

## 5 Ergodicidade de Sistemas Alternantes

Queremos procurar condições que garantam a ergodicidade de um sistema alternante com respeito a uma medida absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue. Apresentaremos, nesse capítulo, uma versão de um teorema que fornece condições para que exista uma medida absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue que seja preservada por uma aplicação definida no intervalo. Esse teorema garante, ainda, que a aplicação seja ergódica.

Primeiro, vamos dar algumas definições:

**Definição 5.1** *Sejam  $I = [a, b]$  e  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação diferenciável por partes. Dizemos que  $f$  é expansora se, existe um inteiro  $n \geq 0$  tal que*

$$|\inf(f^n)'(x)| > 1$$

para todo  $x \in I$

**Definição 5.2** *Dizemos que uma transformação  $f : I \rightarrow I$  do intervalo  $I = [a, b]$  é Markov se existe uma coleção enumerável  $\{I_k\}_{k \geq 1}$  de intervalos abertos e disjuntos tal que:*

1.  $f$  está definida em  $\bigcup I_k$  e  $I - \bigcup I_k$  tem medida nula;
2.  $f|_{I_k}$  é monótona e é estendida a uma função  $C^2$  em  $\overline{I_k}$  para todo  $k$ ;
3. se  $f(I_k) \cap I_j \neq \emptyset$ , então  $I_j \subset f(I_k)$ ;
4. para cada par  $k, j$ , existe um inteiro  $R > 0$  tal que

$$I_j \subset \bigcup_{n=1}^R f^n(I_k).$$

**Observação 5.3** A transformação  $f_I$ , induzida por um sistema alternante crescente, é uma aplicação de Markov. De fato,

$$I - \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{\pm} = \bigcup_{k=0}^{\infty} f_I^{-k}(0)$$

é um conjunto enumerável e, portanto, tem medida nula. A monotonicidade de  $f_I$  é conseqüência da monotonicidade de sistemas alternantes e as hipóteses (3) e (4) da Definição 5.2 são trivialmente satisfeitas pois  $f(I_k^{\pm}) = I^{\mp}$  para todo  $k$ .

Seja  $\xi$  a partição de uma aplicação de Markov  $f : I \rightarrow I$ . Denotaremos por  $\xi^{(n)}$  a partição formada pelos intervalos

$$I_1 \cap f^{-1}(I_2) \cap \dots \cap f^{-(n+1)}(I_n),$$

onde  $I_1, \dots, I_n \in \xi$ .

Apresentaremos, agora, um conhecido teorema (ou uma de suas muitas versões). Veja uma demonstração em (Ren, Teorema 1, p.483) e mais explicações em (Bow).

**Teorema 5.4 (Folclore)** *Seja  $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  um sistema alternante e  $f_I : I \rightarrow I$  sua transformação induzida. Se  $f_I$  for uma aplicação de Markov expansora e existir  $M > 0$  tal que*

$$\left| \frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(y)} \right| < M, \quad (5-1)$$

onde  $n$  é arbitrário e  $x, y$  são pontos do mesmo átomo da partição  $\xi^{(n)}$ , então  $f$  admite uma medida invariante, absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue. Além disso,  $f$  é ergódica com respeito a essa medida.

Se uma função de Markov satisfaz a hipótese (5-1) (chamada de condição de Rényi), então dizemos que  $f$  possui *distorção limitada*.

**Teorema 5.5** *Seja  $f$  um sistema alternante crescente  $C^2$ . Suponha que valem as seguintes hipóteses:*

1.  $f$  é expansora com respeito à transformação  $f_I$  induzida por  $f$  no intervalo distribuidor  $I$ .

2. Seja  $\xi$  a partição induzida por  $f$  em  $I$ . Então, existe  $C > 0$  tal que, para todo  $n \in \mathbb{N}$  e para quaisquer  $x_0, y_0 \in \xi^{(n)}$ ,

$$C > \frac{f'(x_0)}{f'(y_0)} \frac{f'(x_1)}{f'(y_1)} \cdots \frac{f'(x_n)}{f'(y_n)},$$

onde

$$\begin{aligned} x_j &= f^{n(x_{j-1})}(x_{j-1}), \\ y_j &= f^{n(y_{j-1})}(y_{j-1}) \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

3. As seqüências

$$M_n = \max\{f'(x) : x \in B_n^- \cup B_n^+\} \quad e \quad m_n = \min\{f'(y) : y \in B_n^- \cup B_n^+\}$$

satisfazem  $\frac{M_n}{m_n} < 1 + \epsilon_n$ , onde  $\{\epsilon_n\}$  é uma seqüência de números positivos tal que, para todo  $x_0$ ,

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{n(x_j)-1}) < \infty.$$

Então  $f$  é ergódica com respeito à medida de Lebesgue.

**Prova:** Pela Observação 5.3 e pelo Teorema 5.4, precisamos apenas mostrar que  $f_I$  possui distorção limitada com respeito à partição  $\xi = \{I_n^-, I_n^+ : n \geq 1\}$  induzida por  $f$  em  $I$ . Fixe  $m \geq 1$  e considere  $x_0, y_0 \in \xi^{(m)}$ . Pela definição de  $f_I$ , temos:

$$\frac{(f_I^m)'(x_0)}{(f_I^m)'(y_0)} = \prod_{i=0}^{m-1} \prod_{j=0}^{n(x_i)-1} \frac{f'(f^j(x_i))}{f'(f^j(y_i))} = \left( \prod_{i=0}^{m-1} \frac{f(x_i)}{f(y_i)} \right) \left( \prod_{i=0}^{m-1} \prod_{j=1}^{n(x_i)-1} \frac{f'(f^j(x_i))}{f'(f^j(y_i))} \right).$$

Pela hipótese (2), existe  $C > 0$  tal que

$$\frac{(f_I^m)'(x_0)}{(f_I^m)'(y_0)} < C \prod_{i=0}^{m-1} \prod_{j=1}^{n(x_i)-1} \frac{f'(f^j(x_i))}{f'(f^j(y_i))}$$

Repare que  $f^j(x) \in B_{n(x)-j}^\pm$  para todo  $x \in I^\mp - I_1^\mp$  e  $j = 1, \dots, n(x) - 1$ . Logo,

$$\frac{(f_I^m)'(x_0)}{(f_I^m)'(y_0)} < C \prod_{i=0}^{m-1} \prod_{j=1}^{n(x_i)-1} \frac{M_j}{m_j}.$$

Tomando o logaritmo nos dois lados,

$$\begin{aligned} \log \left( \frac{(f_I^m)'(x_0)}{(f_I^m)'(y_0)} \right) &< \log C + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{n(x_i)-1} \log \left( \frac{M_j}{m_j} \right) \\ &< \log C + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{n(x_i)-1} \log(\epsilon_j + 1). \end{aligned}$$

Como  $\log(1 + \epsilon) < \epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$ , temos que

$$\log \left( \frac{(f_I^m)'(x_0)}{(f_I^m)'(y_0)} \right) < \log C + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{n(x_i)-1} \epsilon_j.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{(f_I^m)'(x_0)}{(f_I^m)'(y_0)} &< C \exp \left( \sum_{i=0}^{m-1} (\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{n(x_i)-1}) \right) \\ &< C \exp \left( \sum_{j=1}^{\infty} (\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{n(x_j)-1}) \right). \end{aligned}$$

Isso termina a prova.  $\square$

**Corolário 5.6** *Se  $f$  é um sistema alternante afim e simétrico, então  $f$  é ergódica com respeito à medida de Lebesgue.*

**Prova:** O Corolário segue pois as hipóteses do Teorema 5.5 são satisfeitas com  $C = 1$  e com a seqüência constante  $\epsilon_n = 0$ .  $\square$