia entre as seqüências simbólicas e a expansão binária de um número real em $[0, 1)$. Agora, consideraremos $\widetilde{\Sigma}_2 \subset \Sigma_2 = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ em analogia à troca de sinais dos sistemas alternantes.

Supondo a átomo-expansividade da f , construiremos um homeomorfismo $h : \mathbb{X} \rightarrow \widetilde{\Sigma}_2$ tal que $h \circ f = \sigma \circ h$.

Defina $h : \mathbb{X} \rightarrow \widetilde{\Sigma}_2$ por

$$h(x) = (a_1 a_2 \dots a_n \dots),$$

onde $a_n = \text{signal}(f^{n-1}(x))$.

Como, para todo $x \in \mathbb{X}$, $\mathcal{O}_f^+(x)$ troca de sinal indefinidamente (propriedade (A2) da Definição 3.1), então existe $a \in \widetilde{\Sigma}_2$ tal que $h(x) = a$. A átomo-expansividade da f implica que se $x \neq y$, então existe um iterado positivo n tal que $f^n(x) < 0 < f^n(y)$. Em outras palavras, se $x \neq y$, então $h(x) \neq h(y)$. Sendo assim, h está bem definida e é injetora.

Para mostrar que h é sobrejetora, tome $a = (a_1 a_2 \dots) \in \widetilde{\Sigma}_2$ e considere os conjuntos

$$Q_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \quad \text{e} \quad Q_- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}.$$

Afirmção 1 *Para todo inteiro $n \geq 1$,*

$$f^{-n}(Q_+) = \mathbb{L} \cup (x_{n-1}^+, \infty) \quad \text{e} \quad f^{-n}(Q_-) = \mathbb{L} \cup (-\infty, x_{n-1}^-),$$

onde $\mathbb{L}$ é um conjunto limitado.

Prova da Afirmação: Mostraremos que $f^{-n}(Q_+) = \mathbb{L} \cup (x_{n-1}^+, \infty)$ usando indução em n (o caso para Q_- é análogo). Note que para $n = 1$, a afirmação vale pois

$$f^{-1}(Q_+) = (x_0^-, 0) \cup (x_0^+, \infty).$$

Neste caso, $\mathbb{L} = (x_0^-, 0)$. Suponha, então, que a afirmação vale para $n = k$. Assim,

$$\begin{aligned} f^{-k-1}(Q_+) &= f^{-1}(f^{-k}(Q_+)) = f^{-1}(\mathbb{L}) \cup f^{-1}((x_{k-1}^+, \infty)) \cup f_+^{-1}((x_{k-1}^+, \infty)) \\ &= f^{-1}(\mathbb{L}) \cup (u_k^-, 0) \cup (x_k^+, \infty). \end{aligned}$$

Para terminar a prova da afirmação, basta mostrarmos que $f^{-1}(\mathbb{L})$ é um conjunto limitado. De fato, como f é monótona e crescente em cada componente conexa de seu domínio e $\mathbb{L}$ é limitado, então

$$\inf f^{-1}(\mathbb{L}) = f_-^{-1}(\inf \mathbb{L}) \quad \text{e} \quad \sup f^{-1}(\mathbb{L}) = f_+^{-1}(\sup \mathbb{L}).$$

A prova da afirmação está concluída. $\square$

Queremos mostrar que, dado $a = \{a_j\}_{j=0}^\infty$, existe $x \in \mathbb{X}$ tal que $h(x) = a$.

Para isso, defina

$$\begin{aligned} A_1 &= \overline{f^{-1}(Q_{a_1}) \cap Q_{a_0}} \\ &\vdots \\ A_n &= \overline{f^{-n}(Q_{a_n}) \cap f^{-n+1}(Q_{a_{n-1}}) \cap \dots \cap Q_{a_0}}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Queremos mostrar que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

Por construção, os conjuntos A_n são fechados e encaixados. Seja $k \in \mathbb{N}$ o menor inteiro tal que $a_{k+1} = -a_k$. Então, pela afirmação 1, $\overline{f^{-k-1}(Q_{a_{k+1}}) \cap Q_{a_0}}$ é compacto. Como, para todo inteiro $n > k$, $A_n \subset \overline{f^{-k-1}(Q_{a_{k+1}}) \cap Q_{a_0}}$, então, $\{A_n\}_{n>k}$ é uma seqüência de compactos encaixados e, portanto, a interseção é não-vazia.

Afirmação 2 Se

$$x \in \bigcap_{n \geq 1} A_n,$$

então $h(x) = a$.

Prova da Afirmação: Repare que

$$\begin{aligned} A_n &= \overline{f^{-n}(Q_{a_n}) \cap f^{-n+1}(Q_{a_{n-1}}) \cap \dots \cap Q_{a_0}} \\ &= \overline{Q_{a_0} \cap f_{a_0}^{-1}(Q_{a_1}) \cap \dots \cap f_{a_{n-1}}^{-1}(Q_{a_n})}, \end{aligned}$$

onde f_-^{-1} e f_+^{-1} são as inversas de $f_- = f|_{Q_-}$ e $f_+ = f|_{Q_+}$. Então, para um n suficientemente grande, $A_n = [c, d]$ é um intervalo (interseção de conexos) tal que $c, d \in f^{-n}(0)$. Além disso,

$$c = \bigcap_{i=0}^{\infty} f_-^{-i}(A_n) \quad e \quad d = \bigcap_{i=0}^{\infty} f_+^{-i}(A_n).$$

Como $a \in \widetilde{\Sigma}_2$, então $x \in \mathbb{X}$ e, por construção, $\text{signal}(f^{j-1}(x)) = a_j$. $\square$

A continuidade de h é consequência da continuidade de f e concluímos a demonstração do lema. $\square$

O próximo teorema relaciona átomo-expansividade com transitividade.

Teorema 4.5 *Seja f um sistema alternante crescente. Então f é A-expansiva se, e somente se, é transitiva.*

Prova: Se f for A-expansiva, então, pelo lema anterior, $f|_{\mathbb{X}}$ é conjugada à $\sigma|_{\widetilde{\Sigma}_2}$. Como $\sigma|_{\widetilde{\Sigma}_2}$ é transitiva (Corolário 2.27), então f é transitiva (Proposição 2.7).

Agora, vamos mostrar o outro sentido. Provaremos que se f não é A-expansiva, então não é transitiva. Se f não é A-expansiva, então, pelo Lema 4.3, o conjunto $\{f^{-n}(0)\}_{n \geq 1}$ não é denso em $\mathbb{R}$. Logo, existe um intervalo aberto $U = (a, b)$ tal que U não contém pré-imagens de zero e, devido ao fato de que f é crescente (em cada componente conexa de seu domínio), temos que $f^n(U) = (f^n(a), f^n(b))$ para todo $n \geq 0$. Assim,

1. para qualquer $n \geq 0$, $f^n(U)$ não contém pré-imagens de zero,
2. para qualquer $n \geq 0$, $f^n(U)$ está em algum átomo da partição $\mathbb{P}_f$ induzida por f em $\mathbb{R}$.

Agora suponha, por absurdo, que f é transitiva. Então existe K_0 tal que $U \cap f^{K_0}(U) \neq \emptyset$. Repare também que, como, para todo $K \in \mathbb{N}$, U e $f^K(U)$ são intervalos, então $U \cap f^{K_0}(U)$ é um intervalo e, por (1), temos que

$$f^{mK_0}(U \cap f^{K_0}(U)) = f^{mK_0}(U) \cap f^{(m+1)K_0}(U)$$

também é um intervalo, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$. Dessa maneira, o conjunto

$$J = \bigcup_{n \geq 0} f^{nK_0} U$$

é um intervalo limitado (pois J está em algum átomo da partição $\mathbb{P}_f$) com interior não vazio que verifica $f^{K_0}(J) \subset J$. Pelo Corolário 2.4, f não pode ser transitiva. $\square$

Corolário 4.6 *Se f_I é átomo-expansiva, então f é transitiva.*

Prova: Segue diretamente do Teorema 4.5 e da Proposição 4.2. $\square$

Proposição 4.7 *Se $f'_I(x) \geq M > 1$ para todo $x \in I$, então f é A-expansiva (e, portanto, transitiva).*

Prova: Suponha, por absurdo, que $f'_I(x) \geq M > 1$ e que f não é A-expansiva. Pela Proposição 4.2, f_I é não A-expansiva. Considere, então, pontos $x, y \in I$ tais que, para todo inteiro n , $f_I^n(x)$ e $f_I^n(y)$ nunca estão em átomos distintos. Pelo Teorema do Valor Médio, temos que

$$|f_I(x) - f_I(y)| > M|x - y| \Rightarrow |f_I^k(x) - f_I^k(y)| \geq \min\{M^k|x - y|, |I|\}.$$

Em particular, existe inteiro $k > 0$ tal que $|f_I^k(x) - f_I^k(y)| > \max\{|I_n| : n \in \mathbb{N}\}$, donde concluímos que $f_I^k(x)$ e $f_I^k(y)$ devem estar em átomos distintos, um absurdo. Logo, f é A-expansiva. $\square$

Definição 4.8 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ um sistema alternante crescente. Dizemos que f é afim se f for uma função afim em cada intervalo da partição $\mathbb{P}_f$ induzida em $\mathbb{R}$.*

Proposição 4.9 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ um sistema alternante afim. Se f for simétrico (ou seja, $f(-x) = -f(x)$), então f é transitiva.*

Prova: Sejam $\{x_n^\pm\}_{n \geq 0}$ e $\{u_n^\pm\}_{n \geq 0}$ as seqüências induzidas por f , seja $I = (-x_0, x_0)$ o intervalo distribuidor e $\{I_{n+1}^-\}_{n \geq 0}, \{I_{n+1}^+\}_{n \geq 0}$, os átomos da partição induzida por f em I . No caso linear, é fácil entender como é a transformação

$f_I : I \rightarrow I$. Devido à linearidade e à simetria, f_I é uma transformação afim em cada átomo do intervalo distribuidor. Assim, temos que

$$\inf_{x \in I^-} \{f'_I(x)\} = \frac{|I^-|}{\max\{|I_j^+| : j \in \mathbb{N}\}} = \frac{|I^+|}{\max\{|I_j^-| : j \in \mathbb{N}\}} = \inf_{x \in I^+} \{f'_I(x)\}.$$

Como $\frac{|I^-|}{|I_n^+|} > 1$ para todo n , concluímos, pela Proposição 4.7, que f é transitiva. $\square$

Observação 4.10 *A proposição anterior está enunciada como em (Mun, Corolário 1.2.1) e demonstrada de uma forma diferente. Repare que seguindo a demonstração que apresentamos, percebe-se que a hipótese de simetria pode ser substituída por $\frac{|I_n^-|}{|I^+|} > 1$ e $\frac{|I_n^+|}{|I^-|} > 1$ para todo n .*

Defina $f_a : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte maneira: tome $x_0, a \in \mathbb{R}$ tais que $x_0 > 1$ e $1 - \epsilon < a < 1$ (considere $\epsilon > 0$ pequeno). Defina $u = 1/x_0$ e $x_1 = x_0/a$.

$$f_a(x) = \begin{cases} ax, & x \in (-\infty, -x_1] \cup (x_1, \infty), \\ (\frac{x_0}{x_1 - x_0})(x + x_0), & -x_1 < x \leq -x_0, \\ (\frac{x_0}{x_0 - u})(x + x_0), & -x_0 < x \leq -u, \\ -1/x, & x \in (-u, 0) \cup (0, u], \\ (\frac{x_0}{x_0 - u})(x - x_0), & u < x \leq x_0, \\ (\frac{x_0}{x_1 - x_0})(x - x_0) & x_0 < x \leq x_1, \end{cases}$$

Repare que essa função é um sistema alternante crescente simétrico e que ela é afim fora do intervalo distribuidor $I = [-x_0, x_0]$.

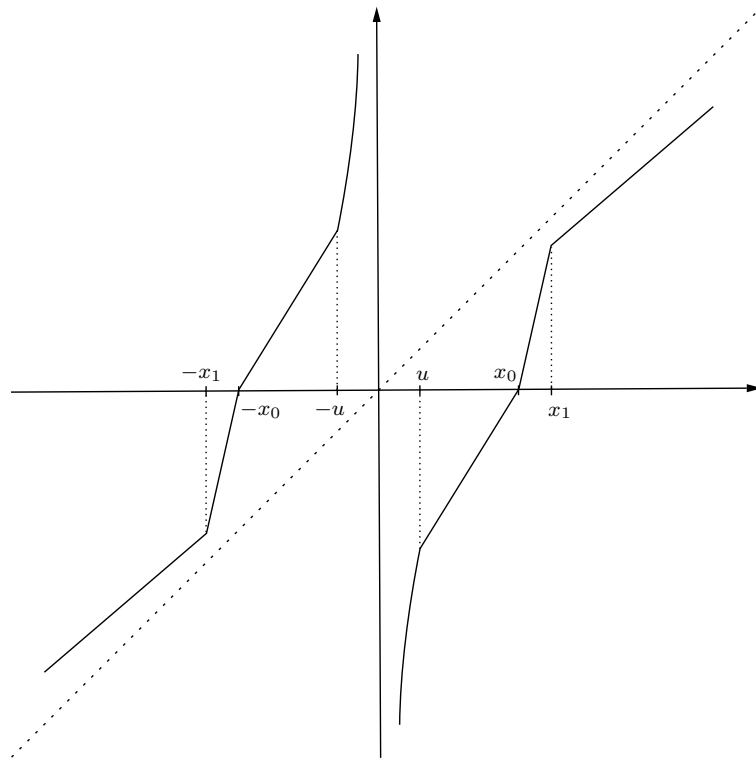


Figura 4.3: O gráfico da função f_a com $a = 0.95$ e $x_0 = 1.75$.

Proposição 4.11 f_a é um sistema alternante transitivo.

Prova: Mais uma vez, a idéia é mostrar que f_a é A-expansiva. Primeiro, observe que

$$\{x_n^\pm\} = \left\{\pm \frac{x_0}{a^n}\right\} \quad \text{e} \quad \{u_n^\pm\} = \left\{\pm \frac{a^n}{x_0}\right\}.$$

Assim, fixando $n \geq 2$ e tomando $x \in I_n^-$, temos que $x \in \left(\frac{-a^{n-1}}{x_0}, \frac{-a^n}{x_0}\right)$ e, dessa forma,

$$\begin{aligned} (f_a)'_I(x) &= f'_a(x) f'_a(f_a(x)) \cdots f'_a(f_a^{n(x)-1}(x)) \\ &= \frac{a^{n-1}}{x^2} > \frac{x_0^2 a^{n-1}}{a^{2n-2}} = \frac{x_0^2}{a^{n-1}} > 1, \end{aligned}$$

onde $(f_a)_I$ é a transformação induzida por f_a no intervalo distribuidor I . Pela Proposição 4.7, f é transitiva. $\square$

4.2

Transitividade robusta

Nessa seção, além definir C^1 -perturbações e transitividade robusta, provaremos que a rotação irracional no círculo e a transformação de Boole não são

robustamente transitivas, diferentemente da aplicação expansora no círculo. Provaremos que sistemas alternantes que satisfazem certas condições de distorção são robustamente transitivos e, por fim, provaremos que a aplicação $f_a(x) = ax - a/x$ é robustamente transitiva se $a \in (0, 1)$ é suficientemente próximo de 1.

Definição 4.12 *Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação C^k , $k \geq 1$. Dizemos que $g : X \rightarrow X$ está ϵ - C^1 próxima de f se $d(f(x), g(x)) < \epsilon$ e $d(f'(x), g'(x)) < \epsilon$ para todo $x \in X$. Alternativamente, dizemos que g é uma ϵ - C^1 perturbação de f .*

Definição 4.13 *Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação C^k , $k \geq 1$. Dizemos que f é uma função C^1 robustamente transitiva se existe $\epsilon > 0$ tal que, para toda $g : X \rightarrow X$ ϵ - C^1 próxima de f , temos que g é transitiva.*

Vimos, na Seção 2.2, duas aplicações transitivas definidas em $\mathbb{S}^1$: a rotação irracional R_α e a aplicação expansora ϕ_k . Vamos mostrar, agora, que a transitividade de ϕ_k é robusta, mas a de R_α não.

É fácil ver que existe uma ϵ - C^1 perturbação de R_α , com ϵ arbitrariamente pequeno, que não é transitiva. Para todo $\epsilon > 0$, podemos tomar uma rotação R_β com $\beta \in \mathbb{Q}$ e $|\alpha - \beta| < \epsilon$. Assim, obtemos transformações arbitrariamente C^1 próximas de R_α tal que todos os pontos de $\mathbb{S}^1$ são periódicos e, portanto, não possuem órbita densa.

Proposição 4.14 *A aplicação expansora de grau k , $\phi_k(x) = kx \pmod{1}$, é robustamente transitiva.*

Prova: Seja ψ uma ϵ - C^1 perturbação de ϕ_k ($\epsilon < 1$). Como $|\psi'(x) - \phi'_k(x)| < \epsilon$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$, então $\psi'(x) \in (k - \epsilon, k + \epsilon)$ e, em particular, $\psi'(x) > k - \epsilon > 1$. Assim, como consequência direta do Teorema do Valor Médio, temos que o comprimento de um intervalo $I \subset \mathbb{S}^1$ (suficientemente pequeno) é dilatado por um fator maior que $k - \epsilon > 1$ pela ação de ψ e, portanto, para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que

$$(k - \epsilon)^i < |\psi^i(I)| \leq 1.$$

Assim, deve existir um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\psi^n(I) = \mathbb{S}^1$. Em particular, $\psi^n(I)$ intersecta qualquer outro aberto de $\mathbb{S}^1$. Isso implica que ψ é misturadora e, em particular, transitiva. $\square$

Escólio 4.15 *Seja $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ uma aplicação diferenciável. Se*

$$\inf_{x \in \mathbb{S}^1} |f'(x)| > 1,$$

então f é C^1 robustamente transitiva.

Observação 4.16 Pela Proposição 4.7, a transformação de Boole $\varphi(x) = x - 1/x$ é um sistema alternante transitivo, pois $\varphi'(x) > 1$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Entretanto, a transitividade não é robusta. De fato, a função $\varphi_\epsilon = \varphi + \epsilon$ é uma ϵ - C^1 perturbação de φ (na verdade, uma ϵ - C^∞ perturbação), mas não é transitiva pois

$$x - \frac{1}{x} + \epsilon = x \Rightarrow x = \frac{1}{\epsilon}.$$

Assim, independente da escolha de $\epsilon > 0$, a função φ_ϵ possui um ponto fixo $p = 1/\epsilon$. Como já vimos, a existência de tal ponto fixo $p > 0$ implica na existência de um aberto f -invariante (p, ∞) . Pelo Corolário 2.5, f não pode ser transitiva.

Definição 4.17 Seja f um sistema alternante crescente C^1 . Dizemos que f é uma aplicação expansora com respeito à transformação f_I se existe $\sigma > 1$ e $C > 0$ tal que

$$f'_I(x) \geq C\sigma^{n(x)} > 1,$$

para todo $x \in I \cap \mathbb{X}$, onde $n(x) = \min\{n \geq 1 : f^n(x) \in I\}$.

Lema 4.18 Seja f um sistema alternante crescente C^1 . Suponha que :

1. existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < x - \delta$ se $x > 0$ e $f(x) > x + \delta$ se $x < 0$;
2. existe $a > 0$ tal que $f'(x) > a$ para todo $x \neq 0$ e
3. existe $L > 0$ suficientemente grande tal que $M \equiv \sup\{f'(x) : |x| > L\} < 1$.

Então existe $\epsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para toda $g \in C^1$ próxima de f , temos que g ainda é um sistema alternante crescente e existe $K \geq 1$ tal que

$$n_f(x) - K < n_g(x) < n_f(x) + K$$

para todo $x \in I_g$, onde I_g é o intervalo distribuidor de g e n_f, n_g são as funções de retorno de f e g , respectivamente.

Prova: Repare que as hipóteses (1) e (2) nos permitem tomar funções suficientemente próximas de f que ainda satisfaçam as condições do Lema 3.3 e, portanto, que ainda sejam sistemas alternantes crescentes. Fixemos, então, uma ϵ - C^1 perturbação g de f que seja um sistema alternante crescente.

Vamos denotar por $\{x_n^\pm\}_{n \geq 0}, \{u_n^\pm\}_{n \geq 0}$ as seqüências induzidas por f e $\{z_n^\pm\}_{n \geq 0}, \{w_n^\pm\}_{n \geq 0}$ as seqüências induzidas por g . Faremos a prova considerando apenas a perturbação de f em $[x_0^-, 0) \cup [x_0^+, \infty)$, pois a demonstração para uma perturbação em $(-\infty, x_0^-] \cup (0, x_0^+]$ é totalmente idêntica. Assim, só precisamos considerar as seqüências $\{x_n^+\}, \{u_n^-\}$ e $\{z_n^+\}, \{w_n^-\}$ e, por conta disso, iremos omitir os sinais.

Como as seqüências x_n e z_n divergem, podemos tomar $N, P \in \mathbb{Z}^+$ tais que $x_N > L$ e $x_N \geq z_P \geq x_{N+1}$. Repare que se $z_{P+n} = x_{N+n}$ para todo $n \geq 0$, então o lema segue trivialmente, pois, nesse caso, $K = |N - P|$. Suponha, então, que $x_N \geq z_P > x_{N+1}$ e tome $K \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$n_f(x) - K < n_g(x) < n_f(x) + K$$

para todo $x \in [z_0^-, w_{P+1}]$ tal que $g^n(x) \neq 0$ e $f^n(x) \neq 0$ para todo $n \geq 0$ (isso é possível pois, em um intervalo é compacto, só pode haver um número finito de átomos).

Seja N_0 o menor natural tal que $x_j > L$ para todo $j \geq N_0$. Pelo Teorema do Valor Médio e do fato que $M < 1$, temos que, para todo $n > 0$, vale

$$x_{N_0+n+1} - x_{N_0+n} = f^{-1}(x_{N_0+n}) - f^{-1}(x_{N_0+n-1}) > \frac{1}{M}(x_{N_0+n} - x_{N_0+n-1}),$$

onde f^{-1} denota a inversa de f_+ . Usando o mesmo argumento repetidas vezes, obtemos que

$$x_{N_0+n+1} - x_{N_0+n} > \left(\frac{1}{M}\right)^n (x_{N_0+1} - x_{N_0}).$$

Assim, para todo $C > 0$, podemos tomar N suficientemente grande tal que

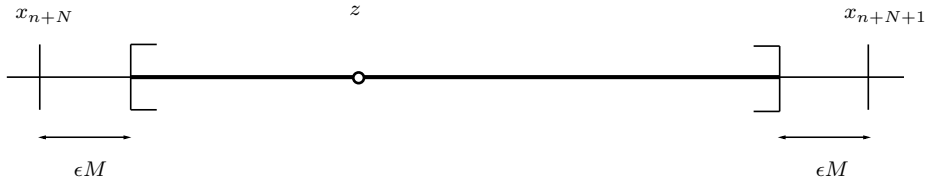
$$x_{N+n+1} - x_{N+n} > C\epsilon M \tag{4-1}$$

para todo $n \geq 0$.

Afirmção 1 *Se $z \in [x_{N+n} + \epsilon M, x_{N+n+1} - \epsilon M]$ para algum $n \geq 0$, então:*

$$x_{N+n+1} < g^{-1}(z) < x_{N+n+2}.$$

Prova da Afirmção: Fixe $z \in [x_{N+n} + \epsilon M, x_{N+n+1} - \epsilon M]$.



Se f_+ e g_+ são, respectivamente, as componentes de f e g em $(0, \infty)$, denotemos por f^{-1} e g^{-1} suas inversas. Sabemos que:

1. $\frac{1}{f'(y)} > \frac{1}{M}$ se $|y| > L$,
2. $f^{-1}(y) - \epsilon < g^{-1}(y) < f^{-1}(y) + \epsilon$ para todo y .

Usando (1), o Teorema do Valor Médio e que f é crescente, temos:

$$f^{-1}(z) - x_{N+n+1} = |f^{-1}(z) - f^{-1}(x_{N+n})| \geq \frac{1}{M}(z - x_{N+n}) > \frac{M\epsilon}{M} = \epsilon. \quad (4-2)$$

Por (2), concluímos que $x_{N+n+1} < g^{-1}(z)$. Analogamente, $g^{-1}(z) < x_{N+n+2}$ e, assim, provamos a afirmação. $\square$

Afirmção 2 Se $0 < x_{N+n+1} - z < M\epsilon$ para algum $n \geq 1$, então $g^{-1}(z) - x_{N+n+1} > M\epsilon$.

Prova da Afirmção: Se N é suficientemente grande então, usando que f é crescente, temos que $x_{N+n+1} < f^{-1}(z) - \epsilon$ (veja 4-2). Por (2), temos que também que $x_{N+n+1} < g^{-1}(z)$.

Seja N suficientemente grande para que também satisfaça:

$$(x_{N+1} - M\epsilon - x_N) > \epsilon(M^2 + 1).$$

Assim, pelas nossas hipóteses e do fato que $\{x_{N+n}\}_n$ é monótona crescente, temos:

$$(z - x_{N+n}) > (x_{N+n+1} - M\epsilon - x_{N+n}) > \epsilon(M^2 + 1) \quad (4-3)$$

para todo $n \geq 0$.

Faremos a prova por contradição. Suponha, por absurdo, que:

$$g^{-1}(z) - x_{N+n+1} \leq M\epsilon. \quad (4-4)$$

Seja

$$A \equiv |g(g^{-1}(z)) - f(g^{-1}(z))| = |z - f(x_{N+n+1}) - (f(g^{-1}(z)) - f(x_{N+n+1}))|.$$

Assim, por (4-1), (4-3), (4-4), da definição de M e do fato que $x_{N+n} = f(x_{N+n+1})$, obtemos

$$\begin{aligned} A &\geq |z - x_{N+n}| - |f(g^{-1}(z)) - f(x_{N+n+1})| \\ &> |z - x_{N+n}| - M|g^{-1}(z) - x_{N+n+1}| > \epsilon(M^2 + 1) - M^2\epsilon = \epsilon. \end{aligned}$$

Mas isso contradiz o fato de g ser uma ϵ -perturbação de f e a prova da afirmação está completa. $\square$

Fixe uma constante positiva d (por exemplo $d = 1/2$) e tome $\epsilon > 0$ tal que:

$$\epsilon < d\left(\frac{1}{M} - 1\right) \text{ e } M\epsilon < d. \quad (4-5)$$

Seja N tal que $x_{N+1} - x_N$ é arbitrariamente grande e considere a seguinte afirmação:

Afirmiação 3 *Se $z \in (x_M, x_{M+1})$ e $z - x_M > d$, então $g^{-1}(z) - x_{(M+1)} > d$ para todo $M \geq N$.*

Prova da Afirmiação: Sabemos que $x_{(M+1)} = f^{-1}(x_M)$. Então, usando (1),(2), (4-5) e o Teorema do Valor Médio, obtemos:

$$\begin{aligned} g^{-1}(z) - x_{(M+1)} &> f^{-1}(z) - f^{-1}(x_M) - \epsilon > \frac{1}{M}(z - x_M - \epsilon) \\ &> \frac{1}{M}d - d\left(\frac{1}{M} - 1\right) = d. \end{aligned}$$

E, assim, terminamos de provar a afirmação. $\square$

As afirmações que acabamos de provar nos dizem que o tempo de retorno da função g é limitado à direita com respeito ao tempo de retorno de f , ou seja, existe $\tilde{K}$ tal que $n_g < n_f + \tilde{K}$ (de fato $\tilde{K} = K \pm 1$, onde K é o possível crescimento de n_g em uma parte compacta da reta).

Se g é uma ϵ - C^1 perturbação de f tal que, para algum $a > 0$

$$a < \tilde{m} < g' < \tilde{M} < 1,$$

onde $\tilde{m} = \inf\{g'(x) : x \neq 0\}$ e $\tilde{M} = \sup\{g'(x) : |x| > \tilde{L}\}$ para algum $\tilde{L} > 0$ suficientemente grande, então a mesma prova funciona considerando f uma ϵ - C^1 perturbação de g . Isso termina a demonstração do Lema 4.18. $\square$

Teorema 4.19 *Seja f um sistema alternante crescente. Suponha que:*

1. f é expansora com respeito à transformação induzida (ver Definição 4.17);
2. existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < x - \delta$ se $x > 0$ e $f(x) > x + \delta$ se $x < 0$;
3. existe $a > 0$ tal que $f'(x) \geq a$ para todo $x \neq 0$;
4. existe $L > 0$ tal que $\sigma \frac{m}{M} > 1$, onde σ é a constante de expansão de f (ver Definição 4.17), $m = \min\{f'(x) : |x| \geq L\}$ e $M = \max\{f'(x) : |x| \geq L\}$;
5. $M < 1$.

Então f é C^1 robustamente transitiva.

Prova: Vamos provar que qualquer perturbação C^1 suficientemente próxima de f é um sistema alternante crescente A-expansivo. Daí, a prova segue imediatamente do Teorema 4.5. Isso será feito mostrando que as transformações induzidas por perturbações C^1 de f (em seus respectivos intervalos distribuidores) são átomo-expansivas. Com isso, teremos que a perturbação em questão também será átomo-expansiva.

Repare que podemos tomar $\epsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que $\delta - \epsilon_1 > 0$ e $a - \epsilon_1 > 0$. Dessa maneira, concluímos que toda ϵ_1 - C^1 perturbação de f satisfaz as hipóteses do Lema 3.3 e, portanto, ainda é um sistema alternante crescente.

Pela hipótese (4), podemos exigir ainda que ϵ_1 satisfaça:

$$\sigma \frac{(m - \epsilon_1)}{M} > 1.$$

Podemos também supor, pela hipótese (5), que ϵ_1 seja pequeno suficiente de tal modo que uma ϵ_1 - C^1 perturbação de f satisfaça o Lema 4.18. Assim, se g é uma ϵ_1 - C^1 perturbação de f temos que

$$n_f - K < n_g < n_f + K$$

para algum inteiro $K \geq 1$.

Sejam $J = [y_0^-, y_0^+]$ e $I = [x_0^-, x_0^+]$ os intervalos distribuidores de g e f , respectivamente. Considere $x \in J$ e defina

$$\begin{aligned} p_1 &\equiv \max_{x \in J} \#\{g^j(x) \in [-L, y_0^-] \cup [y_0^+, L] : j = 1, \dots, n_g(x) - 1\}; \\ p_2 &\equiv \max_{x \in I} \#\{f^j(x) \in [-L, x_0^-] \cup [x_0^+, L] : j = 1, \dots, n_f(x) - 1\}; \\ \tilde{m} &= \min\{f'(z) : z \in [-L, y_0^-] \cup [y_0^+, L]\} \text{ e} \\ \tilde{M} &\equiv \max\{f'(z) : z \in [-L, x_0^-] \cup [x_0^+, L]\}. \end{aligned}$$

Pela definição de J , do fato que $|g' - f'| < \epsilon_1$, da hipótese (1) e dos argumentos anteriores, temos:

$$\begin{aligned} g'_J(x) &= g'(x)g'(g(x)) \cdots g'(g^{n_g(x)-1}(x)) \\ &> (f'(x) - \epsilon_1)(f'(g(x)) - \epsilon_1) \cdots (f'(g^{n_g(x)-1}(x)) - \epsilon_1) \\ &= f'(x) \cdots f'(f^{n_f(x)-1}(x)) \left(1 - \frac{\epsilon_1}{f'(x)}\right) \frac{(f'(g(x)) - \epsilon_1) \cdots (f'(g^{n_g(x)-1}(x)) - \epsilon_1)}{f'(f(x)) \cdots f'(f^{n_f(x)-1}(x))} \\ &> C \sigma^{n_f(x)} \left(1 - \frac{\epsilon_1}{f'(x)}\right) \frac{(\tilde{m} - \epsilon_1)^{p_1}}{\tilde{M}^{p_2}} \left(\frac{(m - \epsilon_1)^{n_g(x)-1-p_1}}{M^{n_f(x)-1-p_2}}\right) \\ &> \tilde{C} \left(\sigma \frac{(m - \epsilon_1)}{M}\right)^{n_f(x)}, \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{C} = C \frac{(\tilde{m} - \epsilon_1)^{p_1}}{\tilde{M}^{p_2}} \frac{M^{p_2+1}}{(m - \epsilon_1)^{p_1+1-K}} \inf\left\{1 - \frac{\epsilon_1}{f'(x)} : x \neq 0\right\}.$$

Repare que

$$\tilde{C} = \tilde{C}(\epsilon_1) > C \frac{\tilde{m}^{p_1}}{\tilde{M}^{p_2}} \frac{M^{p_2+1}}{m^{p_1+1-K}} > 0.$$

Assim, se $\{x_n^\pm\}$ e $\{u_n^\pm\}$ são as seqüências induzidas por f , deve existir um inteiro $N \geq 1$ mínimo tal que $g'_J(x) > 1$ para todo $x \in (u_N^-, 0) \cup (0, u_N^+)$.

Como f é expansora com respeito à f_I , podemos tomar $\epsilon_2 > 0$ tal que se g é uma ϵ_2 - C^1 perturbação de f no conjunto compacto $[x_{N-1}^-, u_N^-] \cup [u_N^+, x_{N-1}^+]$ então:

$$g'_J(x) > 1$$

para todo $x \in (y_0^-, u_N^-) \cup (u_N^+, y_0^+)$.

Dessa maneira, escolhendo $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, temos que, se g está ϵ - C^1 próxima de f , então

$$g'_J(x) > 1,$$

para todo $x \in J$. Pela Proposição 4.7, g_J é átomo-expansiva e, portanto, transitiva. $\square$

Repare que, para a transitividade ser robusta, não podemos exigir apenas que exista $\sigma > 1$ tal que $f'_I(x) > \sigma$. Para ver isso, considere um sistema alternante crescente que satisfaz as hipóteses (2) e (3) do teorema acima e suponha que existe $\sigma > 1$ tal que $\sigma < f'_I(x) < 2\sigma$. Dado um $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, tome um inteiro $N > 0$ tal que

$$\sqrt[N]{\frac{1}{2\sigma}} > 1 - \epsilon.$$

Se $x^* \in I_N$, podemos construir uma ϵ - C^1 perturbação g de f (com o mesmo intervalo distribuidor) tal que $g^k(x^*) = f^k(x^*)$ e

$$g'(g^k(x^*)) = f'(f^k(x^*)) \sqrt[N]{1/2\sigma}$$

para todo $k \in \{0, \dots, N-1\}$. Assim,

$$\begin{aligned} g'_I(x^*) &= \prod_{k=0}^{N-1} g'(g^k(x^*)) \\ &= \prod_{k=0}^{N-1} (f'(f^k(x^*))) \sqrt[N]{1/(2\sigma)} \\ &= (\sqrt[N]{1/(2\sigma)})^N \prod_{k=0}^{N-1} (f'(f^k(x^*))) \\ &= \frac{f'_I(x^*)}{2\sigma} < \frac{2\sigma}{2\sigma} = 1. \end{aligned}$$

Corolário 4.20 Dado $a \in (0, 1)$, defina $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = ax - 1/x$. Então f é robustamente transitiva se a for suficientemente próximo de um.

Prova: Vamos mostrar que a função f satisfaz as hipóteses do Teorema 4.19. Claramente, f satisfaz as hipóteses do Lema 3.3 e, portanto, é um sistema alternante crescente C^∞ . A hipótese (3) é satisfeita, pois

$$f'(x) = a + \frac{1}{x^2}.$$

Precisamos, agora, mostrar que f é expansora com relação a transformação induzida no intervalo distribuidor $I = [-\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}]$.

Afirmamos que se $x < 0$ (o caso $x > 0$ é análogo, pois f é simétrica), então:

$$f^n(x) < -\frac{a^{n-1}}{x} \quad (4-6)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Primeiro repare que a inequação vale se $n = 1$:

$$f(x) = ax - \frac{1}{x} < -\frac{1}{x}.$$

Suponha, então, que a inequação (4-6) vale para $n = k$. Como f é crescente, temos que

$$f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) < f\left(-\frac{a^{k-1}}{x}\right) = -\frac{a^k}{x} + \frac{x}{a^{k-1}} < -\frac{a^k}{x}.$$

Donde concluímos que a inequação (4-6) ainda vale para $n = k + 1$.

Desta maneira, como

$$f^{n(x)-1}(x) \in (x_0^+, x_1^+) = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}, x_1^+\right),$$

então

$$\frac{1}{\sqrt{a}} < f^{n(x)-1}(x) < -\frac{a^{n(x)-2}}{x}$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{a} < \frac{a^{2n(x)-4}}{x^2}$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{a^{2n(x)-3}}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
 f'_I(x) &= f'(x)f'(f(x)) \cdots f'(f^{n(x)-1}(x)) \\
 &> f'(x)a^{n(x)-1} = \left(a + \frac{1}{x^2}\right)a^{n(x)-1} \\
 &> \frac{a^{n(x)-1}}{x^2} > \frac{a^{n(x)-1}}{a^{2n(x)-3}} \\
 &= a^2 \left(\frac{1}{a}\right)^{n(x)}.
 \end{aligned}$$

donde concluimos que f é expansora em relação à transformação induzida e com constantes $C = a^2 < 1$ e $\sigma = 1/a$. Assim, as hipóteses (4) e (5) são satisfeitas tomando $L > \frac{1}{\sqrt{1-a}}$, independente da escolha de $a \in (0, 1)$. Pois, nesse caso, $m = a$, $M = a + 1/L^2 < 1$ e, portanto,

$$\sigma \frac{m}{M} > \left(\frac{1}{a}\right) \frac{a}{a + 1/L^2} > 1.$$

Como $f'_I(x) > 1$ se $n(x) \geq 2$, então precisamos mostrar que $f'_I(x) > 1$ se $x \in I_1^-$ para qualquer valor de a suficiente próximo de 1. Como $f'_I(x) = f'(x)$ se $x \in [x_0^-, u_1^-]$ e $f'(x)$ é uma função crescente em $\mathbb{R}_-$, então

$$\inf_{x \in I_1^-} \{f'(x)\} = f'(-1/\sqrt{a}) = 2a.$$

Logo se $a > 1/2$, então f é robustamente transitiva. $\square$