

## 4

### Algoritmos Adaptativos para Supressão de Interferência

Um importante campo na pesquisa de receptores cegos adaptativos é o desenvolvimento de algoritmos computacionalmente eficientes. Na literatura de algoritmos adaptativos [60,61,62,63], algoritmos do tipo gradiente estocástico (SG) são soluções simples e de baixa complexidade, porém podem sofrer problemas de velocidade de convergência dependendo do espalhamento dos autovalores da matriz de autocorrelação da observação .

Algoritmos do tipo *Recursive Least Squares* (RLS) apresentam rápida convergência e são independentes do espalhamento dos autovalores da matriz autocorrelação da observação. Estes algoritmos, porém, apresentam um aumento significativo de complexidade quando comparados com algoritmos do tipo SG.

Outro aspecto importante nos métodos de adaptação às cegas é o critério a ser otimizado. Dentre os algoritmos adaptativos cegos presentes na literatura, aqueles baseados no critério de mínima variância (MV) e no critério de módulo constante (CM) apresentaram os resultados mais promissores em termos de convergência e desempenho devido à simplicidade e eficiência para, conjuntamente, otimizar os coeficientes do filtro e o conjunto de restrições.

O critério de mínima variância com restrições (CMV) e seus algoritmos adaptativos do tipo SG e RLS associados foram estudados em supressão de interferência para sistemas DS-CDMA por Xu e Tsatsanis [64]. Resultados a respeito da convergência destes algoritmos também foram apresentados em [64]. A versão com passo normalizado e versões com algoritmos de passo variável foram apresentadas por de Lamare em [65].

Versões adaptativas baseadas no critério de módulo constante com restrições (CCM) foram apresentadas em [52] na versão SG, em [66] na versão SG normalizado. Na versão RLS existem, dentre outros, os trabalhos de [53] e [67].

Os principais trabalhos existentes na literatura para técnicas adaptativas às cegas com restrições ou empregam algoritmos do tipo SG, que são ineficientes no que tange à convergência e valor em estado estacionário ou algoritmos do tipo RLS. São desejáveis, então, algoritmos que apresentem boa

convergência a um custo computacional reduzido. Neste trabalho são propostos algoritmos do tipo *Affine-Projection* (AP) [68] baseados nos critérios CMV e CCM. O algoritmo AP baseia-se no reuso de dados passados para aceleração da convergência. Outras propostas de algoritmos com reuso de dados podem ser encontradas em [69,70,71]. Algoritmos do tipo AP são eficientes e conseguem garantir um compromisso entre convergência e complexidade [60]. Ajustando-se o número de projeções, isto é, o número de reuso de dados, o desempenho dos algoritmos AP podem variar desde o NLMS até o RLS.

Este capítulo inicia com uma revisão dos principais receptores CMV e CCM baseados nos critérios SG e RLS. A seguir, são propostos novos algoritmos AP com restrições, baseados nos critérios de mínima variância e módulo constante. Diferentemente do trabalho desenvolvido e apresentado em [72], os algoritmos nesta tese são válidos para canais multipercurso. Finalmente, o desempenho dos algoritmos CMV-SG, CCM-SG e CMV-AP em estado estacionário é avaliado utilizando a técnica de relação de conservação de energia.

## 4.1

### Algoritmos Adaptativos para Receptores MV

Nesta seção são apresentados algoritmos adaptativos do tipo SG, RLS e AP para receptores baseados no critério de mínima variância

#### 4.1.1

##### Algoritmo SG para canais com um percurso

O algoritmo do tipo gradiente estocástico para canais planos é similar ao desenvolvido por Honig et al. [37] e otimiza a função custo Lagrangeana descrita por:

$$\mathcal{L}_{MV} = \mathbf{w}_k^H \mathbf{r}(i) \mathbf{r}^H(i) \mathbf{w}_k + (\mathbf{w}_k^H \mathbf{p}_k - 1) \lambda \quad (4-1)$$

onde  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange escalar. Escrevendo  $\mathbf{w}_k$  como a soma de uma parcela fixa igual ao código do usuário de interesse  $\mathbf{p}_k$  com uma parcela adaptável  $\mathbf{x}_k$  ortogonal a  $\mathbf{p}_k$ ,

$$\mathbf{x}_k(i+1) = \mathbf{x}_k(i) + \mu z_k^*(i) \mathbf{r}_\perp(i) \quad (4-2)$$

onde  $\mathbf{r}_\perp(i) = \mathbf{r}(i) - \mathbf{p}_k^H \mathbf{r}(i) \mathbf{p}_k$  é a componente de  $\mathbf{r}(i)$  ortogonal a  $\mathbf{p}_k$  e  $z_k(i) = \mathbf{w}_k^H(i) \mathbf{r}(i)$ . Uma versão com passo normalizado de pode ser obtida somando-se  $\mathbf{p}_k$  em ambos os lados de (4-2) e substituindo-se a equação resultante na função custo, isto é, calcula-se o valor a posteriori da função custo [66]. Diferenciando-se a função custo à posteriori com relação a  $\mu$  e igualando a zero, obtém-se

$$\mu = \frac{\mu_0}{\mathbf{r}^H (\mathbf{I}_N - \mathbf{p}_k \mathbf{p}_k^H) \mathbf{r}(i)} \quad (4-3)$$

onde  $\mu_0$  é um fator de convergência fixo.

Para este e para os demais algoritmos normalizados introduzidos nesta seção, os detalhes a respeito da normalização do passo são apresentados no apêndice D.

### 4.1.2

#### Algoritmo SG para canais multipercurso

O algoritmo CMV do tipo gradiente estocástico para canais multipercurso de Xu e Tsatsanis otimiza a função custo Lagrangeana descrita por:

$$\mathcal{L}_{MV} = \mathbf{w}_k^H \mathbf{r}(i) \mathbf{r}^H(i) \mathbf{w}_k + \Re \{ (\mathbf{C}_k^H \mathbf{w}_k - \mathbf{g}) \boldsymbol{\lambda} \} \quad (4-4)$$

onde  $\boldsymbol{\lambda}$  é um vetor com os multiplicadores de Lagrange. Uma solução do tipo gradiente estocástico para (4-4) pode ser obtida calculando-se o gradiente com relação a  $\mathbf{w}_k$  e com relação a  $\mathbf{g}$ . Ao se fazer isto e forçando as restrições em  $\mathbf{w}$  serem  $\mathbf{C}_k^H \mathbf{w}(i+1) = \mathbf{g}(i)$  obtém-se duas recursões para estimação cega destes dois vetores

$$\mathbf{w}_k(i+1) = \boldsymbol{\Pi}_k (\mathbf{w}_k(i) - \mu_w \mathbf{r}(i) \mathbf{r}^H(i) \mathbf{w}_k(i)) + \mathbf{C}_k (\mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k)^{-1} \mathbf{g}(i) \quad (4-5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_k(i+1) &= \mathbf{g}(i) - \frac{\mu_g}{\mu_w} \left( \mathbf{I}_L - \frac{\mathbf{g}(i) \mathbf{g}^H(i)}{\mathbf{g}^H(i) \mathbf{g}(i)} \right) \times \\ &\times (\mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k)^{-1} [\mathbf{C}_k (\mathbf{w}_k(i) - \mu_w \mathbf{r}(i) \mathbf{r}^H(i) \mathbf{w}_k(i)) - \mathbf{g}(i)] \end{aligned} \quad (4-6)$$

onde  $\boldsymbol{\Pi}_k = \mathbf{I}_M - \mathbf{C}_k (\mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k)^{-1} \mathbf{C}_k^H$ .

Uma outra maneira de implementar o receptor é estimar o canal usando outro mecanismo (método das potências, por exemplo) e substituir esta estimativa em (4-5).

Uma versão normalizada para (4-5) pode ser obtida substituindo-se (4-5) em  $J_{MV} = \mathbf{w}^H(i) \mathbf{r}(i) \mathbf{r}^H(i) \mathbf{w}(i)$  obtendo-se assim o valor a posteriori da função custo. O valor do passo que minimiza este valor é  $\mu_w = \frac{\mu_0}{\mathbf{r}^H(i) \boldsymbol{\Pi}_k \mathbf{r}(i)}$ , onde  $\mu_0$  é um fator de convergência escolhido. Detalhes a respeito da normalização do passo são apresentados no apêndice D.

### 4.1.3

#### Algoritmo tipo RLS para canais multipercurso

Dada a expressão para  $\mathbf{w}_k$  em (3-12) aplica-se o algoritmo de [64] que estima a matrizes  $\mathbf{R}^{-1}$  e, por conseguinte,  $(\mathbf{C}_k^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}_k)^{-1}$  de forma recursiva, reduzindo a complexidade computacional. Utilizando o lema de inversão de

matrizes as recursões RLS podem ser escritas como [64]:

$$\mathbf{k}(i) = \frac{\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(i-1)\mathbf{r}(i)}{\alpha + \mathbf{r}^H(i)\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(i-1)\mathbf{r}(i)} \quad (4-7)$$

$$\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(i) = \frac{1}{\alpha} \widehat{\mathbf{R}}^{-1}(i-1) + \frac{1}{\alpha} \mathbf{k}(i)\mathbf{r}^H(i)\widehat{\mathbf{R}}^{-1}(i-1) \quad (4-8)$$

Uma vez que  $\widehat{\mathbf{R}}^{-1}$  é atualizado, forma-se a matriz  $\mathbf{C}_k^H \widehat{\mathbf{R}}^{-1}(i) \mathbf{C}_k$ . O vetor de parâmetros  $\widehat{\mathbf{g}}(i)$  pode ser obtido fazendo-se uma SVD em  $\mathbf{C}_k^H \widehat{\mathbf{R}}^{-1}(i) \mathbf{C}_k$  ou utilizando-se um método iterativo como o descrito no apêndice A. Uma vez encontrado  $\widehat{\mathbf{g}}(i)$ , forma-se o receptor CMV-RLS:

$$\mathbf{w}_k = \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{C}_k (\mathbf{C}_k^H \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{C}_k)^{-1} \widehat{\mathbf{g}}(i) = \lambda_{\min} \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{C}_k \widehat{\mathbf{g}}(i) \quad (4-9)$$

onde  $\lambda_{\min}$  é o autovalor  $\mathbf{C}_k^H \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{C}_k$  ao qual está associado o autovetor  $\widehat{\mathbf{g}}(i)$ .

#### 4.1.4

##### Algoritmo tipo Affine-Projection

Nesta seção é desenvolvido um algoritmo adaptativo cego do tipo affine projection baseado no critério MV.

Definindo um vetor  $\mathbf{e}(i) = \mathbf{U}^H(i) \mathbf{w}_k(i)$ , onde  $\mathbf{U}(i) = [\mathbf{r}(i) \dots \dots \mathbf{r}(i-P+1)]$  é uma matriz  $M \times P$  contendo  $P$  observações. A função custo considerada é a soma das variâncias de saída instantâneas:

$$\begin{aligned} J_{\text{MV}}[\mathbf{w}_k(i)] &= \mathbf{e}^H(i) \mathbf{e}(i) = \sum_{j=0}^{P-1} \left[ \mathbf{w}_k^H(i) \mathbf{r}(i-j) \right]^2 \\ &= \mathbf{w}_k^H(i) \mathbf{U}(i) \mathbf{U}^H(i) \mathbf{w}_k(i). \end{aligned} \quad (4-10)$$

sujeito às restrições:

$$\mathbf{C}_k^H \mathbf{w}_k = \mathbf{g} \quad (4-11)$$

onde  $\mathbf{C}_k$  é uma matriz  $M \times L$ ,  $M \geq L$  e  $\mathbf{g}$  é um vetor  $L \times 1$ .

O Lagrangeano pode ser escrito como:

$$\mathcal{L}_{\text{MV}} = \mathbf{w}_k^H(i) \mathbf{U}(i) \mathbf{U}^H(i) \mathbf{w}_k(i) + \Re \left[ (\mathbf{C}_k^H \mathbf{w}_k - \mathbf{g})^H \boldsymbol{\lambda} \right] \quad (4-12)$$

onde  $\boldsymbol{\lambda}$  é um vetor contendo os multiplicadores de Lagrange e  $\Re(\cdot)$  seleciona a parte real. Tomando o gradiente de (4-12) com respeito a  $\mathbf{w}_k$  obtém-se, ao caminhar no sentido ao vetor gradiente, a seguinte equação de atualização dos vetor de parâmetros do filtro  $\mathbf{w}_k$ :

$$\mathbf{w}_k(i+1) = \mathbf{w}_k(i) - \mathbf{U}(i) \mathbf{e}(i) - \mathbf{C}_k \boldsymbol{\lambda}. \quad (4-13)$$

Novamente, forçando as restrições em  $\mathbf{w}_k$  serem  $\mathbf{C}_k^H \mathbf{w}_k(i+1) = \mathbf{g}(i)$  e resolvendo, obtém-se o vetor dos multiplicadores de Lagrange:

$$\mathbf{C}_k^H \mathbf{w}_k(i) - \mathbf{C}_k^H \mathbf{U}(i) \mathbf{e}(i) - \mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{g}(i) \quad (4-14)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k)^{-1} [\mathbf{C}_k^H \mathbf{w}_k(i) - \mathbf{C}_k^H \mathbf{U}(i) \mathbf{e}(i) - \mathbf{g}(i)]. \quad (4-15)$$

Substituindo (4-15) em (4-13) chega-se à seguinte recursão:

$$\mathbf{w}_k(i+1) = \boldsymbol{\Pi}_k [\mathbf{w}_k(i) - \mathbf{U}(i) \mathbf{e}(i)] + \mathbf{C}_k (\mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k)^{-1} \mathbf{g}(i) \quad (4-16)$$

onde

$$\boldsymbol{\Pi}_k = [\mathbf{I}_M - \mathbf{C}_k (\mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k)^{-1} \mathbf{C}_k^H]. \quad (4-17)$$

Neste caso, o vetor  $\mathbf{g}(i)$  é obtido a partir da estimação do canal obtida por outro mecanismo (método das potências, por exemplo) e colocado em (4-16).

### Normalizando o Passo

De forma a obter uma versão normalizada do algoritmo, é introduzida de forma conveniente em (4-16) uma matriz de passos  $\boldsymbol{\mu}$  de dimensão  $P \times P$ .

$$\mathbf{w}_k(i+1) = \boldsymbol{\Pi} [\mathbf{w}_k(i) - \mathbf{U}(i) \boldsymbol{\mu} \mathbf{e}(i)] + \mathbf{C}_k (\mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k)^{-1} \mathbf{g}(i) \quad (4-18)$$

e propõe-se um passo normalizado baseado na minimização da função custo *a posteriori*.

$$J_{MV}[\mathbf{w}_k(i+1)] = \left\| \mathbf{U}^H(i) \left\{ \boldsymbol{\Pi} [\mathbf{w}_k(i) - \mathbf{U}(i) \boldsymbol{\mu} \mathbf{e}(i)] + \mathbf{C}_k (\mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k)^{-1} \mathbf{g}(i) \right\} \right\|^2. \quad (4-19)$$

Portanto, a matriz de passos ótima é dada por:

$$\boldsymbol{\mu} = \min_{\boldsymbol{\mu}} J_{MV}[\mathbf{w}_k(i+1)]. \quad (4-20)$$

Tomando-se o gradiente com respeito a  $\boldsymbol{\mu}$  e igualando a zero, obtém-se o valor da matriz de passo ótima.

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_0 \left[ \mathbf{U}^H(i) \boldsymbol{\Pi}_k \mathbf{U}(i) \right]^{-1}, \quad (4-21)$$

onde  $\mu_0$  é uma constante. Note que para o caso particular  $P = 1$  os resultados tornam-se idênticos aos obtidos em [65].

A fim de se evitar problemas numéricos na inversão da matriz  $[\mathbf{U}^H(i) \boldsymbol{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]$ , costuma-se introduzir um fator de regularização  $\epsilon \mathbf{I}_P$ , onde

$\epsilon \ll 1$ . Logo, a expressão do passo normalizado é dada por:

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_0 \left[ \epsilon \mathbf{I}_P + \mathbf{U}^H(i) \boldsymbol{\Pi}_k \mathbf{U}(i) \right]^{-1}. \quad (4-22)$$

## 4.2

### Algoritmos Adaptativos para Receptores CM

Nesta seção são apresentados algoritmos adaptativos do tipo SG, RLS e AP para receptores baseados no critério de módulo constante.

#### 4.2.1

##### Algoritmo SG para canais multipercurso

Considerando a seguinte função custo

$$J_{CM} = (|z_k|^2 - 1)^2 + 2\Re \left[ (\mathbf{C}_k^H \mathbf{w}_k(i) - \mathbf{h}_k(i))^H \boldsymbol{\lambda} \right] \quad (4-23)$$

onde  $z_k(i) = \mathbf{w}_k^H(i) \mathbf{r}(i)$  é  $\boldsymbol{\lambda}$  um vetor de multiplicadores de Lagrange. Uma solução SG para (3-25) pode ser obtida tomando-se o gradiente com respeito a  $\mathbf{w}_k(i)$  o que leva a seguinte expressão:

$$\mathbf{w}_k(i+1) = \boldsymbol{\Pi}_k (\mathbf{w}_k(i) - \mu_w e_k(i) z_k^*(i)) + \mathbf{C}_k (\mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k)^{-1} \mathbf{h}_k(i) \quad (4-24)$$

onde  $e_k = (|z_k(i)|^2 - 1)$ ,  $\boldsymbol{\Pi}_k = \mathbf{I}_M - \mathbf{C}_k (\mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k)^{-1} \mathbf{C}_k^H$ . A versão normalizada do algoritmo [66] foi adotada de forma a facilitar a escolha do passo, garantindo estabilidade. O passo utilizado pelo algoritmo é  $\mu_w = \frac{\mu_{0w} (|z_k(i)|+1)}{|z_k(i)| e_k(i) \mathbf{r}^H(i) \boldsymbol{\Pi}_k \mathbf{r}(i)}$ , onde  $\mu_{0w}$  é um fator de convergência. Para estimar o canal evitando fazer uma SVD em  $\mathbf{C}_k^H \mathbf{R}_k^{-1}(i) \mathbf{C}_k$ , são calculadas as estimativas de  $\widehat{\mathbf{W}}_k(i) = \mathbf{C}_k^H \widehat{\mathbf{V}}_k(i)$ , onde  $\widehat{\mathbf{V}}_k(i)$  é uma estimativa da matriz  $\mathbf{R}_k^{-1}(i) \mathbf{C}_k$  e seguindo a recursão:

$$\widehat{\mathbf{V}}_k(i) = \alpha \widehat{\mathbf{V}}_k(i-1) + \mu_g \left( \widehat{\mathbf{V}}_k(i-1) - \mathbf{r}(i) \mathbf{r}^H(i) \widehat{\mathbf{V}}_k(i-1) \right) \quad (4-25)$$

onde  $\widehat{\mathbf{V}}_k(0) = \mathbf{C}_k$  e  $0 < \alpha < 1$ . Para estimar o canal, uma variante do método das potências [58] é usada:

$$\hat{\mathbf{h}}_k(i) = (\mathbf{I}_L - \gamma(i) \widehat{\mathbf{W}}_k(i)) \hat{\mathbf{h}}_k(i-1) \quad (4-26)$$

onde  $\gamma(i) = 1/\text{tr}[\widehat{\mathbf{W}}_k(i)]$ ,  $\text{tr}[\cdot]$  representa o traço da matriz. Finalmente, a estimativa obtida é normalizada,  $\hat{\mathbf{h}}_k(i) = \hat{\mathbf{h}}_k(i)/\|\hat{\mathbf{h}}_k(i)\|$ , de forma a se ter  $\|\hat{\mathbf{h}}_k(i)\| = 1$ .

### 4.2.2

#### Algoritmo tipo RLS para canais multipercurso

Dada a expressão para  $\mathbf{w}_k$  em (3-26) aplica-se o algoritmo de [53] que estima as matrizes  $\mathbf{R}_k^{-1}$  e  $(\mathbf{C}_k^H \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k)^{-1}$  de forma recursiva, reduzindo a complexidade computacional. Utilizando o lema de inversão de matrizes as recursões RLS podem ser escritas como:

$$\mathbf{G}_k(i) = \frac{\alpha^{-1} \hat{\mathbf{R}}_k^{-1}(i-1) z_k(i) \mathbf{r}(i)}{1 + \alpha^{-1} \mathbf{r}^H(i) z_k(i) \hat{\mathbf{R}}_k^{-1}(i-1) z_k^*(i) \mathbf{r}(i)} \quad (4-27)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_k^{-1}(i) = \alpha^{-1} \hat{\mathbf{R}}_k^{-1}(i-1) - \alpha^{-1} \mathbf{G}_k(i) z_k^*(i) \mathbf{r}^H(i) \hat{\mathbf{R}}_k^{-1}(i-1) \quad (4-28)$$

onde  $\mathbf{G}_k$  é o vetor de ganho de Kalman, de dimensão  $M \times 1$ ,  $\hat{\mathbf{R}}_k$  é uma estimativa da matriz  $\mathbf{R}_k$  e  $0 < \alpha < 1$  é um fator de esquecimento. A cada símbolo processado, a matriz  $\hat{\mathbf{R}}_k^{-1}(i)$  é atualizada e uma outra recursão é empregada para estimar  $(\mathbf{C}_k^H \mathbf{R}_k^{-1}(i) \mathbf{C}_k)^{-1}$ :

$$\mathbf{\Gamma}_k^{-1}(i) = \frac{\mathbf{\Gamma}_k^{-1}(i-1)}{1 - \alpha} - \frac{\mathbf{\Gamma}_k^{-1}(i-1) \boldsymbol{\gamma}_k(i) \boldsymbol{\gamma}_k^H(i) \mathbf{\Gamma}_k^{-1}(i-1)}{\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} + (1-\alpha) \boldsymbol{\gamma}_k^H(i) \mathbf{\Gamma}_k^{-1}(i) \boldsymbol{\gamma}_k(i)} \quad (4-29)$$

onde  $\mathbf{\Gamma}_k(i)$  é uma estimativa de  $(\mathbf{C}_k^H \mathbf{R}_k^{-1}(i) \mathbf{C}_k)$  e  $\boldsymbol{\gamma}_k(i) = \mathbf{C}_k^H \mathbf{r}(i) z_k(i)$ . Novamente, para estimar o canal e evitar o SVD em  $\mathbf{C}_k^H \mathbf{R}_k^{-1}(i) \mathbf{C}_k$ , calcula-se a estimativa  $\mathbf{\Gamma}_k(i)$  of  $\mathbf{C}_k^H \mathbf{R}_k^{-1}(i) \mathbf{C}_k$  e emprega-se uma variação do método das potências [58]:

$$\hat{\mathbf{h}}_k(i) = (\mathbf{I}_L - \gamma(i) \mathbf{\Gamma}_k(i)) \hat{\mathbf{h}}_k(i-1) \quad (4-30)$$

onde  $\gamma(i) = 1/\text{tr}[\mathbf{\Gamma}_k(i)]$ ,  $\text{tr}[\cdot]$  representa o traço da matriz, e  $\hat{\mathbf{h}}_k(i) = \hat{\mathbf{h}}_k(i)/\|\hat{\mathbf{h}}_k(i)\|$  de forma a normalizar a estimativa. O receptor CCM-RLS então é dado por:

$$\hat{\mathbf{w}}_k(i) = \hat{\mathbf{R}}_k^{-1}(i) \left[ \hat{\mathbf{d}}_k(i) - \mathbf{C}_k \mathbf{\Gamma}_k^{-1}(i) \left( \mathbf{C}_k^H \hat{\mathbf{R}}_k^{-1}(i) \hat{\mathbf{d}}_k(i) - \nu \hat{\mathbf{h}}_k(i) \right) \right] \quad (4-31)$$

onde  $\hat{\mathbf{d}}_k(i+1) = \alpha \hat{\mathbf{d}}_k(i) + (1-\alpha) z_k^*(i) \mathbf{r}(i)$  corresponde a uma estimativa de  $\mathbf{d}_k(i)$ . Em termos de complexidade computacional, o algoritmo CCM-RLS requer  $O(M^2)$  para suprimir a IMA e a IES e  $O(L^2)$  para estimar o canal, contra  $O(M^3)$  e  $O(L^3)$  requeridos por (3-26) e (3-27) respectivamente.

### 4.2.3

#### Algoritmo tipo Affine-Projection

Nesta seção é desenvolvido um algoritmo adaptativo cego do tipo affine projection baseado no critério CM.

Para o critério CM, a  $j$ -ésima componente do vetor erro  $\mathbf{e}(i)$ , de tamanho  $P \times 1$ , é dada por  $e_j(i) = |\mathbf{w}^H(i) \mathbf{r}(i-j)|^2 - 1$ . Da mesma maneira que na seção

anterior, a função custo considerada é a soma do quadrado dos erros.

$$J_{\text{CM}}[\mathbf{w}_k(i)] = \mathbf{e}^H(i)\mathbf{e}(i) = \sum_{j=0}^{P-1} [|\mathbf{w}^H(i)\mathbf{r}(i-j)|^2 - 1]^2. \quad (4-32)$$

sujeito às restrições:

$$\mathbf{C}_k^H \mathbf{w}_k = \mathbf{g} \quad (4-33)$$

onde, novamente,  $\mathbf{C}_k$  é uma matriz  $M \times L$ ,  $M \geq L$  e  $\mathbf{g}$  é um vetor  $L \times 1$ .

O Lagrangeano é dado por:

$$\mathcal{L}_{\text{CM}} = \sum_{j=0}^{P-1} [|\mathbf{w}^H(i)\mathbf{r}(i-j)|^2 - 1]^2 + \Re [(\mathbf{C}_k^H \mathbf{w}_k - \nu \mathbf{g})^H \boldsymbol{\lambda}] \quad (4-34)$$

onde  $\nu$  é uma constante de forma a assegurar a convexidade da função CM. Definindo  $z_{k,j}(i) = \mathbf{w}_k^H(i)\mathbf{r}(i-j)$  e  $e_j(i) = |z_{k,j}(i)|^2 - 1$ , substituindo em (4-34) e tomando-se o gradiente com relação ao vetor de coeficientes do filtro, chega-se a seguinte recursão:

$$\mathbf{w}_k(i+1) = \mathbf{w}_k(i) + \sum_{j=0}^{P-1} e_j(i) z_{k,j}^*(i) \mathbf{r}(i-j) - \mathbf{C}_k \boldsymbol{\lambda}. \quad (4-35)$$

Após aplicar as restrições e solucionar o sistema de equações para obter os multiplicadores de Lagrange, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k(i+1) &= \boldsymbol{\Pi}_k \left[ \mathbf{w}_k(i) - \sum_{j=0}^{P-1} e_j(i) z_{k,j}^*(i) \mathbf{r}(i-j) \right] + \\ &+ \mathbf{C}_k (\mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k)^{-1} \nu \mathbf{g}(i) \end{aligned} \quad (4-36)$$

que pode ser escrita de forma compacta como:

$$\mathbf{w}_k(i+1) = \boldsymbol{\Pi}_k \left[ \mathbf{w}_k(i) - \mathbf{U}(i) \mathbf{Z}(i) \mathbf{e}(i) \right] + \mathbf{C}_k (\mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k)^{-1} \nu \mathbf{g}(i) \quad (4-37)$$

onde  $\mathbf{Z}(i) = \text{diag} [z_{k,0}^*(i), \dots, z_{k,P-1}^*(i)]$  é uma matriz diagonal  $P \times P$ ,  $\mathbf{e}(i)$  é o vetor erro e  $\boldsymbol{\Pi}_k$  é dado por (4-17).

### Normalizando o Passo

A obtenção de um passo normalizado no caso do algoritmo CCM-AP é muito difícil uma vez que não se consegue separar o gradiente da função custo a posteriori da mesma maneira feita para a versão SG do algoritmo (vide apêndice D). A proposta de matriz de passo adotada neste trabalho é:

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_0 \mathbf{M} \left[ \mathbf{U}^H(i) \boldsymbol{\Pi}_k \mathbf{U}(i) \right]^{-1} \quad (4-38)$$

onde  $\mathbf{M} = \text{diag} \left( \frac{1}{|z_0(i)|(|z_0(i)|-1)}, \dots, \frac{1}{|z_{P-1}(i)|(|z_{P-1}(i)|-1)} \right)$  é uma matriz diagonal  $P \times P$  e  $\mu_0$  é uma constante. Da mesma forma que no algoritmo CMV-AP, pode-se introduzir um termo de regularização  $\epsilon \mathbf{I}_P$  no passo normalizado.

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_0 \mathbf{M} \left[ \epsilon \mathbf{I}_P + \mathbf{U}^H(i) \boldsymbol{\Pi}_k \mathbf{U}(i) \right]^{-1} \quad (4-39)$$

### 4.3

#### Análise dos Algoritmos em Estado Estacionário

O desempenho de um filtro adaptativo é medido geralmente em termos de seu comportamento de transitório e pelo seu comportamento em estado estacionário [60, 61, 62, 63].

A abordagem predominante para obtenção do desempenho em estado estacionário consiste em fazer o caso limite do transitório. O resultado disto é que para se conhecer o comportamento em estado estacionário de um filtro adaptativo é necessário analisar o comportamento transitório deste. A análise do transitório de um filtro adaptativo tende a ser trabalhosa, especialmente no caso de algoritmos com recursões não lineares. O desempenho do transitório depende de quantidades como a matriz covariância do vetor erro dos coeficientes do filtro, isto é, o vetor definido por:  $\tilde{\mathbf{w}}(i) = \mathbf{w}_{opt} - \mathbf{w}(i)$ , onde  $\mathbf{w}_{opt}$  é o valor ótimo do filtro. Este procedimento pode ser tornar extremamente complexo para alguns algoritmos e geralmente requerem suposições muito restritivas (hipótese de independência das componentes do sinal recebido, por exemplo), o que torna os resultados em estado estacionário resultantes desta abordagem muito limitados.

Uma das quantidades analisadas no desempenho em estado estacionário de um filtro adaptativo é o erro médio quadrático em excesso que, em sistemas CDMA, é decorrente da IMA, da interferência entre símbolos, do ruído e da própria natureza estocástica do algoritmo de adaptação empregado. O erro médio quadrático em excesso relaciona-se com o vetor erro dos coeficientes do filtro  $\tilde{\mathbf{w}}(i)$  através do chamado *erro de estimação à priori*, que é definido por:

$$e_a(i) \triangleq \tilde{\mathbf{w}}(i)^H \mathbf{r}(i) \quad (4-40)$$

O erro médio quadrático em excesso quando o sistema encontra-se em estado estacionário é definido por:

$$\xi_{exc} = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{E} [ |e_a(i)|^2 ] \quad (4-41)$$

A relação de conservação de energia foi estudada inicialmente por Rupp e Sayed [73, 74] em um contexto de análise de robustez e estabilidade de filtros

adaptativos. Posteriormente passou a ser aplicada na análise de transitório, estado estacionário, rastreamento para uma gama de algoritmos adaptativos, assim como a análise de filtros adaptativos com coeficientes quantizados [62, 75, 76, 77].

Nesta seção são analisados os comportamentos em estado estacionário dos algoritmos CMV-SG, CMV-AP e CCM-SG. Devido à escassez de tempo, nesta versão do texto aparecerão apenas os resultados finais.

### 4.3.1

#### Algoritmo CMV SG

Considera-se, que o canal de comunicações  $\mathbf{g}$  foi estimado antes do filtro entrar em operação. Também vai ser considerado nesta seção que o canal é invariante no tempo e, portanto, a estimativa de canal obtida inicialmente não vai ser atualizada junto com o vetor de parâmetros do filtro  $\mathbf{w}(i)$ . Forçando a condição inicial a cumprir a restrição  $\mathbf{C}_k^H \mathbf{w} = \mathbf{g}$ , tem-se que:

$$\mathbf{w}(i) = \mathbf{\Pi}_k \mathbf{w}(i) + \mathbf{C}_k (\mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k)^{-1} \mathbf{g} \quad (4-42)$$

logo (4-5) pode ser reescrita como

$$\mathbf{w}_k(i+1) = \mathbf{w}_k(i) - \mu_w \mathbf{\Pi}_k \mathbf{r}(i) e_k^*(i) \quad (4-43)$$

onde  $e_k^*(i) = \mathbf{r}^H \mathbf{w}_k(i)$ .

A recursão (4-43) está na forma geral de atualização se um algoritmo SG [75]. Partindo de (4-43), seguindo os passos e usando definições análogas ao caso do algoritmo LMS estudado em [75], o desempenho em estado estacionário do algoritmo CMV-SG é obtido.

Primeiro definem-se os erros ponderados a priori e a posteriori

$$e_p^{\mathbf{\Pi}_k}(i) = \tilde{\mathbf{w}}^H(i+1) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{r} \quad e_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i) = \tilde{\mathbf{w}}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{r} \quad (4-44)$$

pode-se mostrar que:

$$e_p^{\mathbf{\Pi}_k}(i) = e_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i) - \mu \|\mathbf{r}(i)\|_{\mathbf{\Pi}_k}^2 e(i) \quad (4-45)$$

onde  $\|\mathbf{r}(i)\|_{\mathbf{\Pi}}^2 = \mathbf{r}(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{r}^H(i)$ . Seguindo os passos de [75], chega-se a seguinte relação de energia

$$\|\mathbf{w}(i+1)\|^2 + \frac{1}{\|\mathbf{r}(i)\|_{\mathbf{\Pi}_k}^2} |e_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i)|^2 = \|\mathbf{w}_k(i)\|^2 + \frac{1}{\|\mathbf{r}(i)\|_{\mathbf{\Pi}_k}^2} |e_p^{\mathbf{\Pi}_k}(i)|^2 \quad (4-46)$$

Tirando o valor esperado dos dois lados de (4-46) e fazendo  $i \rightarrow \infty$  (condição de estado estacionário), tem-se que  $\mathbf{E} [\|\mathbf{w}(i+1)\|^2] = \mathbf{E} [\|\mathbf{w}(i)\|^2]$ . Substituindo  $e_p^{\mathbf{\Pi}_k}(i)$  pela sua expressão em (4-45) e escrevendo  $e(i) = e_a(i) = y(i)$ , onde  $y(i) = \mathbf{w}_{opt}^H \mathbf{r}(i)$ , chega-se a seguinte igualdade:

$$\mu_w \mathbf{E} [\|\mathbf{r}(i)\|_{\mathbf{\Pi}_k}^2 |e_a(i)|^2] + \mu_w \xi_{min} \text{tr} [\mathbf{\Pi}_k \mathbf{R}] = 2 \underbrace{\mathbf{E} [|e_a(i)|^2]}_{\xi_{exc}^{CMV-SG}} \quad (4-47)$$

onde  $\xi_{min} = \mathbf{E} [|y(i)|^2]$ , que é o valor ótimo da variância de saída. Supondo que no estado estacionário  $\|\mathbf{r}(i)\|_{\mathbf{\Pi}_k}^2$  e  $e_a(i)$  sejam estatisticamente independentes, pode-se aproximar o erro médio quadrático em excesso para o algoritmo CMV-SG por:

$$\xi_{exc}^{CMV-SG} = \frac{\mu_0 \xi_{min} \text{tr} [\mathbf{\Pi}_k \mathbf{R}]}{2 - \mu \text{tr} [\mathbf{\Pi}_k \mathbf{R}]} \quad (4-48)$$

Este resultado encontra-se em concordância com o resultado obtido em [64], porém foi obtido de forma bem menos trabalhosa. É interessante notar também que se for suposto canal plano o resultado em (4-48) concorda com o resultado obtido por Honig et al. [37] abaixo:

$$\xi^{MOE} = \frac{\mu \xi_{min} \text{tr} [\mathbf{R}_v]}{2 - \mu \text{tr} [\mathbf{R}_v]} \quad (4-49)$$

onde  $\mathbf{R}_v = (\mathbf{I}_N - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_1^H) \mathbf{R}$ , o que corresponde ao produto  $\mathbf{\Pi}_k \mathbf{R}$  no caso de canal plano.

### 4.3.2

#### Algoritmo CMV Affine-Projection

Nesta seção analisa-se o comportamento do algoritmo CMV-AP em termos do erro médio quadrático em excesso para o estado estacionário. Da mesma maneira que os receptores CMV-SG, os receptores AP também possuem recursões não lineares, o que torna trabalhoso o estudo de seu desempenho e convergência. O desempenho de algoritmos tipo AP foi amplamente analisado na literatura [78, 79]. Para o caso de algoritmos AP com restrições, o trabalho de Werner et al. Em [71] são propostos e analisados algoritmos AP com restrições. A abordagem de conservação de energia para algoritmos AP foi inicialmente proposta em [76]. O desempenho de sisemas DS-CDMA usando a formulação desenvolvida em [76] foi apresentado em [72]. Relembrando a equação de atualização para o algoritmo CMV-AP

$$\mathbf{w}(i+1) = \mathbf{\Pi}_k [\mathbf{w}_k(i) - \mathbf{U}(i) \boldsymbol{\mu} \mathbf{e}(i)] + \mathbf{C}_k (\mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k)^{-1} \mathbf{g} \quad (4-50)$$

onde  $\epsilon$  é o fator de regularização. Reescrevendo a recursão de atualização em termos do passo matricial  $\boldsymbol{\mu} = \mu_0 [\epsilon \mathbf{I}_P + \mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]^{-1}$  tem-se

$$\mathbf{w}_k(i+1) = \mathbf{w}_k(i) - \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i) \boldsymbol{\mu} \mathbf{e}(i) \quad (4-51)$$

Repetindo o procedimento para o caso CMV-SG, definem-se vetores de erro a priori e a posteriori

$$\mathbf{e}_p^{\mathbf{\Pi}_k}(i) = \mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \tilde{\mathbf{w}}_k(i) \quad \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i) = \mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \tilde{\mathbf{w}}_k(i-1) \quad (4-52)$$

E obtem-se portanto a relação entre  $\mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i)$  e  $\mathbf{e}_p^{\mathbf{\Pi}_k}(i)$ :

$$\mathbf{e}_p^{\mathbf{\Pi}_k}(i) = \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i) - \mu_0 \mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i) [\epsilon \mathbf{I}_P + \mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]^{-1} \mathbf{e}(i) \quad (4-53)$$

O passo a seguir visa deixar a recursão de atualização como função apenas dos erros a priori e a posteriori

$$[\epsilon \mathbf{I}_P + \mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]^{-1} \mathbf{e}(i) = \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]^{-1} (\mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i) - \mathbf{e}_p^{\mathbf{\Pi}_k}(i)) \quad (4-54)$$

Substituindo na equação de atualização dos pesos e rearranjando os termos:

$$\tilde{\mathbf{w}}_k(i) = \tilde{\mathbf{w}}_k(i-1) + \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i) [\mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]^{-1} (\mathbf{e}_p^{\mathbf{\Pi}_k}(i) - \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i)) \quad (4-55)$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_k(i) + \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i) [\mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]^{-1} \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i) = \tilde{\mathbf{w}}_k(i-1) + \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i) [\mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]^{-1} \mathbf{e}_p^{\mathbf{\Pi}_k}(i) \quad (4-56)$$

Calculando a energia dos dois lados da equação, a seguinte igualdade é obtida:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{w}}_k(i)\|^2 + \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k H}(i) [\mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]^{-1} \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i) &= \\ \|\tilde{\mathbf{w}}_k(i-1)\|^2 + \mathbf{e}_p^{\mathbf{\Pi}_k H}(i) [\mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]^{-1} \mathbf{e}_p^{\mathbf{\Pi}_k}(i) & \end{aligned} \quad (4-57)$$

Tirando o valor esperado dos dois lados:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \|\tilde{\mathbf{w}}_k(i)\|^2 + \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k H}(i) [\mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]^{-1} \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i) \right] &= \\ \mathbb{E} \left[ \|\tilde{\mathbf{w}}_k(i-1)\|^2 + \mathbf{e}_p^{\mathbf{\Pi}_k H}(i) [\mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]^{-1} \mathbf{e}_p^{\mathbf{\Pi}_k}(i) \right] & \end{aligned} \quad (4-58)$$

e lembrando que em estado estacionário  $\mathbb{E} [\|\tilde{\mathbf{w}}_k(i)\|^2] = \mathbb{E} [\|\tilde{\mathbf{w}}_k(i-1)\|^2]$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k H}(i) [\mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]^{-1} \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i) \right] = \mathbb{E} \left[ \mathbf{e}_p^{\mathbf{\Pi}_k H}(i) [\mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]^{-1} \mathbf{e}_p^{\mathbf{\Pi}_k}(i) \right] \quad (4-59)$$

Analisando o lado direito:

$$\mathbb{E} \left[ \mathbf{e}_p^H(i) [\mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]^{-1} \mathbf{e}_p(i) \right] \quad (4-60)$$

Como  $\mathbf{e}_p^{\mathbf{\Pi}_k}(i) = \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i) + \mu_0 \mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i) [\epsilon \mathbf{I}_P + \mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]^{-1} \mathbf{e}(i)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \mathbf{e}_p^{\mathbf{\Pi}_k H}(i) [\mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]^{-1} \mathbf{e}_p^{\mathbf{\Pi}_k}(i) \right] &= \mathbb{E} \left[ \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k H}(i) [\mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]^{-1} \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i) \right] - \\ &- \mu \mathbb{E} \left[ \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k H}(i) \mathbf{B}(i) \mathbf{e}(i) \right] + \\ &- \mu \mathbb{E} \left[ \mathbf{e}^H(i) \mathbf{B}(i) \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i) \right] + \\ &+ \mu^2 \mathbb{E} \left[ \mathbf{e}^H(i) \mathbf{A}(i) \mathbf{e}(i) \right] \end{aligned} \quad (4-61)$$

onde:

$$\mathbf{A}(i) = [\epsilon \mathbf{I}_P + \mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]^{-1} \mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i) [\epsilon \mathbf{I}_P + \mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]^{-1} \quad (4-62)$$

$$\mathbf{B}(i) = [\epsilon \mathbf{I}_P + \mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \mathbf{U}(i)]^{-1} \quad (4-63)$$

Logo:

$$\mu_0 \mathbf{E} [\mathbf{e}^H(i) \mathbf{A}(i) \mathbf{e}(i)] = \mathbf{E} [\mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k H}(i) \mathbf{B}(i) \mathbf{e}(i)] + \mathbf{E} [\mathbf{e}^H(i) \mathbf{B}(i) \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i)] \quad (4-64)$$

Usando o fato que  $\mathbf{e}(i) = \mathbf{e}_a(i) + \mathbf{y}(i)$ , onde  $\mathbf{y}(i) = \mathbf{U}^H(i) \mathbf{w}_{opt}$ , a expressão acima é reescrita como:

$$\mu_0 \mathbf{E} [\mathbf{e}_a^H(i) \mathbf{A}(i) \mathbf{e}_a(i)] + \mu_0 \mathbf{E} [\mathbf{y}^H(i) \mathbf{A}(i) \mathbf{y}(i)] = \mathbf{E} [\mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k H}(i) \mathbf{B}(i) \mathbf{e}_a(i)] + \mathbf{E} [\mathbf{e}_a^H(i) \mathbf{B}(i) \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i)] \quad (4-65)$$

Analisando  $\mathbf{E} [\mathbf{e}_a^H(i) \mathbf{A}(i) \mathbf{e}_a(i)]$ :

$$\mathbf{E} [\mathbf{e}_a^H(i) \mathbf{A}(i) \mathbf{e}_a(i)] = \text{tr} [\mathbf{E} [\mathbf{e}_a(i) \mathbf{e}_a^H(i) \mathbf{A}(i)]] \quad (4-66)$$

$$= \text{tr} [\mathbf{E} [\mathbf{e}_a(i) \mathbf{e}_a^H(i)] \mathbf{E} [\mathbf{A}(i)]] \quad (4-67)$$

A segunda igualdade assume independência entre  $\mathbf{e}_a(i)$  e  $\mathbf{U}(i)$  no estado estacionário. Seguindo passos análogos aos da análise em [76] pode-se mostrar que

$$\mathbf{E} [\mathbf{e}_a(i) \mathbf{e}_a^H(i)] = \mathbf{E} [|\mathbf{e}_a(i)|^2] \mathbf{S}_1 + \mu^2 \xi_{min} \mathbf{S}_2 \quad (4-68)$$

onde:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & (1 - \mu)^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (1 - \mu)^{2(P-1)} \end{bmatrix} \quad (4-69)$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 + \dots + (1 - \mu)^{2P} \end{bmatrix} \quad (4-70)$$

As seguintes aproximações podem ser feitas:

- Para  $\mu$  muito pequeno,  $\mathbf{S}_1 \approx \mathbf{I}_P$  e  $\mu^2 \sigma_v^2 \mathbf{S}_2 \approx \mathbf{0}$ .
- Para  $\mu$  perto de 1,  $\mathbf{S}_1 \approx \mathbf{J}_P^{1,1}$  e  $\mu^2 \sigma_v^2 \mathbf{S}_2 \approx \mathbf{0}$ .

$\mathbf{J}_P^{i,j}$  é uma matriz  $P \times P$  cuja única entrada não nula é 1 e se localiza na posição  $(i, j)$ .

Da mesma maneira que no caso sem restrições [76]

$$\mu_0 \mathbf{E} [\mathbf{e}_a^H(i) \mathbf{A}(i) \mathbf{e}_a(i)] = \mu_0 \mathbf{E} [|\mathbf{e}_a(i)|^2] \text{tr} [\mathbf{S}_1 \mathbf{E} [\mathbf{A}(i)]] \quad (4-71)$$

O segundo termo também é obtido de forma análoga:

$$\mu_0 \mathbf{E} [\mathbf{y}^H(i) \mathbf{A}(i) \mathbf{y}(i)] = \text{tr} [\mathbf{E} [\mathbf{y}(i) \mathbf{y}^H(i) \mathbf{A}(i)]] \quad (4-72)$$

$$= \mu_0 \xi_{min} \text{tr} [\mathbf{E} [\mathbf{A}(i)]] \quad (4-73)$$

Analisando os termos

$$\mathbb{E} \left[ \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k^H}(i) \mathbf{B}(i) \mathbf{e}_a(i) \right] = \mathbb{E} \left[ \mathbf{e}_a^H(i) \mathbf{B}(i) \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i) \right] \quad (4-74)$$

Da definição de  $\mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i)$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i) &= \mathbf{U}^H(i) \mathbf{\Pi}_k \tilde{\mathbf{w}}(i) \\ &= \mathbf{U}^H(i) [\mathbf{I}_M - \mathbf{C}_k (\mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k)^{-1} \mathbf{C}_k^H] \tilde{\mathbf{w}}(i) \\ &= \mathbf{U}^H(i) \tilde{\mathbf{w}}(i) \quad \text{já que } \mathbf{C}_k^H \tilde{\mathbf{w}}(i) = \mathbf{0} \\ &= \mathbf{e}_a(i) \end{aligned} \quad (4-75)$$

$$\mathbb{E} \left[ \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k^H}(i) \mathbf{B}(i) \mathbf{e}_a(i) \right] + \mathbb{E} \left[ \mathbf{e}_a^H(i) \mathbf{B}(i) \mathbf{e}_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i) \right] = 2\mathbb{E} [|e_a(i)|^2] \text{tr} [\mathbf{S}_1 \mathbb{E} [\mathbf{B}(i)]] \quad (4-76)$$

$$\mu_0 \mathbb{E} [|e_a(i)|^2] \text{tr} [\mathbf{S}_1 \mathbb{E} [\mathbf{A}(i)]] + \mu_0 \xi_{min} \text{tr} [\mathbb{E} [\mathbf{A}(i)]] = 2\mathbb{E} [|e_a(i)|^2] \text{tr} [\mathbf{S}_1 \mathbb{E} [\mathbf{B}(i)]] \quad (4-77)$$

Denotando  $\beta = \text{tr} [\mathbf{S}_1 \mathbb{E} [\mathbf{A}(i)]]$  e  $\eta = \text{tr} [\mathbf{S}_1 \mathbb{E} [\mathbf{B}(i)]]$  lembrando que o erro em excesso em estado estacionário  $\xi_{exc}^{\text{CMV-AP}} = \mathbb{E} [|e_a(i)|^2]$  tem-se:

$$\mu_0 \xi_{exc}^{\text{CMV-AP}} \beta + \mu_0 \xi_{min} \text{tr} [\mathbb{E} [\mathbf{A}(i)]] = 2\xi_{exc}^{\text{CMV-AP}} \eta$$

$$\xi_{exc}^{\text{CMV-AP}} = \frac{\mu_0 \xi_{min} \text{tr} [\mathbb{E} [\mathbf{A}(i)]]}{(2\eta - \mu_0 \beta)} \quad (4-78)$$

Supondo que o valor de  $\epsilon$  desprezível,  $\mathbf{A}(i) = \mathbf{B}(i) \rightarrow \beta = \eta, \phi = \gamma$ .

$$\xi_{exc}^{\text{CMV-AP}} = \frac{\mu_0 \xi_{min} \text{tr} [\mathbb{E} [\mathbf{A}(i)]]}{(2 - \mu_0) \text{tr} [\mathbf{S}_1 \mathbb{E} [\mathbf{A}(i)]]} \quad (4-79)$$

Passo  $\mu_0$  pequeno,  $\mathbf{S}_1 \approx \mathbf{I}_P, \mathbf{S}_2 \approx \mathbf{0}$ :

$$\xi_{exc}^{\text{CMV-AP}} = \frac{\mu_0 \xi_{min}}{2 - \mu_0} \quad (4-80)$$

Passo  $\mu_0$  perto de 1, razão sinal-ruído alta,  $\mathbf{S}_1 \approx \mathbf{J}_P^{1,1}$ .

$$\text{tr} [\mathbf{S}_1 \mathbb{E} [\mathbf{A}(i)]] = \text{tr} [\mathbf{J}_P^{1,1} \mathbb{E} [\mathbf{A}(i)]] = \mathbb{E} [A_{1,1}(i)]$$

$$\xi_{exc}^{\text{CMV-AP}} = \frac{\mu_0 \xi_{min} \text{tr} [\mathbb{E} [\mathbf{A}(i)]]}{(2 - \mu_0) \mathbb{E} [A_{1,1}(i)]} \quad (4-81)$$

Outra aproximação:  $\mu_0$  não muito pequeno,  $\epsilon$  desprezível:

$$\text{tr} [\mathbb{E} [\mathbf{A}(i)]] \approx \mathbb{E} \left[ \frac{P}{\|\mathbf{\Pi}_k \mathbf{r}(i)\|^2} \right] \quad \frac{1}{\mathbb{E} [A_{1,1}(i)]} \approx \text{tr} [\mathbf{\Pi}_k \mathbf{R}]$$

$$\xi_{exc}^{CMV-AP} = \frac{\mu_0 \xi_{min}}{2 - \mu_0} \text{tr} [\mathbf{\Pi}_k \mathbf{R}] E \left[ \frac{P}{\|\mathbf{\Pi}_k \mathbf{r}(i)\|^2} \right] \quad (4-82)$$

Nota-se que para um maior valor de  $P$  maior o erro em excesso

### 4.3.3

#### Algoritmo CCM SG

Nesta seção é analisado o comportamento do algoritmo CCM-SG normalizado em termos do erro médio quadrático em excesso para o estado estacionário. Da mesma maneira que os receptores CMV, os receptores CCM também possuem equações de atualização altamente não lineares, o que também torna bastante difícil o estudo de seu desempenho e convergência.

A convergência do algoritmo CM foi extensamente analisada na literatura para diversas aplicações: para o caso em que o sinal transmitido são senóides em afetadas por desvanecimento [80] e para o problema de equalização cega [81,82]. O grande problema das análises nestes trabalhos era que muitas delas partiam de suposições simplificadoras muito fortes e os resultados teóricos e práticos apresentavam grande diferença. Versões normalizadas do algoritmo CM [83,84] também foram analisadas para o caso de equalização cega.

A análise utilizando a relação de conservação de energia foi realizada inicialmente por Mai e Sayed [77], também considerando um cenário de equalização fracionada. Os efeitos do ruído não foram considerados naquele estudo. Procurou-se apenas analisar o efeito de uma constelação de módulo não constante no erro médio quadrático em excesso.

Para o caso específico de sistemas de comunicações DS-CDMA ainda existem poucos trabalhos na literatura que tratam do tema. O trabalho de Whitehead e Takawira [85] traz como contribuição a obtenção do desempenho do algoritmo CCM para estado estacionário utilizando o método da conservação de energia. São obtidas fórmulas fechadas para o EMSE e a SINR de saída que dependem de momentos de ordem superior do ruído, da constelação e da IMA residual. O trabalho em [85] concentra-se apenas para o caso de canais planos. A extensão para o caso de canais multipercursos foi feita por Cai e de Lamare [86], que ainda apresentaram o desempenho do receptor CCM para o caso em que o algoritmo adaptativo possui passo variável. Conforme mencionado anteriormente, nesta tese e analisado o comportamento em estado estacionário do algoritmo CCM-SG normalizado.

A equação (4-24) pode ser escrita como:

$$\mathbf{w}_k(i+1) = \mathbf{w}_k(i) - \mu_w \mathbf{\Pi}_k \mathbf{r}(i) z_k^*(i) e(i) \quad (4-83)$$

onde  $e(i) = |z_k(i)|^2 - 1$ . O passo normalizado  $\mu_w$  é dado por

$$\mu_w = \frac{\mu_0}{\mathbf{r}^H(i)\mathbf{\Pi}_k\mathbf{r}(i)} \frac{1}{|z(i)|(|z(i)| - 1)}$$

a recursão (4-83) pode ser então escrita na forma reduzida

$$\mathbf{w}_k(i+1) = \mathbf{w}_k(i) - \mu_w \mathbf{\Pi}_k \mathbf{r}(i) g(z_k) \quad (4-84)$$

onde

$$\begin{aligned} g(z_k) &= \frac{z_k^*(i)(|z_k(i)|^2 - 1)}{|z_k(i)|(|z_k(i)| - 1)} \frac{1}{\|\mathbf{r}(i)\|_{\mathbf{\Pi}_k}^2} = \left( z_k^*(i) + \frac{z_k^*(i)}{|z_k(i)|} \right) \frac{1}{\|\mathbf{r}(i)\|_{\mathbf{\Pi}_k}^2} \\ &= \left( z_k^*(i) + \text{csgn}(z_k^*(i)) \right) \frac{1}{\|\mathbf{r}(i)\|_{\mathbf{\Pi}_k}^2} \end{aligned}$$

onde  $\text{csgn}(z) = z/|z|$  é a função sinal complexa.

Repetindo o procedimento efetuado para o algoritmo CMV-AP, primeiramente definem-se os erros ponderados a priori e a posteriori

$$e_p^{\mathbf{\Pi}_k}(i) = \tilde{\mathbf{w}}^H(i+1)\mathbf{\Pi}_k\mathbf{r} \quad e_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i) = \tilde{\mathbf{w}}^H(i)\mathbf{\Pi}_k\mathbf{r} \quad (4-85)$$

e escreve-se a relação entre eles:

$$e_p^{\mathbf{\Pi}_k}(i) = e_a^{\mathbf{\Pi}_k}(i) - \mu \|\mathbf{r}(i)\|_{\mathbf{\Pi}_k}^2 g(z_k(i)) \quad (4-86)$$

onde  $\|\mathbf{r}(i)\|_{\mathbf{\Pi}}^2 = \mathbf{r}(i)\mathbf{\Pi}_k\mathbf{r}^H(i)$ . Seguindo os passos de [75], chega-se a seguinte relação de energia do mesmo modo que no caso CMV-SG. Ao computar o valor esperado e fazer  $i \rightarrow \infty$  chega-se ao valor do erro médio quadrático em excesso para o algoritmo CCM-SG é dado por:

$$\xi_{exc}^{CCM-SG} = \frac{\mu_0}{2 - \mu_0} [1 + 2E[|y(i)|] + 2E[|y(i)|^2]] \quad (4-87)$$

onde  $d(i) = \mathbf{w}_{opt}^H \mathbf{r}(i)$ . Como foi visto no capítulo anterior, não há forma fechada para  $\mathbf{w}_{opt}$ , seguindo. Na simulação da convergência do algoritmo CCM-SG foi assumido [85, 87, 88] que  $\mathbf{w}_{opt}^{CCM} \approx \mathbf{w}_{opt}^{CMV}$ , cuja expressão é dada por (3-12).

#### 4.4

#### Resultados para Supressão de Interferência em CDMA

Nesta seção os algoritmos propostos serão aplicados ao problema de supressão cega de interferência em sistemas DS-CDMA. Considerando o enlace reverso de um sistema DS-CDMA síncrono com sinais modulados BPSK, com  $K$  usuários e ganho de processamento  $N$ , de acordo com o modelo do capítulo 2 temos que:

$$\mathbf{r}(i) = \sum_{k=1}^K A_k b_k(i) \mathbf{C}_k \mathbf{h}_k(i) + \boldsymbol{\eta}(i) + \mathbf{n}(i) \quad (4-88)$$

onde  $\boldsymbol{\eta}(i)$  representa a parcela da interferência entre símbolos.

A seguir é obtido o vetor com os coeficientes do filtro  $\mathbf{w}_k(i)$  a partir do qual é obtida uma estimativa dos símbolos transmitidos  $\hat{b}_k(i) = \text{sgn}(\mathbf{w}_k^H(i)\mathbf{r}(i))$ , sujeito a um conjunto de restrições dadas por  $\mathbf{C}_k^H \mathbf{w}_k(i+1) = \mathbf{h}_k(i)$  para o caso CMV, ou  $\mathbf{C}_k^H \mathbf{w}_k(i+1) = \nu \mathbf{h}_k(i)$  para o caso CCM, onde  $\mathbf{h}_k(i)$  é o vetor de canal do  $k$ -ésimo usuário.

O vetor de parâmetros  $\mathbf{w}_k$  é otimizado baseado em um dos critérios, o que torna necessário em caso de multipercurso e canais variantes no tempo um procedimento para estimação de canal. Neste trabalho foi adotado o método de estimação de canal às cegas adaptativo de Doukopoulos e Moustakides [58], que obtém de forma recursiva a estimativa dada por (3-14), para  $m = 1$ , ou (3-20) para outros valores de  $m$ . Neste trabalho foi utilizado apenas  $m = 1$ .

## 4.5

### Simulações e Resultados

Os resultados de simulações apresentados são para o enlace reverso de sistema DS-CDMA síncrono com modulação BPSK e que utiliza seqüências de espalhamento Gold de tamanho  $N = 31$ . Os usuários experimentam diferentes canais, porém é assumido que todos os canais possuem  $L = 3$  percursos. Os canais dos diferentes usuários são estatisticamente independentes e identicamente distribuídos. Os coeficientes do canal para cada usuário são  $h_{k,l} = p_{k,l} \alpha_{k,l}(i)$  ( $l = 0, 1, \dots, L - 1$ ), onde  $\alpha_{k,l}(i)$ , são seqüências estatisticamente independentes de variáveis aleatórias Gaussianas correlatadas obtidas ao filtrar-se um processo Gaussiano branco complexo por um filtro com resposta em freqüência dada aproximadamente por:

$$H(f) = a / \sqrt{1 - (f/f_d)^2} \quad (4-89)$$

onde  $a$  é uma constante de normalização,  $f_d = v/\lambda_c$  é o máximo desvio Doppler de freqüência,  $\lambda_c$  é o comprimento de onda, e  $v$  é a velocidade de deslocamento do terminal móvel [59]. Os resultados para o canal com desvanecimento são mostrados, nas figuras, em termos da freqüência Doppler normalizada  $f_d T$ . Neste trabalho  $p_{k,0} = 0.7581$ ,  $p_{k,1} = 0.5307$  e  $p_{k,2} = 0.3790$ . A ambigüidade de fase inerente ao método de estimação de canal às cegas é eliminada na simulações utilizando a fase de  $h_{k,0}$  como referência.

Nos experimentos são comparados uma versão melhorada (passo normalizado) [65] do receptor de Xu e Tsatsanis [64], denotada CMV-SG, uma versão melhorada [66] (passo normalizado) o receptor CCM de Xu and Liu [52], chamado aqui de CCM-SG, as versões tipo RLS dos receptores CMV [64] e

CCM [53] e os receptores tipo AP propostas, denominadas CMV-AP e CCM-AP. Para os algoritmos AP propostos foram usados  $P = 2$  e  $P = 3$  observações nos experimentos. O caso  $P = 4$  teoricamente aumentaria a velocidade de convergência, porém foi verificado que não houve melhora significativa de desempenho, uma vez que o erro em estado estacionário torna-se elevado. Os resultados são dados pela média de 100 realizações e os parâmetros dos algoritmos foram otimizados para cada cenário.

Na Figura 4.1 é verificado o desempenho em termos de taxa de erro de bits média (BER) dos algoritmos analisados sob desvanecimento ( $f_d T = 10^{-4}$ ). Também foi considerado um cenário não estacionário onde, em um determinado instante, usuários entram no sistema e os algoritmos são confrontados com uma mudança súbita no ambiente. O sistema começa com  $K = 8$  usuários cuja distribuição de potências segue um variável aleatória log-normal com desvio padrão igual a 1.5 dB. Após a transmissão de 1000 símbolos, 4 novos usuários entram na célula e o controle de potência é um pouco afrouxado, resultando em uma distribuição de potências com desvio padrão de 3 dB para todos os usuários.

Os resultados mostram que os algoritmos propostos CCM-AP e CMV-AP apresentam desempenho superior às respectivas versões SG e próximo às versões tipo RLS. Para cargas moderadas, o algoritmo CCM-AP para  $P = 2$  consegue um desempenho melhor até do que o CMV-RLS. Aumentando-se a carga os algoritmos propostos, a despeito de uma degradação de desempenho com relação às versões tipo RLS, ainda apresentam desempenho bem superior às versões SG.

Na Figura 4.2 o desempenho em termos de razão sinal-interferência-mais-ruído é analisado em um cenário com  $K = 12$  usuários, efeito *near-far* moderado e sob desvanecimento mais rápido ( $f_d T = 10^{-3}$ ) que o experimento anterior. Assume-se que o usuário 1 seja o de interesse. Um interferente tem um nível de potência 10 dB acima e outro 7 dB acima do usuário de interesse. Os outros 9 interferentes têm o mesmo nível de potência do usuário de interesse, o que corresponde a  $E_b/N_0 = 15$  dB. Os resultados mostram que os algoritmos propostos mantêm o bom desempenho sob diferentes cenários de desvanecimento.

Para a análise dos algoritmos em estado estacionário, os resultados de simulações apresentados são para o enlace direto de sistema DS-CDMA síncrono com modulação BPSK e que utiliza seqüências de espalhamento Gold de tamanho  $N = 31$ . Os usuários experimentam o mesmo canal, de tamanho  $L = 3$ . Considera-se que os receptores possuem perfeito conhecimento do canal, portanto o vetor  $\mathbf{g} = \mathbf{h}$  nas recursões dos algoritmos adaptativos comparados.

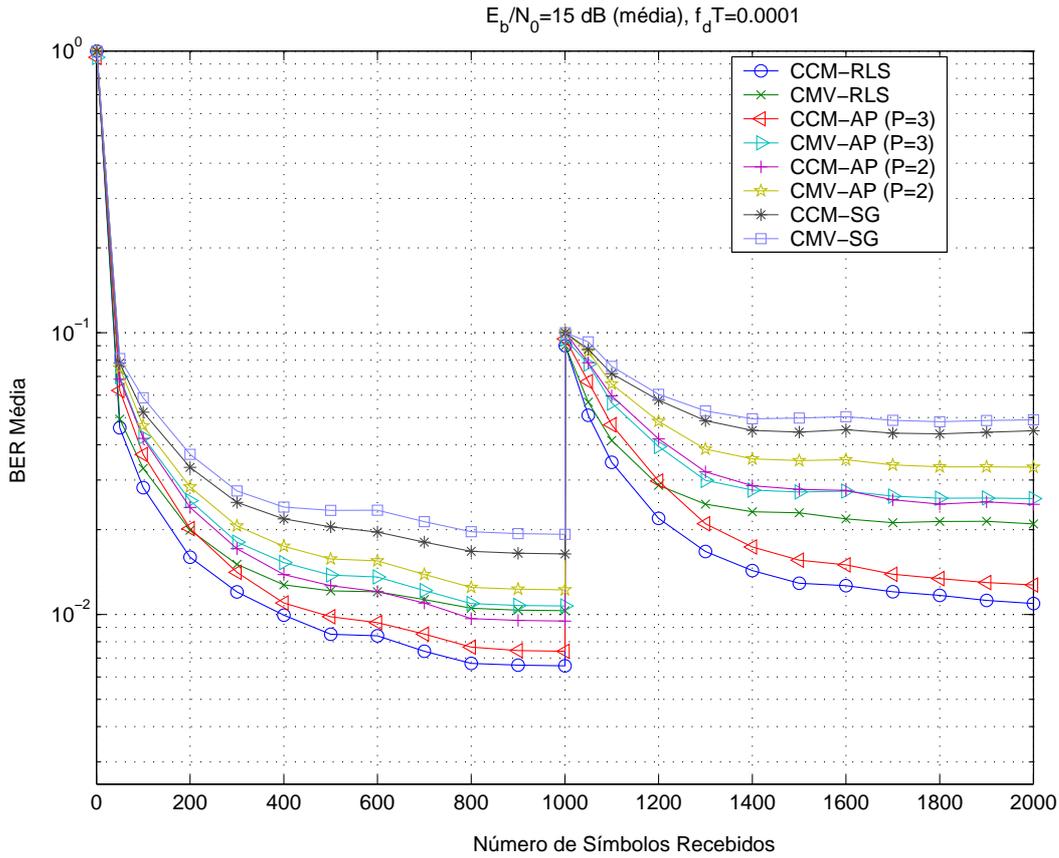


Figura 4.1: BER versus símbolos recebidos para um cenário não estacionário ( $f_d T = 10^{-4}$ ).

Utiliza-se como métrica para comparação a SINR. Relembrando a definição de SINR, tem-se que:

$$SINR(i) = \frac{(E[\mathbf{w}^H \mathbf{r}(i) | b_1(i)])^2}{E[|\mathbf{w}^H \mathbf{r}(i) - A_1 b_1(i)|^2]} = \frac{A_1^2}{E[|\mathbf{w}_{opt}^H \mathbf{r}(i) + \tilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{r}(i) - A_1 b_1(i)|^2]} \quad (4-90)$$

Em estado estacionário a seguinte aproximação é válida:

$$SINR(\infty) = \frac{A_1^2}{\xi_{min} + \xi^{CMV-AP} - A_1^2} \quad (4-91)$$

A título de comparação, os resultados são comparados com a SINR de saída do receptor CMV *batch*, apresentado no capítulo 3.

$$SINR_{CMV_{batch}} = \frac{A_1^2}{\xi_{min} - A_1^2} \quad (4-92)$$

A Figura 4.3 mostra o comportamento do algoritmo CMV-AP para diferentes valores de  $P$  em termos de SINR. Nota-se que para um dado passo  $\mu_0$  a SINR de saída diminui à medida em que  $P$  aumenta, o que é esperado uma vez que o erro em excesso aumenta com  $P$ . Porém regulando  $\mu_0$  de forma que o erro em excesso seja o mesmo, quanto maior o valor de  $P$  mais rápida é

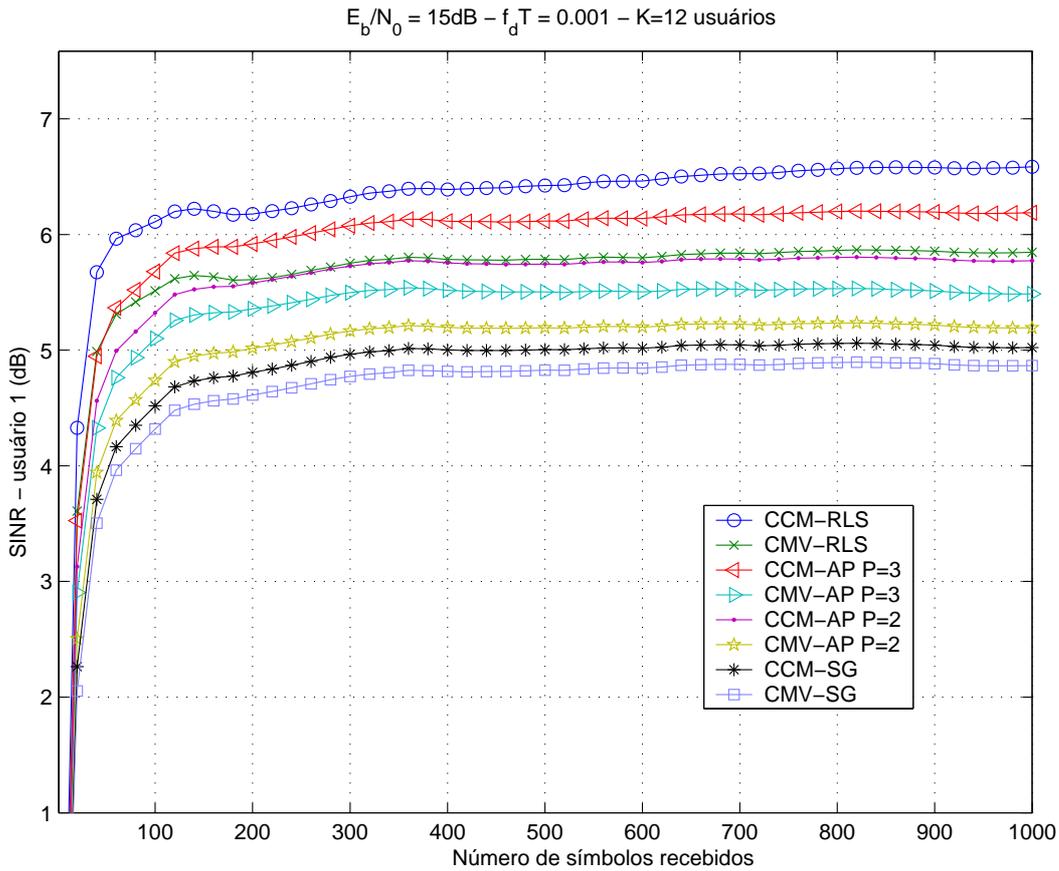


Figura 4.2: SINR versus número de símbolos transmitidos para um cenário de desvanecimento rápido ( $f_d T = 10^{-3}$ ).

a convergência.

O desempenho em termos de SINR de saída por  $E_b/N_0$  é ilustrado na Figura 4.4 para um algoritmo CMV-AP com  $P = 3$ . Para baixas razão sinal-ruído, o valor ótimo da função custo  $\xi_{\min}$  predomina sobre o valor do erro em excesso  $\xi^{\text{CMV-AP}}$  e por isso tanto o desempenho do receptor CMV-AP é tão próximo ao receptor CMV ótimo. Quando o valor de  $E_b/N_0$  vai se tornando elevado,  $\xi^{\text{CMV-AP}}$  torna-se predominante quando comparado com  $\xi_{\min}$ , o que explica o afastamento das duas curvas. Já a Figura 4.5 ilustra o comportamento do algoritmo CMV-AP, com  $P = 3$ , para diferentes cargas no sistema. Quando há mudança na carga do sistema e/ou há variação no nível de potência dos usuários, o espalhamento dos autovalores da matriz  $\mathbf{R}$ , denotado  $\chi(\mathbf{R})$ , é afetado. Pode-se ver que quanto menor o valor de  $\chi(\mathbf{R})$  mais rápida é a convergência.

Uma avaliação do desempenho dos algoritmos como função do passo  $\mu_0$  é feita na Figura 4.6. Em concordância com os resultados da Figura 4.3, mostra-se que para um dado  $\mu_0$ , o desempenho em estado estacionário piora a medida em que se aumenta  $P$ . Todavia, é importante notar que para um dado valor

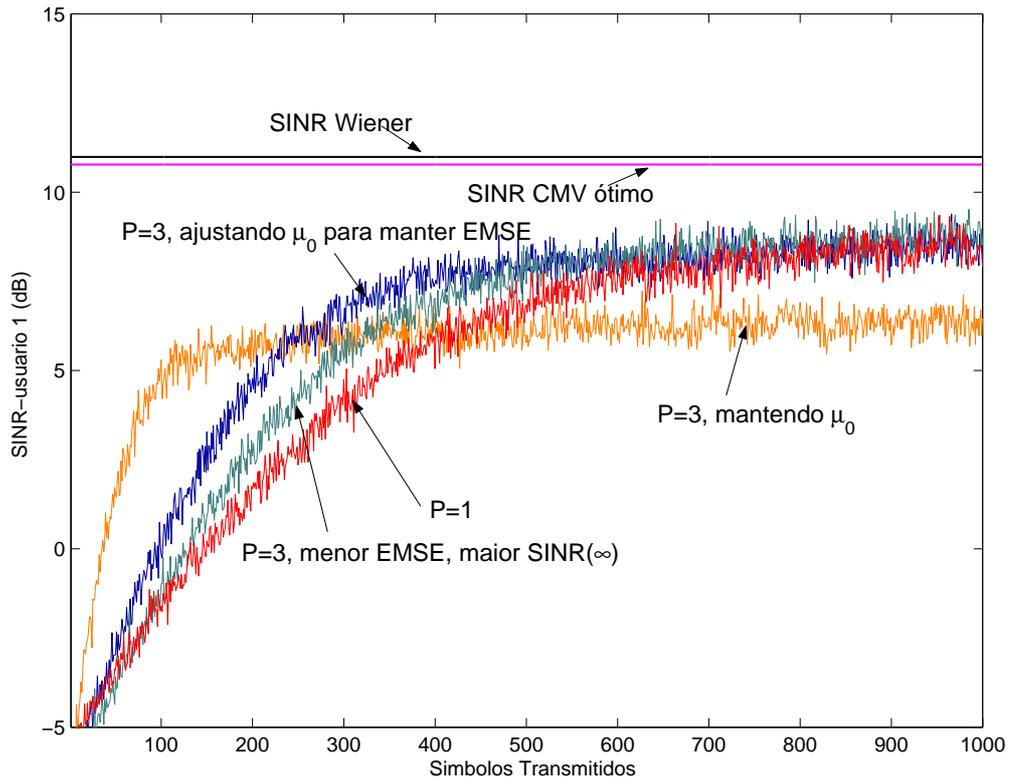


Figura 4.3: Convergência do algoritmo AP para diferentes valores de  $P$ .

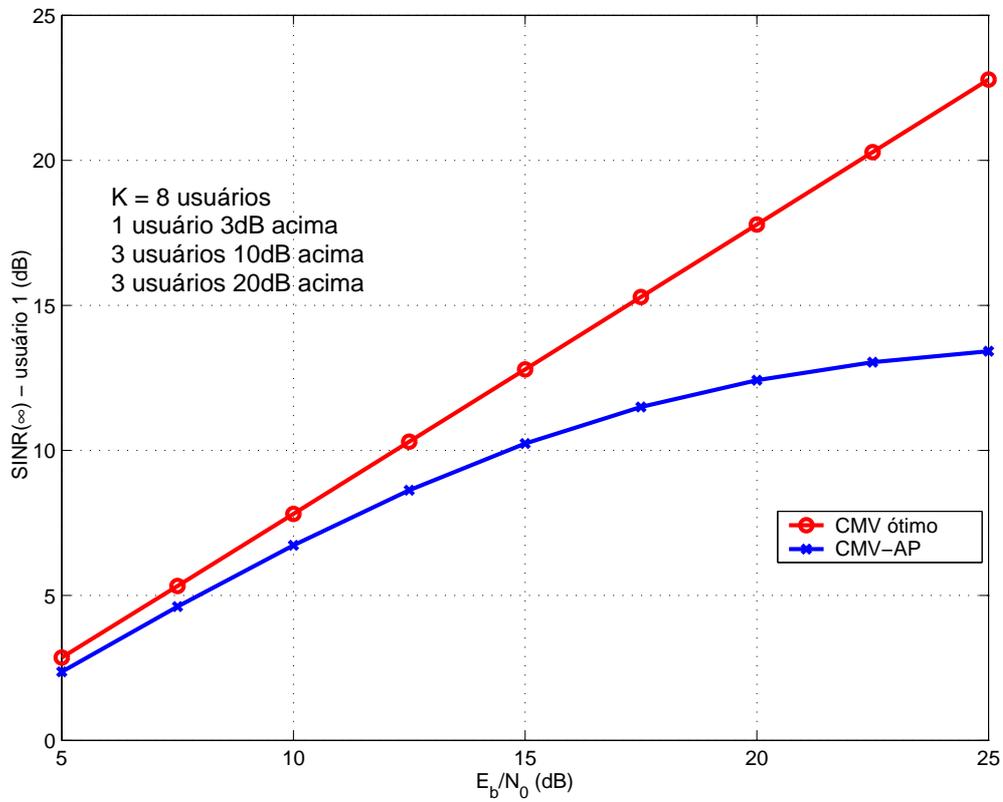


Figura 4.4: SINR em estado estacionário versus  $E_b/N_0$  para o algoritmo AP.

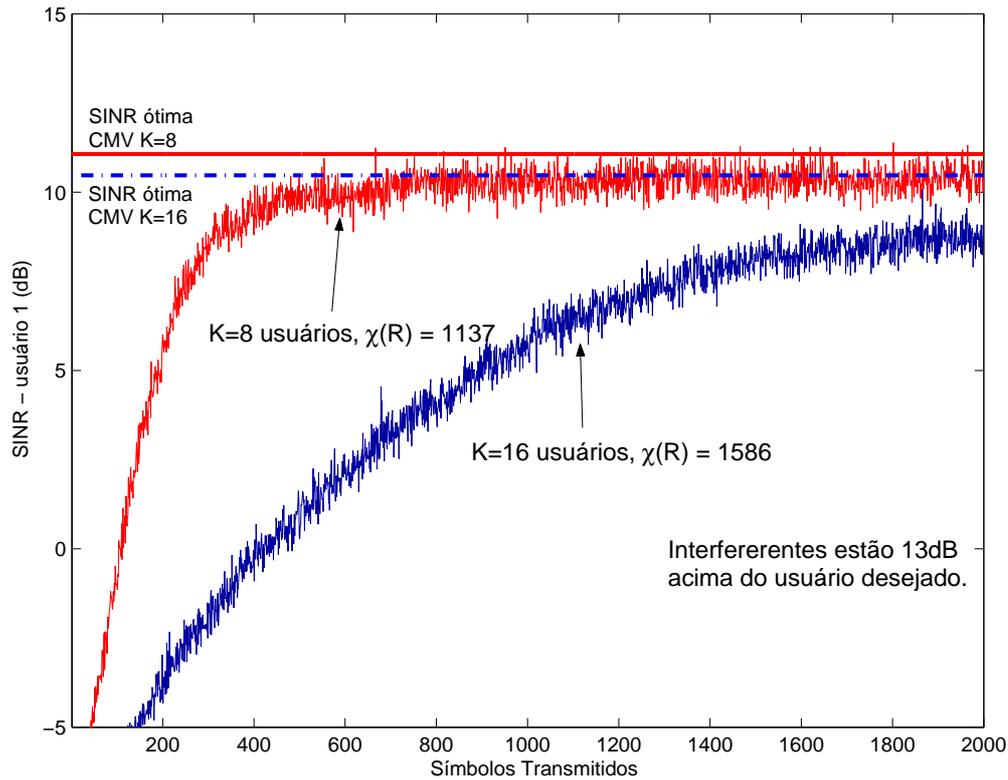


Figura 4.5: Convergência e SINR em estado estacionário para sistemas com  $K = 8$  e  $K = 16$  usuários.

de SINR de saída, o transitório dos algoritmos com maior valor de  $P$  é mais rápido.

Uma avaliação do desempenho dos algoritmos como função do passo  $\mu_0$  é feita na Figura 4.6. Em concordância com os resultados da Figura 4.3, mostra-se que para um dado  $\mu_0$ , o desempenho em estado estacionário piora a medida em que se aumenta  $P$ . Todavia, é importante notar que para um dado valor de SINR de saída, o transitório dos algoritmos com maior valor de  $P$  é mais rápido.

Finalmente, a Figura 4.7 apresenta a convergência do erro em excesso para o algoritmo CCM-SG. Foi considerado um cenário também com  $K = 8$  usuários, cujos interferentes do usuário desejado têm as mesmas características daqueles do cenário rodado na Figura 4.6. Pode-se perceber que os resultados de simulação aproximam-se bastante dos cálculos teóricos quando o sistema atinge o estado estacionário.

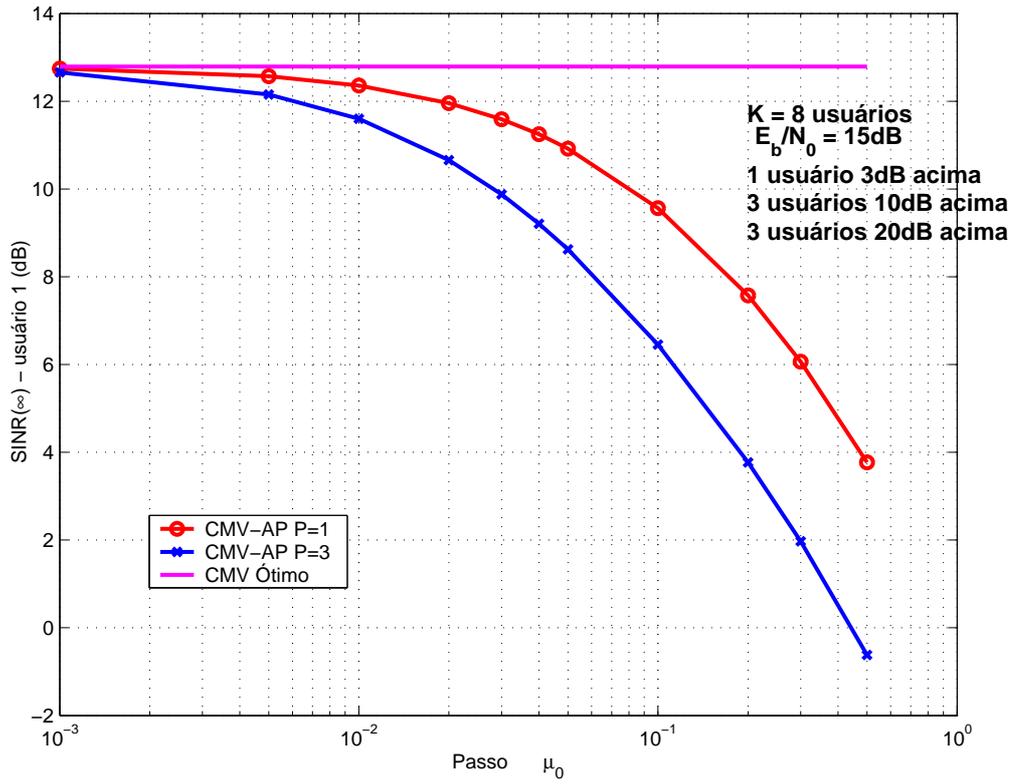


Figura 4.6: SINR versus passo  $\mu_0$ .

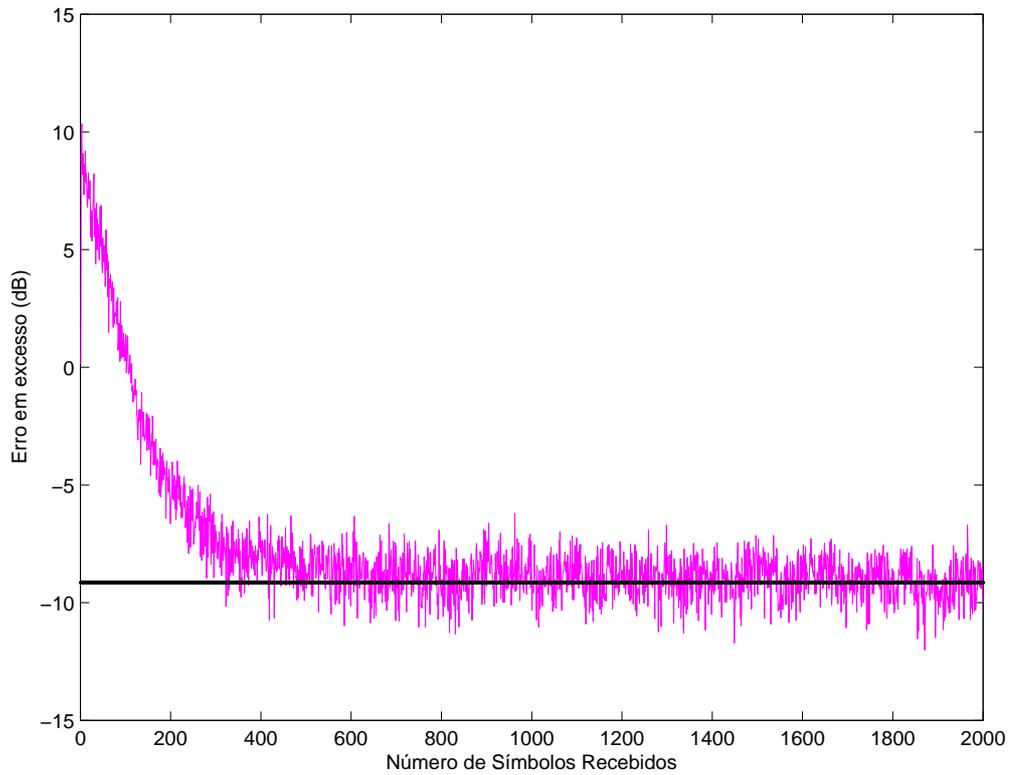


Figura 4.7: Erro médio em excesso do algoritmo CCM-SG: convergência e valor em estado estacionário