



**Rener Pereira de Castro**

**Otimização Estatística de Buscas para  
Estruturas Hierárquicas Espaciais**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada

Orientador : Prof. Geovan Tavares dos Santos  
Co-Orientador: Prof. Thomas Lewiner

Rio de Janeiro  
Março de 2008



**Rener Pereira de Castro**

**Otimização Estatística de Buscas para  
Estruturas Hierárquicas Espaciais**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Geovan Tavares dos Santos**

Orientador  
Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Thomas Lewiner**

Co-Orientador  
Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Jorge Stolfi**

Instituto de Informática — UNICAMP

**Prof. Claudio Esperança**

COPPE — UFRJ

**Prof. Luiz Henrique de Figueiredo**

Laboratório Visgraf — IMPA

**Prof. Waldemar Celes Filho**

Departamento de Informática — PUC-Rio

**Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Sinésio Pesco**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 7 de Março de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Renner Pereira de Castro**

Bacharel em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia–UFU (Uberlândia, Minas Gerais) (2002). Mestre em Matemática pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada–IMPA (Rio de Janeiro, Rio de Janeiro) (2004). Durante o doutorado foi membro do laboratório Matmidia do Departamento de Matemática da PUC–Rio, desenvolvendo projetos científicos patrocinados pela Petrobras. Tem experiência na área de Matemática Aplicada, com ênfase em Computação Gráfica e atualmente suas principais áreas de interesse são: estruturas de dados espaciais, aprendizado estatístico, modelagem geométrica.

#### Ficha Catalográfica

Castro, Renner Pereira de

Otimização Estatística de Buscas para Estruturas Hierárquicas Espaciais / Renner Pereira de Castro; orientador: Geovan Tavares dos Santos; co-orientador: Thomas Lewiner. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2008.

v., 68 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. *2<sup>d</sup>-tree*. 3. Estrutura de Dados Espaciais. 4. *Hash Table*. 5. Modelagem Geométrica. 6. Geometria Computacional. 7. Matemática Discreta. I. Santos, Geovan Tavares dos. II. Lewiner, Thomas. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

## Agradecimentos

Deus, aos meus pais, irmãos, família e que souberam lidar com minha ausência e que sem o apoio deles esse sonho não seria realizado.

À Daniela por sua compreensão, sua paciência, seu amor e por me proporcionar conforto e paz indispensáveis para a realização desse trabalho.

Ao meu orientador Professor Geovan Tavares pelo apoio durante toda a realização desse trabalho.

Ao meu co-orientador Thomas Lewiner pelo incansável incentivo e motivação para a conclusão desse trabalho.

Aos professores Hélio Lopes, Sinésio Pesco e Marcos Craizer os quais compartilharam grandes idéias durante esse tempo.

Aos meus amigos Etereldes (Manjator), Fabiano (Véia Murrinha), Thiago (MochI) e Afonso (Mamba) por proporcionarem boas gargalhadas e muitas descontrações e que ao longo desses anos eles se tornaram a minha outra família.

Aos meus colegas da PUC-Rio, que me fizeram adorar este lugar.

Ao pessoal do Departamento de Matemática, pela ajuda de todos os dias, em particular, à Creuza e ao Otávio.

À CAPES e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

## Resumo

Castro, Renner Pereira de; Santos, Geovan Tavares dos; Lewiner, Thomas. **Otimização Estatística de Buscas para Estruturas Hierárquicas Espaciais**. Rio de Janeiro, 2008. 68p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho surgiu da seguinte observação: os clássicos algoritmos de busca em  $2^d$ -tree começam da raiz para acessar dados armazenados nas folhas. Entretanto, como as folhas são os nós mais distantes da raiz, por que começar as buscas pela raiz? Com representações clássicas de  $2^d$ -trees, não existe outra forma de acessar uma folha. Existem  $2^d$ -trees, porém, que permitem acessar em tempo constante qualquer nó, dado sua posição e seu nível. Para o algoritmo de busca, a posição é conhecida, mas o nível não. Para estimar o nível de um nó qualquer, um método de otimização estatística do custo médio das buscas é proposto. Como os piores custos de busca são obtidos quando se começa da raiz, este método melhora ambos: o consumo de memória pelo uso de  $2^d$ -trees que permitem acessar em tempo constante qualquer nó, e o tempo de execução através da otimização proposta.

## Palavras-chave

$2^d$ -tree. Estrutura de Dados Espaciais. Hash Table. Modelagem Geométrica. Geometria Computacional. Matemática Discreta.

## Abstract

Castro, Rener Pereira de; Santos, Geovan Tavares dos; Lewiner, Thomas. **Statistical Optimization of Spatial Hierarchical Structures Searches**. Rio de Janeiro, 2008. 68p. PhD Thesis — Department of Mathematics, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work emerged from the following observation: usual search procedures for  $2^d$ -trees start from the root to retrieve the data stored at the leaves. But since the leaves are the farthest nodes to the root, why start from the root? With usual  $2^d$ -trees representations, there is no other way to access a leaf. However, there exist  $2^d$ -trees which allow accessing any node in constant time, given its position in space and its depth in the  $2^d$ -tree. Search procedures take the position as an input, but the depth remains unknown. To estimate the depth of an arbitrary node a statistical optimization of the average cost for the search procedures is introduced. Since the highest costs of these algorithms are obtained when starting from the root, this method improves on both, the memory footprint by the use of  $2^d$ -trees which allow accessing any node in constant time, and execution time through the proposed optimization.

## Keywords

$2^d$ -tree. Data Structure. Hash Table. Geometry Modeling. Computational Geometry. Discrete Mathematics.

# Sumário

1	Introdução	9
2	Estruturas Hierárquicas	13
2.1	Decomposição	13
2.2	Representação	17
2.3	Buscas	20
2.4	Indexação	20
2.5	Armazenamento	28
3	Otimização de Buscas	36
3.1	Requisitos para uma $2^d$ - <i>Tree</i> Aberta	36
3.2	Busca com $2^d$ - <i>Tree</i> Abertas	37
3.3	Modelagem das Buscas e Otimização Estatística	40
4	Implementando Eficientemente uma $2^d$ - <i>Tree</i> Aberta	44
4.1	Códigos de Morton	44
4.2	Implementando as Buscas	48
5	Operações Eficientes em Inteiros	51
5.1	Dilatação e Contração	51
5.2	Adição em Inteiros Dilatados	56
5.3	Adição em Códigos de Morton	57
5.4	Chaves Adjacentes	58
6	Resultados	60
6.1	Modelo de Teste	60
6.2	Modelo de Comparação	60
6.3	Modelo de Buscas Diretas	61
6.4	Modelo de Objetos Geométricos	61
7	Conclusão e Trabalhos Futuros	65
	Referências Bibliográficas	66

*Os problemas significativos que enfrentamos  
não podem ser resolvidos no mesmo nível  
de pensamento em que estávamos quando os  
criamos.*

**Albert Einstein.**