

5

Método de Elementos Finitos

5.1

Introdução

O método de elementos finitos é o método de discretização utilizado na simulação numérica do compressor *bp*, que é o objeto desta Dissertação, para se obterem as frequências naturais, os modos de vibração, a dinâmica do rotor e sua resposta em frequência. Portanto se discorrerá sobre o tema neste Capítulo.

O principais constituintes do Método de Elementos Finitos para a solução de um Problema de Valor de Contorno são:

- A Formulação Fraca do Problema.
- Funções Interpolantes.

5.2

Formulação Fraca

Parte-se da **formulação forte** para se chegar à **formulação fraca**.

Considere-se um exemplo unidimensional de um problema de valor de contorno, dado pela equação 5-1:

$$-\frac{d(p(x)\frac{du}{dx})}{dx} + q(x)u = f(x) \quad (5-1)$$

sendo as funções u, p, q, f definidas no intervalo $[0, 1]$. As condições de contorno são dadas por:

$$u(0) = 0; \frac{d(u)}{dx}(1) = 0 \quad (5-2)$$

A forma mais simples deste problema é para $p(x) = 1$ e $q(x) = 0$,

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f(x) = 0 \quad (5-3)$$

Supondo-se que f tenha energia finita:

$$\int_0^L (f(x))^2 dx < \infty \quad (5-4)$$

O espaço de funções que satisfaz à equação 5-4 é denotado por \mathcal{H}^0 , sendo o índice sobrescrito o número requerido de derivadas com energia finita para a função f . Neste caso f não precisa de derivada com energia finita. u por sua vez pertence ao espaço de funções denotado por \mathcal{H}_C^2 , significando que a segunda derivada de u deve ter energia finita, ou seja:

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 < \infty \quad (5-5)$$

O índice subscrito, C , refere-se às condições de contorno $u(0) = 0$ e $u'(L) = 0$.

O problema da equação 5-3 com as condições de contorno 5-5 é conhecido como **formulação forte**

Partindo-se de uma formulação forte para uma **formulação fraca** são necessários dois passos:

1. Produto interno da equação 5-3 com w

$$\left\langle \frac{d^2u(x)}{dx^2}, w \right\rangle + \langle f, w \rangle = 0 \quad (5-6)$$

Sendo w uma função teste. A equação 5-6 também pode ser escrita como:

$$\int_0^1 \frac{d^2u(x)}{dx^2} w(x) dx + \int_0^1 f(x) w(x) dx = 0 \quad (5-7)$$

2. Integração por partes da equação 5-7. Lembrando-se que: $\int_0^1 u dv = uv \Big|_0^1 - \int_0^1 v du$:

$$\int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx - w \frac{du}{dx} \Big|_0^1 = \int_0^1 f w dx \iff \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx = \int_0^1 f w dx \quad (5-8)$$

A função teste deve satisfazer à condição de contorno essencial, $u(0) = 0$, mas não precisa satisfazer à condição de contorno natural $u'(1) = 0$.

Uma vantagem da **formulação fraca** é que a exigência quanto às derivadas da função u é de 1ª ordem, enquanto que na formulação forte u precisa ser ter derivada de 2ª ordem. Portanto u e w pertencem ao espaço denotado por \mathcal{H}_E^1 , onde E refere-se às condições de contorno essenciais.

Dado um problema na formulação fraca, caso não haja como obter uma resposta analítica, deve-se aproximar u , da seguinte forma (a_i coeficientes determinados por condições suplementares, ϕ_i , funções linearmente independentes):

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(x) \quad (5-9)$$

Esta aproximação gera um erro:

$$u(x) = u_N(x) + \underbrace{\sum_{i=N+1}^{\infty} a_i \phi_i(x)}_{\text{erro}_N} \quad (5-10)$$

Reescrevendo-se a equação 5-8 com a aproximação:

$$\int_0^1 \frac{u_N(x)}{dx} \frac{dw(x)}{dx} - \int_0^1 f(x)w(x)dx = \int_0^1 \frac{d(\text{erro}_N(x))}{dx} \frac{dw(x)}{dx} dx \quad (5-11)$$

A função teste, w , será aproximada por $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$.

Assim como ϕ_i , estas funções são LI.

Substituindo-se a aproximação 5-9 na equação 5-11 chega-se a:

$$a_i \int_0^1 \frac{d\phi_i(x)}{dx} \frac{d\psi_i(x)}{dx} - \int_0^1 f\psi_i(x)dx = \int_0^1 \frac{d(\text{erro}_N(x))}{dx} \frac{\psi_i(x)}{dx} dx \quad (5-12)$$

Quer-se obter funções teste, w , que sejam ortogonais ao erro.

Assim sendo,

$$\int_0^1 \frac{d(\text{erro}_N(x))}{dx} \frac{dw(x)}{dx} dx = 0 \quad (5-13)$$

5.3

Método de Galerkin

A equação 5-12 passa a ser:


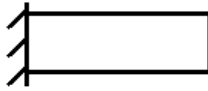
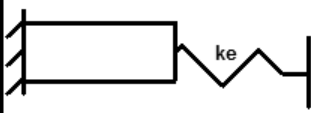
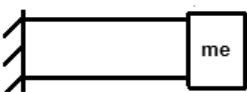
$$a_i \int_0^1 \frac{d\phi_i(x)}{dx} \frac{d\psi_i(x)}{dx} - \int_0^1 f\psi_i(x)dx = 0 \quad (5-14)$$

O método de Galerkin impõe que as funções-teste e aproximantes sejam idênticas, ou seja, $\psi_i = \phi_i$. A equação 5-15 mostra a formulação resultante após a aplicação do **Método de Galerkin** no problema da equação 5-1

$$a_i \int_0^1 \frac{d\phi_i(x)}{dx} \frac{d\phi_i(x)}{dx} - \int_0^1 f\phi_i(x)dx = 0 \quad (5-15)$$


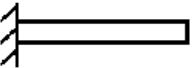
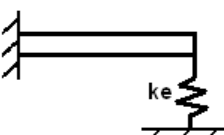
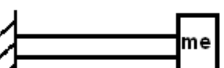
5.4

Problemas de Barras

Barra	Configuração	Formulação Fraca	C.C. Essencial
Livre-Livre		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	—
Fixa-Livre		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	$u(0, t) = 0$
Fixa-Mola		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx + k_e u(L, t) \psi(L) = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	$u(0, t) = 0$
Fixa-Massa		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx + m_e \psi(L) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t) = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	$u(0, t) = 0$

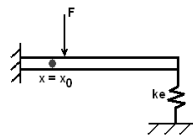
5.5

Problemas de Vigas

Viga	Configuração	Formulação Fraca	C.C. Essenciais
Livre-Livre		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx$ $= \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	—
Engastada-Livre		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx$ $= \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	$u(0, t) = 0,$ $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$
Engastada-Mola		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx$ $+ k_e u(L, t) \psi(L) = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	$u(0, t) = 0,$ $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$
Engastada-Massa		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx$ $+ m_e \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t) \psi(L) = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	$u(0, t) = 0,$ $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$

5.6

Problema de uma viga engastada-mola



c.c.essenciais

c.c.naturais

$$u(0, t) = 0 \quad ; \quad V(L, t) = \frac{k_e u}{EI}(L, t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad ; \quad M(L, t) = 0$$

Condições iniciais:

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$$

Equação da dinâmica de uma viga:

$$\rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right] = f(x, t)$$

Objetivos:

- Aproximar modos de vibração (MEF);
- Aproximar dinâmica em determinado ponto do sistema (x_0).

5.7

Formulação Fraca: Viga engastada-mola

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) \psi(x) dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$$

$$\forall \psi \in Adm_4$$

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \psi \underbrace{\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t)}_{= \frac{k_e}{EI} u(L, t)} - EI \underbrace{\psi(0)}_{= 0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - EI \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t)}_{= 0} \frac{d\psi}{dx} \\ + EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \underbrace{\frac{d\psi(0)}{dx}}_{= 0} + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx \end{aligned}$$

Formulação Fraca:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx + k_e u(L, t) \psi(L) \\ = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx \end{aligned}$$

$$\psi(x) \in Adm_4$$

$$Adm_4 = \{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re | \psi(0) = 0, \frac{d\psi}{dx}(0) = 0 \}$$

$$a(u, \psi) = f(\psi)$$

Considerações:

- Forças externas nulas: $a(u, \psi) = 0$
- $u(x, t) = e^{i\omega t} \phi(x)$

$$\omega^2 \int_0^L \rho A \phi(x) \psi(x) dx = k_e \phi(L) \psi(L) + \int_0^L EI \frac{d^2 \phi}{dx^2}(x) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx$$

$$\forall \psi \in Adm_4$$

Deseja-se calcular:

- ω_i - frequências naturais
- ϕ_i - modos de vibração

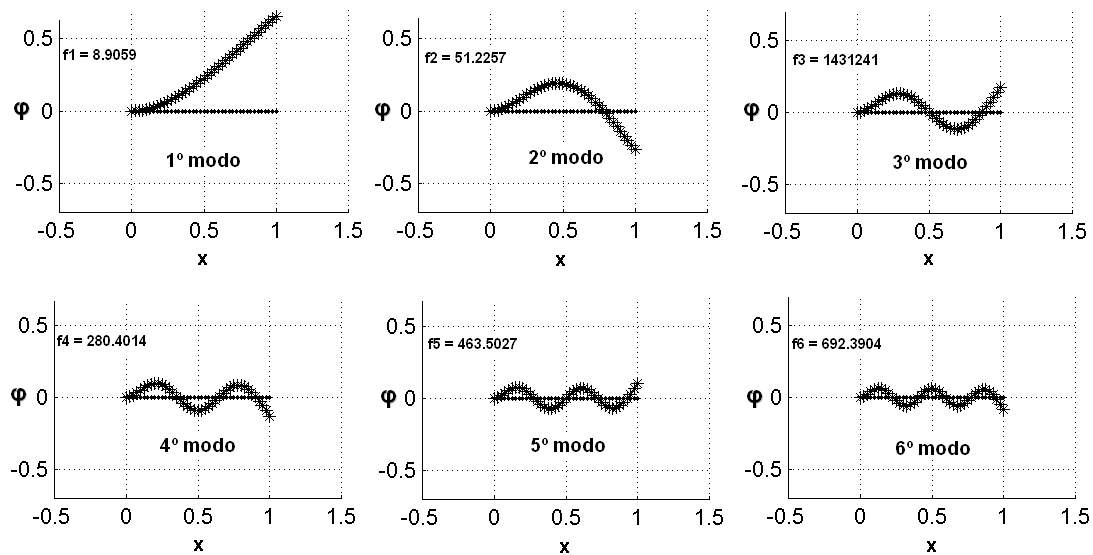
5.8

Método de Elementos Finitos

- Aproximação do domínio;
- Aproximação da solução no domínio aproximado;
- Acoplamento das equações elementares;
- Imposição das condições de contorno;
- Sistema de equações.

5.9

Modos de Vibração: Viga engastada-mola



5.10

Modelo reduzido: Viga engastada-mola

$$\tilde{M}\ddot{U} + \tilde{K}U = \tilde{F}$$

$$u^N(x, t) = \sum_{n=1}^N \phi_n(x) a_n(t)$$

$$\underbrace{\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}(x, t) \phi_j(x) dx}_{op. \text{ massa}} + \underbrace{\int_0^L EI \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} dx}_{op. \text{ rigidez}} + k_e u^N(L, t) \phi(L) = \underbrace{\int_0^L f(x, t) \phi_j(x) dx}_{carregamento}$$

$$\int_0^L \rho A \phi_i \phi_j dx \quad \ddot{a}_i + k_e \phi_i \phi_j \quad a_i + \int_0^L EI \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx \quad a_i = \int_0^L f \phi_j dx$$

5.11

Aproximação da dinâmica: Viga engastada-mola

Aproximação com 5 modos (N = 5):

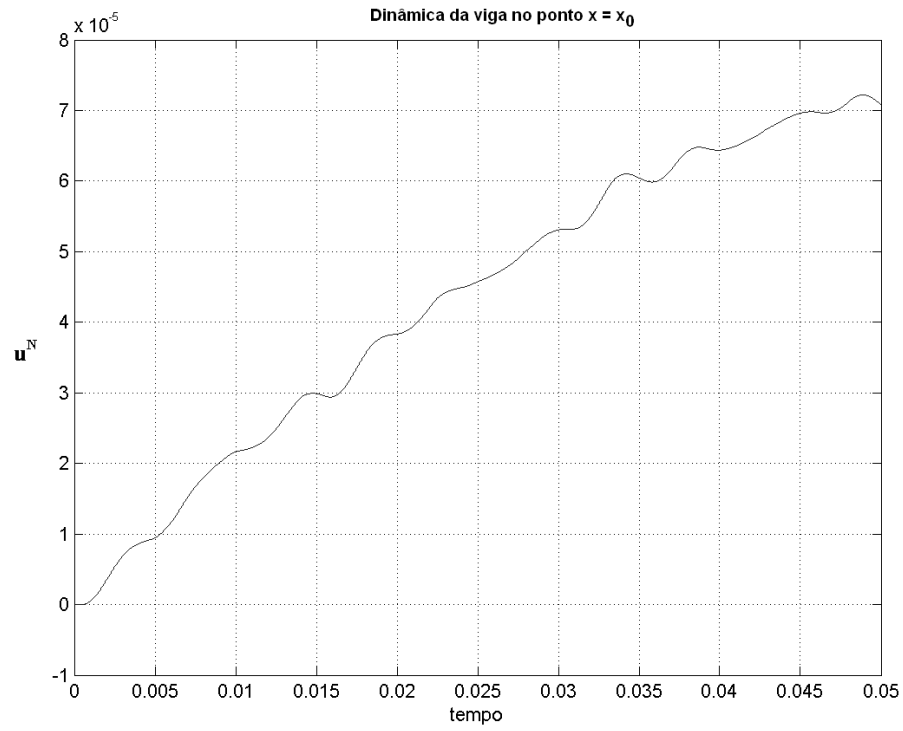
$$\phi^N = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 & \phi_5 \end{bmatrix}_{n \times N}$$

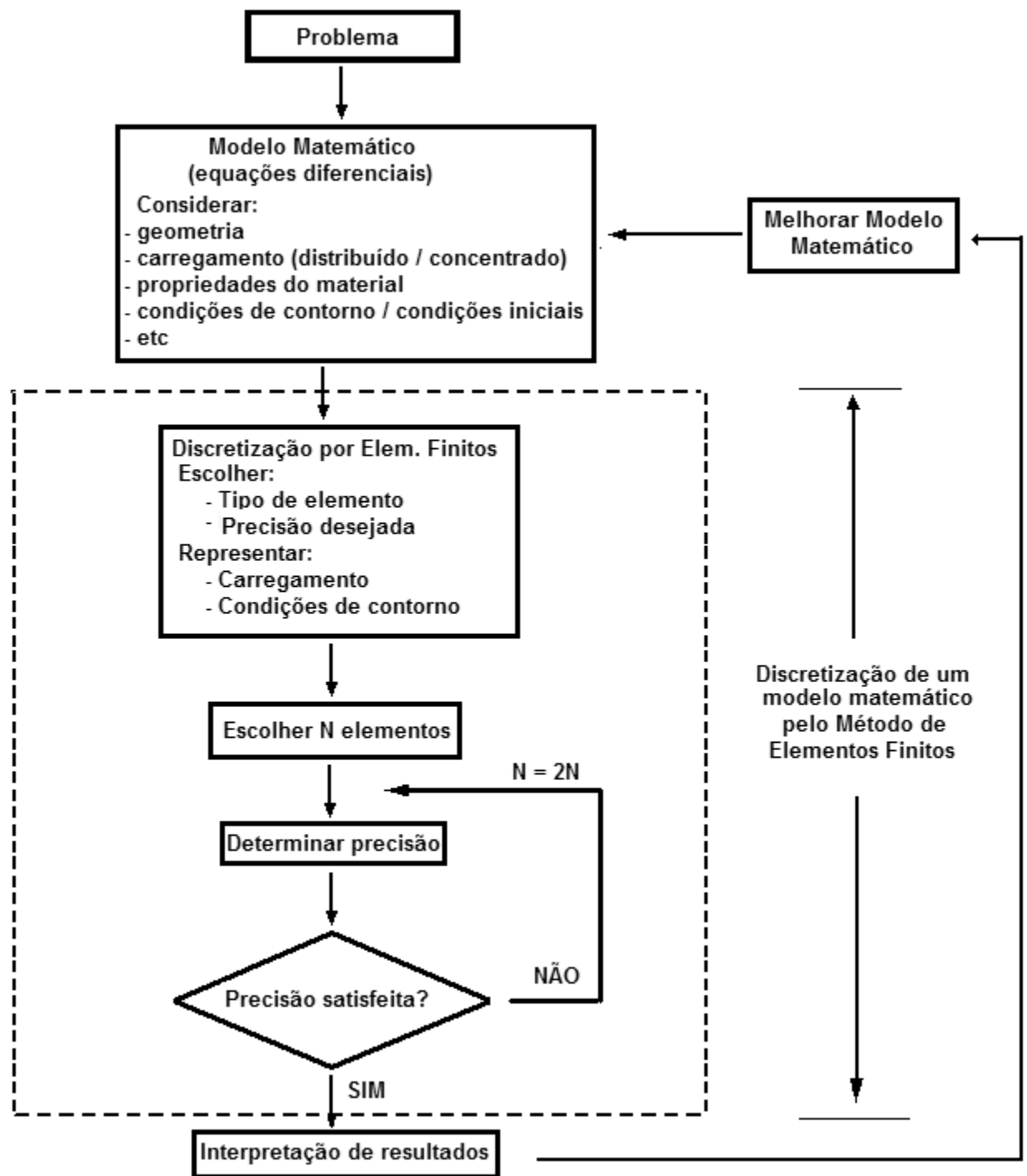
Define-se: $U = \phi^N q$

$$(\phi^N)^T \tilde{M} \phi^N \ddot{q} + (\phi^N)^T \tilde{K} \phi^N q = (\phi^N)^T \tilde{F}$$

Equação reduzida:

$$M^N \ddot{q} + K^N q = F^N$$





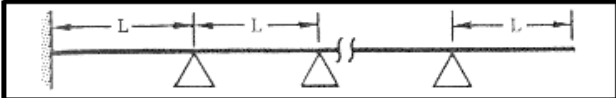
							$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \left(\frac{EI}{m} \right)^{1/2}$
$\lambda_i = \lambda_i$ (Number of Spans)							
Number of Spans (a)	Mode Number (i)						
	1	2	3	4	5	6	
1	1.875	4.694	7.855	11.00	14.14	17.28	
2	1.570	3.923	4.707	7.058	7.842	10.19	
3	1.541	3.570	4.283	4.720	6.707	7.430	
4	1.539	3.403	3.928	4.450	4.723	6.545	
5	1.539	3.316	3.706	4.148	4.538	4.724	
6	1.539	3.265	3.563	3.927	4.292	4.592	
7	1.539	3.233	3.466	3.767	4.086	4.389	
8	1.539	3.213	3.399	3.649	3.926	4.204	
9	1.539	3.198	3.349	3.560	3.802	4.051	
10	1.539	3.187	3.312	3.492	3.703	3.927	
11	1.539	3.179	3.285	3.439	3.624	3.624	
12	1.539	3.173	3.263	3.397	3.559	3.739	
13	1.539	3.168	3.245	3.362	3.507	3.669	
14	1.539	3.165	3.232	3.334	3.463	3.609	
15	1.539	3.162	3.221	3.311	3.427	3.559	

Figura 5.1: Blevis: Viga Engastada-livre com apoios intermediários

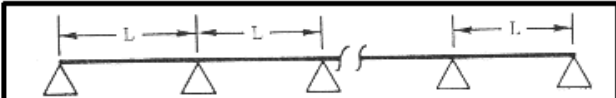
							$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \left(\frac{EI}{m} \right)^{1/2}$
$\lambda_i = \lambda_i$ (Number of Spans)							
Number of Spans (a)	Mode Number (i)						
	1	2	3	4	5	6	
1	3.142	6.283	9.425	12.57	15.71	18.85	
2	3.142	3.927	6.283	7.068	9.424	10.21	
3	3.142	3.557	4.297	4.713	6.707	7.430	
4	3.142	3.393	3.928	4.463	6.283	6.545	
5	3.142	3.310	3.700	4.152	4.550	6.284	
6	3.142	3.260	3.557	3.927	4.293	4.602	
7	3.142	3.230	3.460	3.764	4.089	4.394	
8	3.142	3.210	3.394	3.645	3.926	4.208	
9	3.142	3.196	3.344	3.557	3.800	4.053	
10	3.142	3.186	3.309	3.488	3.700	3.927	
11	3.142	3.178	3.282	3.436	3.621	3.823	
12	3.142	3.173	3.261	3.393	3.557	3.738	
13	3.142	3.168	3.244	3.359	3.504	3.666	
14	3.141	3.164	3.230	3.332	3.460	3.607	
15	3.141	3.161	3.219	3.309	3.424	3.557	

Figura 5.2: Blevis: Viga bi-apoiada com apoios intermediários