

2 Formulação das Equações

2.1. Introdução

Na análise de estruturas coaxiais, muito utilizadas para o transporte de energia eletromagnética, os métodos numéricos podem ser basicamente divididos em dois tipos: métodos de solução de equações integrais e métodos de solução de equações diferenciais.

Como exemplo dos métodos de solução de equações integrais, tem-se o método dos momentos, possuindo este a desvantagem de ter uma implementação mais complicada quando são consideradas estruturas com geometria complexa e com meios não homogêneos. Já os métodos de solução de equações diferenciais (método dos elementos finitos e método das diferenças finitas), têm como vantagem uma formulação mais simples e de fácil aplicação para estruturas com geometrias complexas.

Neste capítulo será mostrada a aplicação do método dos elementos finitos na análise de estruturas coaxiais. O sistema de referência utilizado para a estrutura é o cilíndrico, sendo o eixo longitudinal, radial e angular, respectivamente, z , ρ e ϕ . O guia coaxial tem simetria cilíndrica e seu campo possui uma variação temporal de $e^{j\omega t}$. Além disso, é considerado que as paredes desses guias são formadas por condutores perfeitos.

Em uma linha de transmissão, a diferença entre as dimensões das seções transversais dos guias coaxiais faz com que ocorra o aparecimento de diversos modos nas transições entre as seções. Nas estruturas consideradas neste projeto, o campo é calculado a uma determinada distância da área de perturbação onde apenas o modo fundamental continua se propagando. Os demais modos, por serem evanescentes, não possuem uma influência significativa.

Como a estrutura utilizada no projeto tem simetria cilíndrica, um problema que é tridimensional pode ser resolvido como se fosse bidimensional (radial e

longitudinal). Considerando essa simetria, o campo magnético não possuirá componente radial.

Levando-se em consideração as condições descritas anteriormente, o cálculo dos campos magnéticos no interior dos guias é realizado a partir do tratamento das equações de Maxwell como mostrado a seguir.

2.2. Formulação Eletromagnética

O problema proposto consiste em calcular a distribuição de campo eletromagnético em uma estrutura metálica coaxial circularmente simétrica em torno do eixo longitudinal coincidente com o eixo z das coordenadas cilíndricas, conforme ilustrado na Figura 2.1. Entre as paredes metálicas existe um carregamento dielétrico linear caracterizado pela permissividade $\varepsilon(\rho, z)$ e permeabilidade $\mu(\rho, z)$.

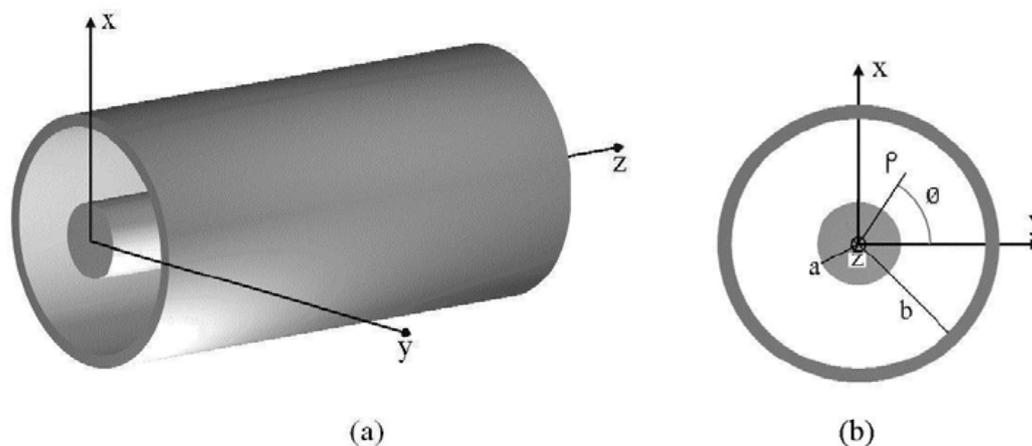


Figura 2.1.: Geometria do problema proposto. (a) seção de guia de onda coaxial e (b) sistema de coordenadas cilíndricas [11].

Neste estudo serão considerados dois tipos de fonte de excitação para a estrutura:

- Alimentação Tipo I: modo TEM (Transverse Eletromagnetic Mode) incidente na porta de entrada Γ_1 , como mostrado na Figura 2.2.
- Alimentação Tipo II: fonte de corrente magnética $\vec{M} = M_o / \rho \hat{\phi}$ superficial colocada sobre a porta de entrada, como mostrado na Figura 2.3.

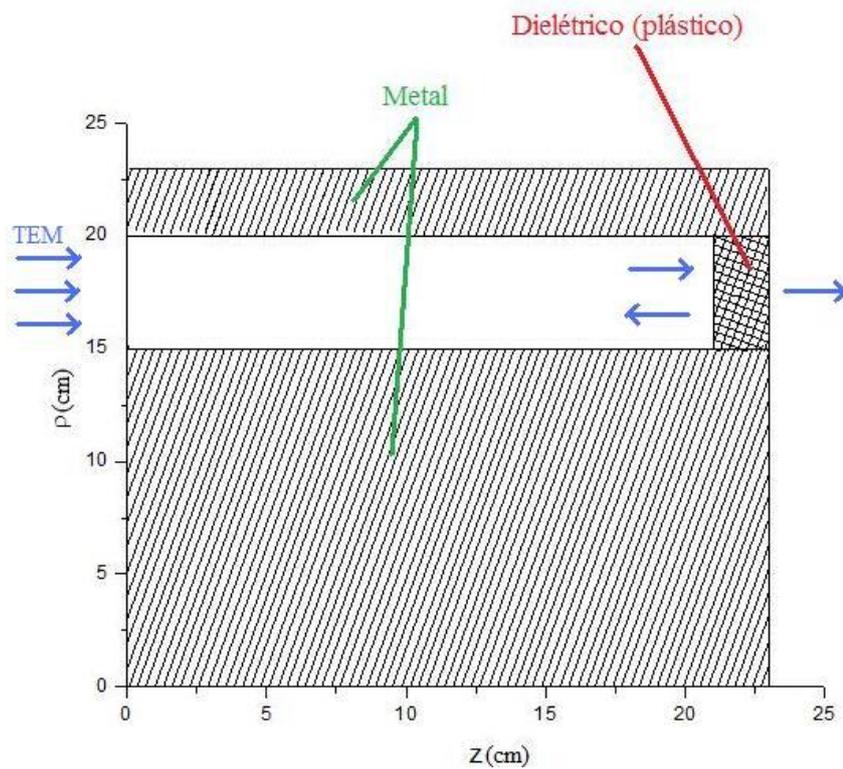


Figura 2.2.: Alimentação Tipo I – modo TEM incidente na porta de entrada.

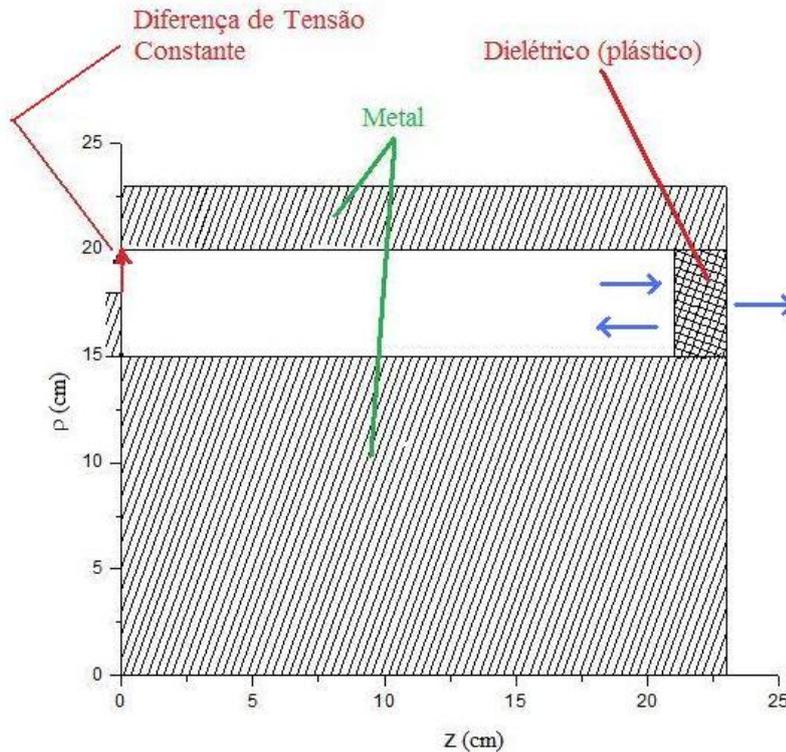


Figura 2.3.: Alimentação Tipo II - fonte de corrente magnética sobre a porta de entrada.

Para o primeiro tipo de fonte, a aplicação da solução numérica a ser utilizada requer que o dimensionamento das portas de entrada Γ_1 e saída Γ_2 assegure a propagação exclusiva do modo TEM, enquanto que no segundo caso esta exigência é imposta somente à porta de saída Γ_2 .

O modo TEM^z não possui componentes de campo eletromagnético na direção longitudinal (z), com componentes H_z e E_z nulas. Como a estrutura circular desse problema não possui dependência azimutal, assim como as fontes de excitação também não possuem dependência em ϕ , os modos superiores excitados pelas discontinuidades no interior da estrutura coaxial não vão apresentar componentes longitudinais (z) do campo magnético. Dessa forma, os campos no interior do guia coaxial podem ser caracterizados como TM^z (Transverse Magnetic), onde a componente H_z é nula.

2.3. Equação de Onda

O sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) escolhido para descrever o problema da estrutura cilíndrica da Figura 2.1 possui um eixo z que coincide com o eixo da estrutura. A região V (Volume) é limitada pelas superfícies S_0 das paredes metálicas e S_1 e S_2 sobre as portas de entrada e saída, respectivamente. Devido à simetria circular, o volume possui uma seção transversal Ω no plano ρz com fronteira descrita pela geratriz Γ , que consiste das paredes metálicas Γ_0 e pelas portas Γ_1 e Γ_2 .

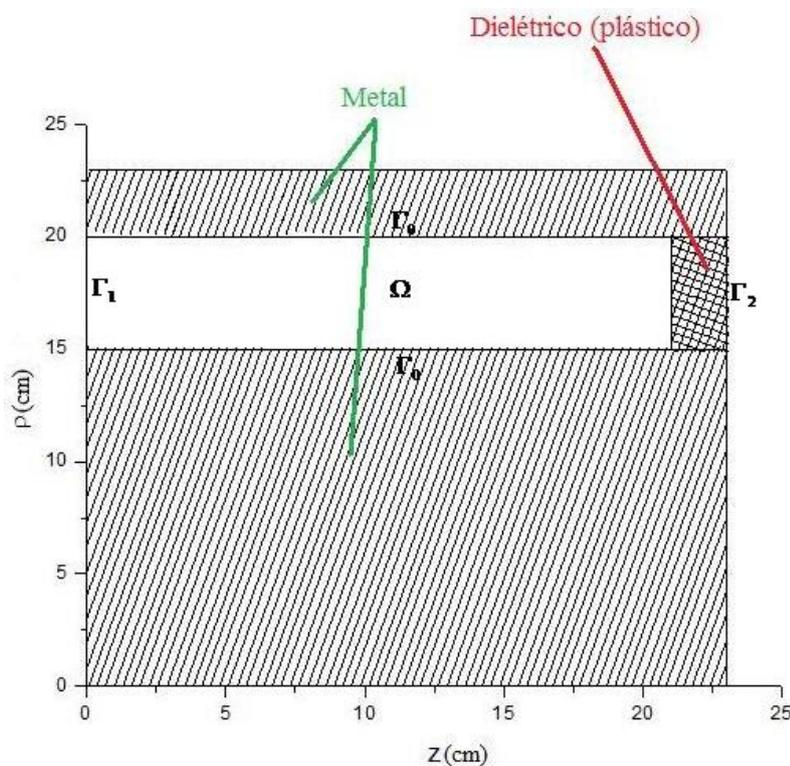


Figura 2.4.: Regiões da seção reta da estrutura cilíndrica.

As equações de Maxwell na forma diferencial para um meio linear e isotrópico utilizadas na resolução do problema de uma estrutura cilíndrica com uma corrente magnética na entrada são:

Equation Section (Next)

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \varepsilon(\rho, \phi, z) \vec{E} + \vec{J} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu(\rho, \phi, z) \vec{H} - \vec{M} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_E \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \rho_M \quad (1.4)$$

onde \vec{E} e \vec{H} são os campos elétrico e magnético, ρ_E e ρ_M são as densidades volumétricas de carga elétrica e magnética e \vec{J} e \vec{M} são as fontes de corrente elétrica e magnética, respectivamente. A permissividade ε e a permeabilidade μ podem ser complexas e dependentes da posição na região de interesse Ω . A frequência angular é definida por $\omega = 2\pi f$.

Como não existem fontes de corrente elétrica \vec{J} na região V , a equação (1.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon(\rho, \phi, z)} \nabla \times \vec{H} \quad (1.5)$$

Substituindo a expressão (1.5) na lei de Faraday (1.2) tem-se que:

$$\nabla \times \left[\frac{1}{j\omega\varepsilon(\rho, \phi, z)} \nabla \times \vec{H} \right] = -\vec{M} - j\omega\mu(\rho, \phi, z)\vec{H} \quad (1.6)$$

Considerando que $\varepsilon(\rho, z) = \varepsilon_R(\rho, z)\varepsilon_0$ possa ser expressa através da permissividade relativa do meio e $\mu(\rho, z) = \mu_R(\rho, z)\mu_0$ possa ser expressa pela permeabilidade relativa do meio, a equação (1.6) também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\varepsilon_R(\rho, \phi, z)} \nabla \times \vec{H} \right] = -j\omega\varepsilon_0\vec{M} - j^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0\mu_R(\rho, \phi, z)\vec{H} \quad (1.7)$$

onde a constante de onda k_0 é definida por:

$$k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 \quad (1.8)$$

Utilizando a definição (1.8), a equação (1.7) pode ser escrita como:

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\varepsilon_R(\rho, \phi, z)} \nabla \times \vec{H} \right] - k_0^2 \mu_R(\rho, \phi, z) \vec{H} = -j\omega \varepsilon_0 \vec{M} \quad (1.9)$$

onde a equação (1.9) é a equação de onda em termos do vetor campo magnético.

Para os pontos no interior da região V, a fonte de corrente \vec{M} é nula permitindo que a equação (1.9) seja reescrita como.

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\varepsilon_R(\rho, \phi, z)} \nabla \times \vec{H} \right] - k_0^2 \mu_R(\rho, \phi, z) \vec{H} = 0 \quad (1.10)$$

2.4. Excitação do Dispositivo

Na seção 2.2 foi mostrado que serão considerados dois tipos de fonte de excitação para a estrutura: Alimentação Tipo I e Alimentação Tipo II. O primeiro tipo de fonte pode ser considerado ideal, pois apenas o modo TEM está se propagando no duto. O segundo tipo de alimentação representa de uma forma mais real o tipo de propagação que pode ocorrer dentro de um duto de petróleo. Os campos excitados em cada tipo de fonte estão descritos a seguir.

Alimentação do Tipo I

Na alimentação do Tipo I é suposto que somente o modo fundamental TEM se propague nas portas S_1 de entrada e S_2 de saída, podendo existir nos dois sentidos na porta de entrada S_1 , correspondendo aos modos incidente e refletido, enquanto que na saída temos somente a presença do modo transmitido se propagando no sentido z-positivo. Neste tipo de alimentação não existe fonte de corrente no interior do volume V e na superfície de contorno S.

Desta forma podemos expressar o campo $\vec{H} = \vec{H}^i + \vec{H}^s$ em S_1 através da soma dos campos incidente \vec{H}^i e espalhado \vec{H}^s . Como será exposto na seção 2.5,

o campo magnético do modo TEM tem uma única componente na direção $\hat{\phi}$, $\vec{H} = H_{\phi} \hat{\phi}$.

Considerando que o modo TEM é utilizado para representar os campos magnéticos incidente e refletido, pode-se estabelecer uma expressão para o campo elétrico a partir das componentes de campo magnético. A equação do campo elétrico incidente pode ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{E}^i = \frac{\nabla \times \vec{H}^i}{j\omega\epsilon} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial H_{\phi}^i}{\partial z} \hat{\rho} \quad (1.11)$$

Do mesmo modo, tem-se o campo elétrico espalhado:

$$\vec{E}^s = \frac{\nabla \times \vec{H}^s}{j\omega\epsilon} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial H_{\phi}^s}{\partial z} \hat{\rho} \quad (1.12)$$

Dessa forma, o campo elétrico total ($\vec{E}^i + \vec{E}^s$) em S_1 pode ser escrito a partir das componentes de campo magnético (incidente e espalhado), utilizando-se as expressões (1.11) e (1.12), ficando como:

$$\vec{E} = \frac{\nabla \times \vec{H}}{j\omega\epsilon} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial [H_{\phi}^i + H_{\phi}^s]}{\partial z} \hat{\rho} \quad (1.13)$$

O modo fundamental (TEM) é usado para representar o campo incidente $H_{\phi}^i = e^{-jk_1 z} / \eta_1 \rho$. Dessa forma, a derivada em z da expressão (2.13) na porta 1 ($z = l_1$) pode ser escrita como:

$$\vec{E} \Big|_{z=l_1} = \frac{1}{j\omega\epsilon_1} \frac{\partial [H_{\phi}^i + H_{\phi}^s]}{\partial z} \Big|_{z=l_1} \hat{\rho} = \frac{1}{j\omega\epsilon_1} (-jk_1 H_{\phi}^i + jk_1 H_{\phi}^s) \Big|_{z=l_1} \hat{\rho} \quad (1.14)$$

onde l_1 é posição no eixo z da porta de entrada S_1 , $\varepsilon = \varepsilon_1$ é a permissividade elétrica relativa do meio 1 (Figura 2.5) e $k_1 = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$.

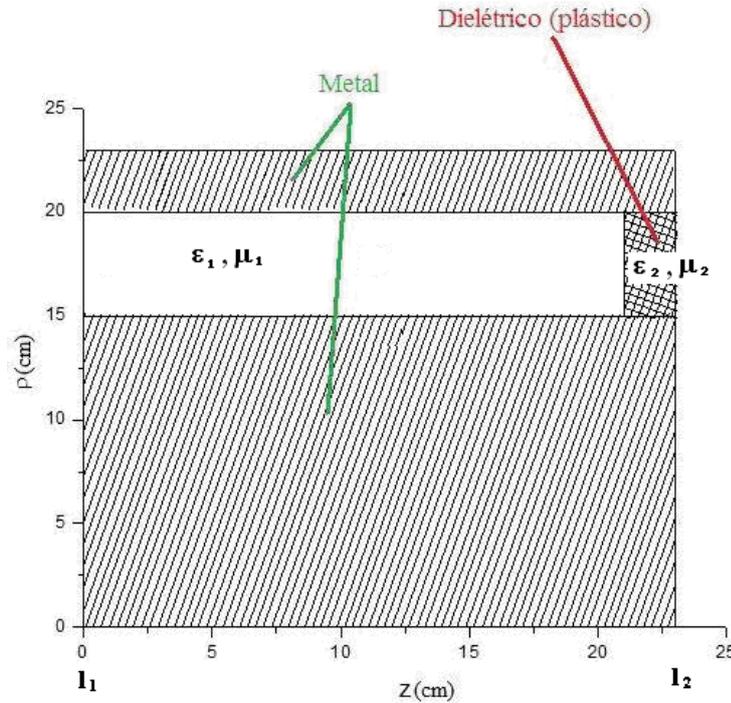


Figura 2.5.: Propriedades dos meios 1 (ε_1, μ_1) no interior do duto e 2 (ε_2, μ_2) no dielétrico.

Considerando que $\vec{H} = \vec{H}^i + \vec{H}^s$, pode-se expressar o campo refletido como $\vec{H}^s = \vec{H} - \vec{H}^i$. Dessa forma, a equação (1.14) pode ser reescrita como:

$$\vec{E}\Big|_{z=l_1} = \frac{k_1}{\omega\varepsilon_1} \left(-2H_\phi^i + H_\phi \right)\Big|_{z=l_1} \quad \hat{\rho} = -\eta_1 \left(H_\phi - 2H_\phi^i \right)\Big|_{z=l_1} \quad \hat{\rho} \quad (1.15)$$

onde η_1 é a impedância de onda na porta 1 ($\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$).

Similarmente, na abertura 2 do guia, o campo é composto somente pelo campo transmitido. A condição de fronteira absorvente será definida como:

$$\vec{E}\Big|_{z=l_2} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_2} \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\Big|_{z=l_2} \quad \hat{\rho} = -\frac{k_2}{\omega\varepsilon_2} H_\phi \hat{\rho} = -\eta_2 H_\phi \Big|_{z=l_2} \quad \hat{\rho} \quad (1.16)$$

onde l_2 é posição no eixo z da porta de saída S_2 , $\varepsilon = \varepsilon_2$ é a permissividade elétrica relativa do meio 2 (Figura 2.5) e $k_2 = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$. Assim como em Γ_1 , os modos evanescentes são negligenciados.

Alimentação do Tipo II

Para o dispositivo descrito na Figura 2.3, a excitação dos campos é produzida por uma diferença de potencial V_0 entre os cilindros externo e interno na região de estreitamento da estrutura. Este estreitamento impede a utilização do modelo de alimentação do Tipo I, visto que não é possível prever a existência exclusiva do modo TEM. Para este dispositivo, a diferença de potencial V_0 imposta ao dispositivo gera uma distribuição de campo elétrico radial $E(\rho)\hat{r}$ conhecida na porta de entrada:

$$\vec{E}(\rho) = \frac{E_0}{\rho} \hat{\rho} = \frac{V_0}{\rho \ln\left(\frac{\rho_A}{\rho_B}\right)} \hat{\rho} \quad (1.17)$$

Para a porta de saída, permanecem as suposições do modelo de alimentação do Tipo I.

2.5. Método de Galerking

O objetivo da formulação de elementos finitos é obter a solução da equação de onda vetorial (1.9) em um volume V , onde está sendo considerado que $\vec{M} \neq 0$. Esta solução pode ser obtida utilizando-se o método de Galerking, onde se multiplicam escalarmente os dois membros da equação por funções de teste vetoriais \vec{H}_n^c [8]. Com isso, pode-se obter a equação (1.18):

$$\iiint_V \nabla \times \left[\frac{1}{\varepsilon_R(\rho, \phi, z)} \nabla \times \bar{H} \right] \cdot \bar{H}^c dV - \iiint_V k_0^2 \mu_R(\rho, \phi, z) \bar{H} \cdot \bar{H}^c dV = - \iiint_V j\omega \varepsilon_0 \bar{M} \cdot \bar{H}^c dV \quad (1.18)$$

A identidade vetorial (1.19) pode ser aplicada ao integrando da primeira integral da equação (1.18), obtendo-se a expressão (1.20).

$$\nabla \cdot [\bar{A} \times \bar{B}] = \bar{B} \cdot \nabla \times \bar{A} - \bar{A} \cdot \nabla \times \bar{B} \Rightarrow \textit{identidade vetorial} \quad (1.19)$$

$$\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_R(\rho, \phi, z)} \nabla \times \bar{H} \right) \times \bar{H}^c \right] = \bar{H}^c \cdot \nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_R(\rho, \phi, z)} \nabla \times \bar{H} \right) - \left(\frac{1}{\varepsilon_R(\rho, \phi, z)} \nabla \times \bar{H} \right) \cdot \nabla \times \bar{H}^c \quad (1.20)$$

Reorganizando a equação (1.20), tem-se que:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_R(\rho, \phi, z)} \nabla \times \bar{H} \right) \cdot \bar{H}^c = \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_R(\rho, \phi, z)} \nabla \times \bar{H} \right) \times \bar{H}^c \right] + \left(\frac{1}{\varepsilon_R(\rho, \phi, z)} \nabla \times \bar{H} \right) \cdot \nabla \times \bar{H}^c \quad (1.21)$$

Aplicando o resultado obtido em (1.21) na equação integral (1.18), pode-se obter o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_R(\rho, \phi, z)} \nabla \times \bar{H} \right) \times \bar{H}^c \right] dV + \iiint_V \left(\frac{1}{\varepsilon_R(\rho, \phi, z)} \nabla \times \bar{H} \right) \cdot \nabla \times \bar{H}^c dV - \iiint_V k_0^2 \mu_R(\rho, \phi, z) \bar{H} \cdot \bar{H}^c dV = \\ = - \iiint_V j\omega \varepsilon_0 \bar{M} \cdot \bar{H}^c dV \end{aligned} \quad (1.22)$$

Aplicando o Teorema de Gauss na primeira integral da equação (1.22) tem-se que:

$$\begin{aligned} \iint_S \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_R(\rho, \phi, z)} \nabla \times \bar{H} \right) \times \bar{H}^c \right] \cdot \hat{n} dS + \iiint_V \left(\frac{1}{\varepsilon_R(\rho, \phi, z)} \nabla \times \bar{H} \right) \cdot \nabla \times \bar{H}^c dV - \iiint_V k_0^2 \mu_R(\rho, \phi, z) \bar{H} \cdot \bar{H}^c dV = \\ = - \iiint_V j\omega \varepsilon_0 \bar{M} \cdot \bar{H}^c dV \end{aligned} \quad (1.23)$$

Para a Alimentação Tipo I

Na alimentação do Tipo I apenas o modo fundamental TEM se propaga nas portas S_1 de entrada e S_2 de saída. Substituindo o campo \bar{E} pelas equações (1.15) e (1.16) nas portas S_1 e S_2 , respectivamente, a integral sobre a superfície da equação (1.23) ficará da seguinte forma:

$$\text{Entrada:} \quad \iint_{S_1} \left\{ -\frac{1}{\varepsilon_1(\rho, \phi, z)} H_\phi^c j\varepsilon_0 k_1 (H_\phi - 2H_\phi^i) \right\} \rho d\rho d\phi \quad (1.24)$$

$$\text{Saída:} \quad \iint_{S_2} \left\{ -\frac{1}{\varepsilon_2(\rho, \phi, z)} H_\phi^c j\varepsilon_0 k_2 H_\phi \right\} \rho d\rho d\phi \quad (1.25)$$

Para a Alimentação Tipo II

A alimentação do Tipo II gera uma diferença de potencial entre os cilindros externo e interno da estrutura. Substituindo o campo \bar{E} pelas equações (1.15) e (1.17) nas portas S_2 e S_1 , respectivamente, a integral sobre a superfície da equação (1.23) ficará da seguinte forma:

$$\text{Entrada:} \quad \iint_{S_1} \left\{ \frac{E_0}{\varepsilon_1(\rho, \phi, z)} j\omega \varepsilon_0 H_\phi^c \right\} d\rho d\phi \quad (1.26)$$

$$\text{Saída:} \quad \iint_{S_2} \left\{ -\frac{1}{\varepsilon_2(\rho, \phi, z)} H_\phi^c j\varepsilon_0 k_2 H_\phi \right\} \rho d\rho d\phi \quad (1.27)$$

2.6. Solução da Equação de Onda Homogênea

Como mencionado anteriormente, a utilização da alimentação do Tipo I requer o dimensionamento das portas de entrada e saída de tal forma que seja assegurada a propagação exclusiva do modo TEM. Para a alimentação do Tipo II, essa condição é necessária para a porta 2 de saída. Desta forma é essencial estabelecer as condições de propagação dos modos TM superiores a fim de assegurar que sejam evanescentes nas seções extremas conforme o tipo de alimentação.

Para expressar os campos dos modos TM existentes nas seções de entrada e saída, pode-se utilizar o vetor potencial magnético com uma única componente como mostrado em [12], transformando a equação de onda vetorial em uma equação escalar. Para uma região sem fontes, o vetor potencial magnético \bar{A} deve satisfazer a seguinte equação de onda:

$$\nabla^2 \bar{A} + k^2 \bar{A} = 0 \quad (1.28)$$

onde k é a constante de onda definida por:

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (1.29)$$

Os campos elétrico e magnético, devido ao potencial vetor \bar{A} , podem ser representados pelas equações a seguir:

$$\bar{E}_A = -j\omega \bar{A} - j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) \quad (1.30)$$

$$\bar{H}_A = \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A} \quad (1.31)$$

Como mostrado em [12], as condições de contorno do problema podem ser satisfeitas pela representação do potencial vetor como uma única componente na direção z :

$$\bar{A}(\rho, \phi, z) = \hat{z}\psi(\rho, \phi, z) \quad (1.32)$$

A substituição do vetor \bar{A} de (1.32) na equação de onda (1.28) permite estabelecer a seguinte equação para a função escalar $\psi(\rho, \phi, z)$:

$$\bar{\psi}(\rho, \phi, z) = \hat{z}\psi_z(\rho, \phi, z) \quad (1.33)$$

onde ρ, ϕ e z são as coordenadas cilíndricas conforme a Figura 2.6. Substituindo (1.33) nas equações (1.32) e depois em (1.28), tem-se o seguinte resultado:

$$\nabla^2(\hat{z}\psi_z) = -k^2(\hat{z}\psi_z) \quad (1.34)$$

Através da equação (1.34) pode-se dizer que:

$$\nabla^2\psi\hat{z} = -k^2\psi\hat{z} \quad (1.35)$$

ou,

$$\nabla^2\psi = -k^2\psi \quad (1.36)$$

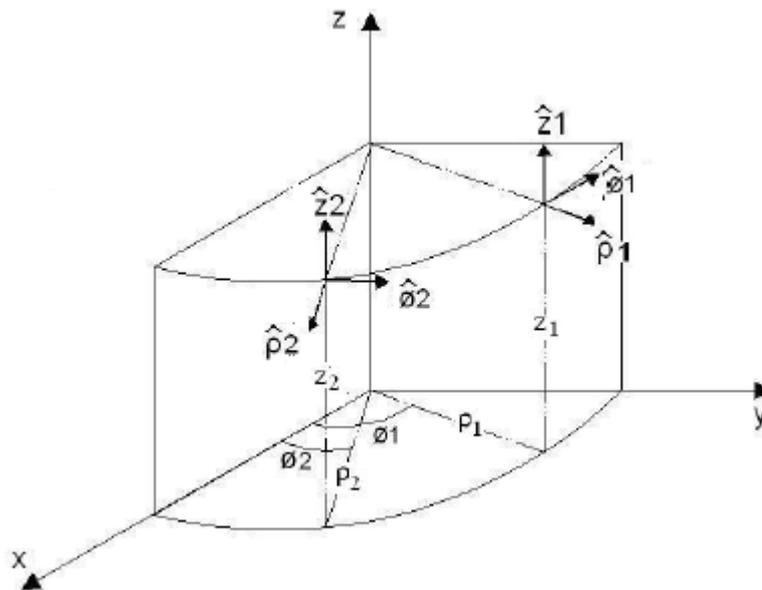


Figura 2.6.: Sistema de coordenadas cilíndricas e vetores unitários correspondentes [11].

Para um guia cilíndrico, a solução pode ser escrita como [9]:

$$\psi(\rho, z) = [A_1 J_m(k_\rho \rho) + B_1 Y_m(k_\rho \rho)] [C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi)] [A_3 e^{-jk_z z} + B_3 e^{+jk_z z}] \quad (1.37)$$

A solução (1.37) encontrada pode ser utilizada para representar as soluções dos potenciais vetores A_z . Substituindo os valores dos vetores potenciais nas equações dos campos elétrico (1.30) e magnético (1.31), podem-se encontrar os valores dos campos, como pode ser visto a seguir [11]:

$$E_\rho = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial \rho \partial z} \quad (1.38)$$

$$E_\phi = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon \rho} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial \phi \partial z} \quad (1.39)$$

$$E_z = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \psi_z \quad (1.40)$$

$$H_\rho = \frac{1}{\mu \rho} \frac{\partial \psi_z}{\partial \phi} \quad (1.41)$$

$$H_\phi = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \psi_z}{\partial \rho} \quad (1.42)$$

$$H_z = 0 \quad (1.43)$$

A seguir serão mostradas as condições para que os modos TEM (Transverse Eletromagnetic Mode) e TM (Transverse Magnetic Mode) se propaguem em uma estrutura cilíndrica coaxial.

2.6.1. Tranverse Eletromagnetic Mode (TEM)

O modo TEM^z possui os campos elétrico e magnético transversais à direção \hat{z} , isto é, $E_z = 0$ e $H_z = 0$. De acordo com [11], esse modo é obtido quando $m = 0$ e $k = k_z$. Logo, a solução dada pela equação (1.37) será a seguinte:

$$\psi_z = \ln(\rho) C_2 [A_3 e^{-jkz} + B_3 e^{+jkz}] \quad (1.44)$$

Considerando que a onda se propaga na direção $+\hat{z}$ é possível simplificar a equação (1.44) da seguinte forma:

$$\psi_z^+ = \ln(\rho) e^{-jkz} \quad (1.45)$$

Para calcular o campo magnético, pode-se utilizar a equação (1.31). Dessa forma:

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A} \quad (1.46)$$

Considerando que o potencial A pode ser representado por ψ_z e substituindo a equação (1.45) em (1.46), tem-se que:

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu\rho} e^{-jkz} \hat{\phi} \quad (1.47)$$

Analisando-se a equação (1.47), pode-se observar que o vetor potencial F deve ser nulo para que a componente do campo magnético na direção \hat{z} seja nula ($H_z = 0$).

$$H_\phi = \frac{1}{\mu\rho} e^{-jkz} \quad (1.48)$$

$$H_\rho = H_z = 0 \quad (1.49)$$

O campo elétrico pode ser calculado através da equação (1.30), fazendo-se $F = 0$. Dessa forma, tem-se que:

$$\bar{E} = -j\omega\bar{A} - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) \quad (1.50)$$

Substituindo a equação (1.45) em (1.50) e fazendo os cálculos vetoriais, tem-se que:

$$\bar{E} = \frac{1}{\omega\mu\epsilon} k \left[\frac{1}{\rho} e^{-jk_z} \hat{\rho} \right] \quad (1.51)$$

Sabendo que $k^2 = \omega^2 \mu\epsilon$ e desenvolvendo a equação (1.51), as componentes do campo elétrico serão:

$$E_\rho = -\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1}{\rho} e^{-jk_z} \quad (1.52)$$

$$E_\phi = E_z = 0 \quad (1.53)$$

2.6.2. Transverse Magnetic Mode (TM)

O modo TM^z possui o campo magnético transversal à direção \hat{z} , isto é, $H_z = 0$. Dessa forma, tem-se o potencial A representado pela equação (1.37), como pode ser visto a seguir:

$$\begin{aligned} \psi_z^+(\rho, \phi, z) = & \left[A_1 J_m(k_\rho \rho) + B_1 Y_m(k_\rho \rho) \right] \\ & \times \left[C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi) \right] A_3 e^{-jk_z z} \end{aligned} \quad (1.54)$$

Os campos eletromagnéticos podem ser calculados através das equações (1.38) a (1.43) ficando da seguinte forma:

$$E_\rho = -\frac{k_\rho k_z}{\omega\mu\epsilon} \left[A_1 J'_m(k_\rho \rho) + B_1 Y'_m(k_\rho \rho) \right] \left[C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi) \right] e^{-jk_z z} \quad (1.55)$$

$$E_\phi = -\frac{mk_z}{\omega\mu\epsilon\rho} \left[A_1 J_m(k_\rho \rho) + B_1 Y_m(k_\rho \rho) \right] \left[-C_2 \sin(m\phi) + D_2 \cos(m\phi) \right] e^{-jk_z z} \quad (1.56)$$

$$E_z = -j \frac{k_\rho^2}{\omega\mu\epsilon} \left[A_1 J_m(k_\rho \rho) + B_1 Y_m(k_\rho \rho) \right] \left[C_2 \cos(m\phi) + D_2 \sin(m\phi) \right] e^{-jk_z z} \quad (1.57)$$

$$H_\rho = -\frac{E_\phi}{\eta^{TM}} \quad (1.58)$$

$$H_\phi = \frac{E_\rho}{\eta^{TM}} \quad (1.59)$$

$$H_z = 0 \quad (1.60)$$

onde $J'_m(x) = \frac{dJ_m}{dx}$, $Y'_m(x) = \frac{dY_m}{dx}$ e $\eta^{TM} = \frac{k_z}{\omega\epsilon}$ é a impedância transversal para o modo TM^z .

As constantes A_1 , B_1 , C_2 , D_2 , m , k_ρ e k_z podem ser calculadas utilizando as seguintes condições de fronteira:

$$E_\phi(\rho = a, \phi, z) = 0 \quad (1.61)$$

$$E_\phi(\rho = b, \phi, z) = 0 \quad (1.62)$$

$$E_z(\rho = a, \phi, z) = 0 \quad (1.63)$$

$$E_z(\rho = b, \phi, z) = 0 \quad (1.64)$$

onde $\rho = a$ e $\rho = b$ representam as paredes da estrutura cilíndrica coaxial. Para que essas condições sejam atendidas, deve-se ter que:

$$f(a) = A_1 J_m(k_\rho a) + B_1 Y_m(k_\rho a) = 0 \quad (1.65)$$

$$f(b) = A_1 J_m(k_\rho b) + B_1 Y_m(k_\rho b) = 0 \quad (1.66)$$

Na equação (1.65) pode-se dizer que:

$$A_1 = -B_1 \frac{Y_m(k_\rho a)}{J_m(k_\rho a)} \quad (1.67)$$

Substituindo (1.67) na equação (1.66), obtém-se:

$$-Y_m(k_\rho a) J_m(k_\rho b) + J_m(k_\rho a) Y_m(k_\rho b) = 0 \quad (1.68)$$

Comparando a equação (1.68) com (1.66), observam-se que para que as igualdades sejam verdadeiras os valores de A_1 e B_1 devem ser:

$$A_1 = -Y_m(k_\rho a) \quad (1.69)$$

$$B_1 = J_m(k_\rho a) \quad (1.70)$$

Além disso, os campos devem ser repetidos a cada 2π radianos em ϕ . Dessa forma, tem-se que:

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.71)$$

A constante k_ρ está relacionada com a constante de propagação k_z da seguinte forma:

$$(k_z)_{mn} = \sqrt{k^2 - k_\rho^2} \quad (1.72)$$

onde $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ e n ($n = 1, 2, 3, \dots$) representa o n -ésimo zero da função de Bessel J_m de primeiro tipo e ordem m ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$).

De acordo com [11], a frequência de onda de corte do modo TM pode ser representada por:

$$(f_c)_{mn} = \frac{k_\rho}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (1.73)$$

Utilizando a equação (1.73), a equação (1.72) de k_z pode ser escrita como:

$$(k_z)_{mn} = k\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad \text{se } f > f_c = (f_c)_{mn} \quad (1.74)$$

$$(k_z)_{mn} = -jk\sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1} \quad \text{se } f < f_c = (f_c)_{mn} \quad (1.75)$$

onde a equação (1.74) representa o modo propagante e a equação (1.75) representa o modo evanescente.

A frequência de corte de onda pode ser definida através dos raios interno (a) e externo (b) da estrutura coaxial cilíndrica. Para isso, devem-se expandir as funções de Bessel assintoticamente para argumentos grandes da seguinte forma:

$$\left. \begin{aligned} J_m(k_\rho \rho) &= \sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho \rho}} \cos\left(k_\rho \rho - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right) \\ Y_m(k_\rho \rho) &= \sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho \rho}} \text{sen}\left(k_\rho \rho - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right) \end{aligned} \right\} k_\rho \rho \rightarrow \infty \quad (1.76)$$

Substituindo as expressões (1.76) na equação(1.68), tem-se que:

$$\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1}{k_\rho ab}} \left[-\text{sen}(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \text{sen}(\beta) \right] = 0 \quad (1.77)$$

onde,

$$\alpha = k_\rho a - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2} \quad (1.78)$$

$$\beta = k_\rho b - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2} \quad (1.79)$$

Utilizando uma propriedade trigonométrica, pode-se reescrever a equação (1.77) da seguinte forma:

$$\text{sen}(\beta - \alpha) = 0 \quad (1.80)$$

Dessa forma, utilizando as expressões (1.78) e (1.79), a equação (1.80) pode ser escrita como:

$$k_\rho (b - a) = l\pi \quad (1.81)$$

onde $l = 1, 2, 3, \dots$

A equação (1.81) pode ser reescrita utilizando-se (1.73), obtendo-se a relação entre os raios da estrutura cilíndrica coaxial e a frequência de onda de corte.

$$b - a = \frac{l\pi}{k_p} = \frac{l}{2f_c\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (1.82)$$

Ou,

$$\frac{a}{b} = 1 - \frac{l}{2bf_c\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (1.83)$$

Para que o modo TM se propague é necessário que $f > f_c$. O valor da frequência de onda de corte (f_c) pode ser obtido através da equação (1.83) como pode ser visto a seguir:

$$f_c = \frac{l}{2b\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 - \frac{a}{b}\right)} < f \quad (1.84)$$

Reorganizando a inequação (1.84) tem-se qual deve ser a relação entre os raios da estrutura para que o modo TM se propague.

$$\frac{a}{b} < 1 - \frac{l}{2bf\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (1.85)$$