2
Value at Risk e retorno de um investimento

O Value at Risk (VaR) é um método de mensuração de risco de mercado que utiliza técnicas estatísticas amplamente difundidas. De outra forma, o VaR mede a pior perda esperada ao longo de determinado intervalo de tempo, sob condições normais de mercado e dentro de determinado nível de confiança. Com base em fundamentos científicos, o VaR fornece aos seus usuários uma medida concisa do risco de mercado. Além disso, ele mede a perda esperada tanto em valor monetário quanto em percentual.

O VaR serve a diversos propósitos:

- **Fornecimento de Informações Gerenciais**. O VaR pode ser usado para informar a alta gerência dos riscos incorridos em transações e operações de investimento, bem como aos acionistas dos riscos financeiros da empresa. Com isso, o VaR ajuda a acelerar a atual tendência de um melhor fornecimento de informações de valores financeiros marcados a mercado;
- **Alocação de Recursos**. O VaR pode ser utilizado no estabelecimento de limites de posição para operadores e para a decisão sobre onde alocar recursos limitados de capital. A vantagem do VaR é a criação de um denominador comum que permita comparar as atividades de risco em diversos mercados. O risco total de uma empresa pode também ser decomposto em VaRs “incrementais”, os quais permitem que usuários reconheçam as posições que mais contribuem para o risco total;
- **Avaliação de Performance**. O VaR pode ser usado para que o desempenho seja ajustado ao risco, o que é essencial em um ambiente de negociações em que os operadores possuem tendência natural de assumir riscos extras. Os encargos relativos ao capital de risco, baseados na medida de VaR, proporcionam aos operadores os incentivos corretos.

O VaR tem como usuários:

- **Instituições Financeiras**. Os *dealers* detentores de grandes carteiras têm-se colocado na vanguarda da administração de risco. As instituições que lidam com várias fontes de risco financeiro e instrumentos complexos em geral já implementaram sistemas centralizados de administração de risco;
- **Órgãos Reguladores**. Uma regulamentação prudente de instituições financeiras requer a manutenção de níveis mínimos de capital como

reservas contra riscos financeiros. O Comitê de Supervisão Bancária da Basiléia considera o VaR uma forma de mensuração de risco aceitável;

- **Instituições Não-Financeiras**. A administração centralizada de risco torna-se útil a qualquer empresa que esteja exposta a risco financeiro. É através desta administração que as decisões são tomadas no sentido de uma política aberta de *hedge* (proteção);
- **Administradores de Ativos**. Os investidores institucionais têm-se voltado para o VaR a fim de melhor controlar os riscos financeiros assumidos.

O cálculo do VaR tornou-se possível devido ao aumento dos recursos computacionais, necessários para a realização de simulações complexas.

O primeiro passo para a mensuração do VaR é a escolha de dois fatores quantitativos: o horizonte de tempo e o nível de confiança.

Como o prazo de manutenção de uma carteira corresponde a um período mais longo, necessário para que a liquidação da mesma seja feita de maneira ordenada, o horizonte de tempo do VaR deve estar relacionado à liquidez dos ativos, definida em termos da extensão de tempo necessária para volumes normais de transação.

Existem poucas diretrizes disponíveis para a escolha do nível de confiança. Deve-se atentar para o fato de que níveis maiores de confiança implicam em maiores valores para o VaR. É importante escolher um nível de confiança que permita aos usuários comparar o VaR com a perda de fato ocorrida.

2.1. Definição do valor em risco

O VaR de uma posição comprada ao longo do horizonte de tempo ℓ e com probabilidade p pode ser definido como:

$$p = P[\Delta V(\ell) \leq VaR] \tag{1}$$

onde: $\Delta V(\ell)$ é a mudança sofrida no valor dos ativos da posição financeira durante o período ℓ.

Como se está comprado na posição financeira, a perda ocorre quando $\Delta V(\ell) < 0$ e o VaR da equação acima assume valor negativo.

Caso fosse utilizada uma posição vendida, isto seria o contrário e o VaR seria definido assim:

$$p = P[\Delta V(\ell) \geq VaR] = 1 - P[\Delta V(\ell) < VaR] \qquad (2)$$

As definições vistas até o momento mostram que em posições compradas, a cauda esquerda é importante no cálculo do Value at Risk, já em posições vendidas, a cauda direita é que deve ser levada em conta.

O VaR pode ser medido de forma relativa, consistindo na perda em relação a média, ou de forma absoluta, onde a perda não é calculada usando-se uma referência a valor esperado. Segundo Jorion (2003), o VaR relativo é o mais aconselhável, porém, quando o horizonte é pequeno, o retorno médio pode ser pequeno, o que acarretaria o VaR relativo e o VaR absoluto estimarem aproximadamente o mesmo valor.

Considerando W_0 como o investimento inicial, r a taxa de retorno e W o valor da carteira no final do horizonte, o VaR relativo pode ser obtido da seguinte forma:

$$VaR_{rel} = E(W) - W^* \qquad (3)$$

onde W^* representa o menor valor da carteira para um nível de confiança c.

Porém,

$$W = W_0(1+r) \qquad \text{e} \qquad W^* = W_0(1+r^*)$$

onde r^* representa o menor retorno para o nível de confiança c.

Então,

$$VaR_{rel} = E(W) - W^* = E[W_0(1+r)] - W_0(1+r^*)$$

$$VaR_{rel} = W_0 E[(1+r)] - W_0(1+r^*) = W_0(1+E[r]) - W_0(1+r^*)$$

Definindo como μ o retorno esperado de r, temos que:

$$VaR_{rel} = W_0(1+\mu) - W_0(1+r^*)$$

$$VaR_{rel} = W_0 + W_0\mu - W_0 - W_0 r^* = -W_0(r^* - \mu)$$

O VaR absoluto fica:

$$VaR_{abs} = W_0 - W^* = W_0 - W_0(1+r^*) = W_0 - W_0 - W_0 r^* = -W_0 r^* \quad (4)$$

2.2. Backtesting

Verificar se os modelos de cálculo de VaR estão perto da realidade é tarefa necessária quando se desejam respostas consistentes de estimativas de valor em risco. O instrumento mais utilizado para realizar a validação dos modelos de Value at Risk é conhecido como Backtesting.

O Backtesting é uma ferramenta estatística que tem por objetivo verificar a consistência entre as perdas observadas e as perdas estimadas pelos modelos. Resumindo, isto implica em comparar o histórico das perdas estimadas pelo VaR com os retornos observados da carteira. Ele será muito útil, quando se estiver avaliando se os modelos de VaR testados estão bem ajustados e qual deles possibilita uma melhor estimativa das perdas.

2.2.1. Backtesting Hipotético

É o mais útil dos métodos de Backtesting. Consiste em "congelar" a carteira analisada para um determinado dia e aplicar variações históricas nos preços de fechamento dos ativos que a compõe, gerando uma série com perdas e ganhos hipotéticos. O cálculo do VaR é realizado diariamente, possibilitando a determinação do número e percentual de exceções por meio da comparação entre as estimativas de VaR e os resultados do dia posterior.

2.2.2. Validação de um Modelo de VaR utilizando a Taxa de Exceções

O teste de razão de verossimilhança (likelihood ratio – LR), desenvolvido por Kupiec avalia estatisticamente a hipótese nula de que a proporção verdadeira de falhas p do modelo é igual ao nível de significância $\alpha\,\%$ preestabelecido para o cálculo do VaR. Seja N o número de vezes em que o retorno observado excedeu o VaR em uma amostra de tamanho T. Se cada uma das realizações diárias da série de retornos apresenta probabilidade de $\alpha\,\%$ de superar o VaR, então, a variável aleatória "número de violações do VaR" apresenta Distribuição Binomial com média T e variância p:

$$N \sim B(T, p)$$

Idealmente, o percentual de falhas de ocorrência deve ser igual à probabilidade associada à cauda esquerda da distribuição, isto é, $p = \alpha\,\%$. As hipóteses nula e alternativa são construídas da seguinte forma:

$$H_0 = \frac{N}{T} = p$$

$$H_A = \frac{N}{T} \neq p$$

e a estatística apropriada para se testar a LR é dada por:

$$\boxed{LR = 2\left\{\ln\left[\left(\frac{N}{T}\right)^{N}\left(1-\frac{N}{T}\right)^{T-N}\right] - \ln\left[p^{N}(1-p)^{T-N}\right]\right\}} \qquad (5)$$

Sob a hipótese nula que p é a verdadeira probabilidade do VaR ser excedido, a estatística do teste LR é assintoticamente distribuída como uma qui-quadrado (χ^2) com um grau de liberdade.

Compara-se, então, o LR com o valor crítico da distribuição qui-quadrado para um grau de liberdade e nível de significância do teste de 5%, isto é, $\chi^2 = 3{,}841$; a observação de valores superiores (inferiores) a este último leva à rejeição (aceitação) da hipótese nula.

2.3. Retorno de um Ativo

A maioria dos trabalhos acadêmicos analisa retornos ao invés de preços. Dentre as principais razões, destaca-se o fato de séries de retornos serem mais fáceis de manipular que as séries de preços, porque sua forma possui propriedades estatísticas mais atrativas. Apresentamos, a seguir, algumas diferentes definições de retorno.

2.3.1. Retorno Aritmético

É o mais simples de ser calculado e pode ser obtido para um único período da seguinte forma:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \tag{6}$$

onde:

R_t: retorno no período t.

P_t: preço no período t.

Para múltiplos períodos, temos que:

$$R_{t,k} = \frac{P_t}{P_{t-k}} - 1$$

$$R_{t,k} + 1 = \frac{P_t}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \times \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \times \ldots \times \frac{P_{t-(k-1)}}{P_{t-k}}$$

$$R_{t,k} + 1 = \frac{P_t}{P_{t-k}} = (1 + R_t) \times (1 + R_{t-1}) \times \ldots \times \left(1 + R_{t-(k-1)}\right)$$

$$R_{t,k} = \left[\prod_{i=0}^{k-1} (1 + R_{t-i})\right] - 1 \tag{7}$$

2.3.2. Retorno Logarítmico

Consiste no logarítmico natural do retorno aritmético.

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln P_t - \ln P_{t-1} = p_t - p_{t-1} \tag{8}$$

Uma grande vantagem dos retornos logarítmicos é que, para múltiplos períodos de tempo, o retorno é composto pela simples soma dos retornos em cada período de tempo, como pode ser visto a seguir.

$$r_{t,k} = \ln(1 + R_{t,k}) = \ln[(1 + R_t) \times (1 + R_{t-1}) \times \ldots \times (1 + R_{t-(k-1)})]$$

$$r_{t,k} = \ln(1 + R_t) + \ln(1 + R_{t-1}) + \ldots + \ln(1 + R_{t-(k-1)})$$

$$r_{t,k} = r_t + r_{t-1} + \ldots + r_{t-(k-1)} \qquad (9)$$

Para retornos pequenos, o valor do retorno logarítmico se aproxima do retorno aritmético. Com isso, podem-se usar as séries dos retornos logarítmicos dos ativos no lugar dos retornos aritméticos.

De acordo com a equação (8),

$$r_t = \ln(1 + R_t)$$

Aplicando a expansão de Taylor:

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} R_t^{\,k} = R_t - \frac{1}{2} R_t^{\,2} + \frac{1}{3} R_t^{\,3} - \ldots$$

Se R_t for pequeno, as parcelas que possuem $R_t^{\,2}$ e de ordem superiores são desprezíveis, ocasionando que:

$$r_t \cong R_t$$

Na ampla maioria dos casos os retornos logarítmicos podem e são utilizados.