

6 Modelagem, Discretização e Simulação

6.1 Modelagem do Rotor

6.1.1 Introdução

O rotor que é tratado nesta Dissertação foi modelado, discretizado e simulações numéricas foram executadas para reconstruir e o problema industrial de forma qualitativa e propor soluções ao problema.

O programa implementado em MATLAB[®] tem as seguintes características:

- Utiliza o modelo de viga de Timoshenko;
- As matrizes de elementos finitos compostas de massa, rigidez, amortecimento, forças giroscópicas e inercia de rotação;
- Cada segmento do rotor pode ter diferentes diâmetros e características materiais;
- Impelidores e discos desbalanceados (com massa concentrada) pode ser acrescentada a um ponto específico. Caso o momento de inércia seja significativo no disco, haverá efeitos de acoplamento;
- Os mancais radiais de deslizamento são dotados de coeficientes de rigidez (k_{zz} , k_{yy} , k_{zy} e k_{yz}) e coeficientes de amortecimento (c_{zz} , c_{yy} , c_{zy} e c_{yz});
- Mancais de escora, com coeficiente de rigidez ka_x e amortecimento ca_x ;
- Executa a análise modal (frequências naturais e modos normais);
- Fornece o Diagrama de Campbell (velocidades críticas);
- Modelo reduzido utilizando-se os modos normais;
- Resposta dinâmica;
- Resposta do Sistema no domínio da frequência.

No entanto há limitações do programa, a saber:

- Apenas respostas em regime constante são implementadas, isto é $\Omega = cte$;
- Cada elemento tem seção de área constante (não foi implementado um elemento cônico);
- Os coeficientes dos mancais são constantes;
- Apenas pequenas rotações e deslocamentos são considerados.

Como Utilizar o Programa

O programa principal chama-se *rotor_principal.m*, que chama outras subrotinas. As três subrotinas principais são: *sub_modosnormais.m*, *sub_dinr.m* e *sub_fft.m*. Considere-se o esquema de rotor-mancal na figura 6.1

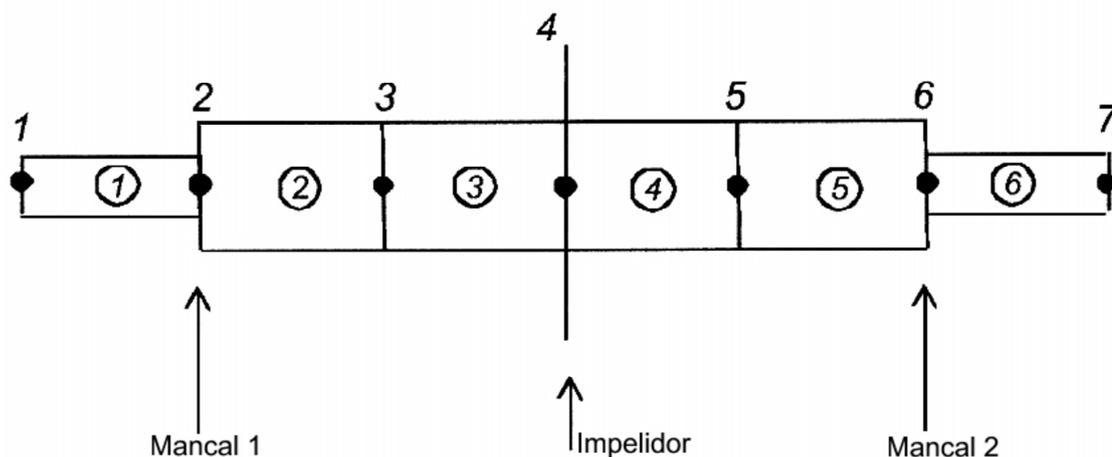


Figura 6.1: Modelo de um sistema rotor-mancal

Neste caso escolheu-se dividir o rotor em seis regiões. Cada região pode ter diferentes características geométricas e propriedades de material diferentes.

- Propriedades do Material: entrar com as propriedades do material de cada região (quantas se queiram).

Módulo de Elasticidade: $lE = [E_1 E_2 \dots E_6]$;

Densidade: $l_{\rho} = [\rho_1 \rho_2 \dots \rho_6]$;

Coefficiente de Cizalhamento: $l_{\nu} = [\nu_1 \nu_2 \dots \nu_6]$

Fator de Cizalhamento: $l_{k_s} = [k_{s1} k_{s2} \dots k_{s6}]$

Coefficiente de Amortecimento: $c = c_{viga}$

- Geometria: entrar com as características geométricas de cada região:

Comprimento: $l_L = [L_1 L_2 \dots L_6]$

Diâmetro: $l_{D_e} = [D_{e1} D_{e2} \dots D_{e6}]$

- Mancais: entrar com as localizações e as características:

$$l_{mancal} = [LM1 \ ka_1 \ kyy_1 \ kzz_1 \ kyz_1 \ kzy_1 \ ca_1 \ cyy_1 \ czz_1 \ cyz_1 \ czya_1]$$

$$[LM2 \ ka_2 \ kyy_2 \ kzz_2 \ kyz_2 \ kzy_2 \ ca_2 \ cyy_2 \ czz_2 \ cyz_2 \ czya_2]$$

(no caso de não haver mancal de escora, considerar $ka = 0$.)

LM1= é a localização do mancal número 1. Na figura 6.1 o mancal número 1 está na localização 2.

LM2= é a localização do mancal número 2. Na figura 6.1 o mancal número 2 está na localização 6.

- Disco(massas concentradas): entra com a localização do disco/massa e suas características.

$$l_{Mass} = [M_D \ I_D \ I_{Dp} \ LD]$$

M_D = massa do disco.

I_D = é o momento de inércia do disco $M_D D_D^2 / 8$.

I_{Dp} = momento polar de inércia do disco, $M_D D_D^2 / 16$.

LD = posição do disco. Na figura 6.1 o disco está na localização 4.

- Forças Externas entrar com as forças externas. A velocidade de rotação é Ω rd/s.

$$l_F = [F_{amp} \ \omega_f \ \text{fase} \ \text{dof} \ LF]$$

A figura 6.2 demonstra a ordem dos graus de liberdade do nó.

F_{amp} = é a amplitude da força. Exemplo, se um rotor tem grau de qualidade de balanceamento, Gr, a massa desbalanceada $u_{desb} = Gr M_D / (\Omega 1000)$ e $F_{amp} = u_{desb} \Omega^2$, Ω é a velocidade de rotação do sistema.

ω_f = é a frequência da força aplicada. Para o caso de desbalanceamento, $\omega_f = \Omega$; fase = é a fase da força aplicada, $F = F_{amp} \cos(\omega_f t + \text{fase})$.

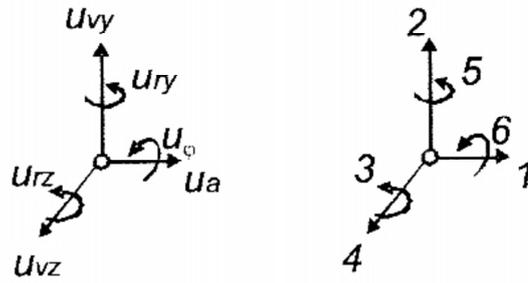


Figura 6.2: Ordem dos graus de liberdade do nó

dof = é o número de graus de liberdade onde a força é aplicada, que pode ser 1, 2 ou 3:

$dof = 1 \rightarrow F_a = F_{amp} \cos(\omega_f t + fase)$ força axial;

$dof = 6 \rightarrow F_t = F_{amp} \cos(\omega_f t + fase)$ força torcional;

$dof = 2 \rightarrow F_y = F_{amp} \cos(\omega_f t + fase)$ força lateral na direção y ;

$e \rightarrow F_z = F_{amp} \cos(\omega_f t + fase)$ força lateral na direção z .

LF = localização onde a força é aplicada. Neste exemplo, a força está aplicada na localização 4.

Gravidade: pode-se considerar a força da gravidade devido ao peso próprio do rotor assim como das massas concentradas (grav=9.81).

- Simulação e Erro entrar com tempo de simulação, o número de modos que se queira executar a simulação (N), e a precisão requerida para a N^{esima} frequência.

tspan [0, 0.01, 0.02, ..., 3] segundos.

N número de modos usados no modelo reduzido.

err máximo erro permissível.

- Erro na Dinâmica: Diversas simulações dinâmicas são salvas ao se elevar N. O programa convergencia-N.m deve ser rodado. Este programa calcula o erro percentual usando a norma H^2 (espaço de Sobolev) da seguinte forma:

Considere-se que $U_5(x, t)$ é a resposta dinâmica do eixo para $N = 5$ e $U_{10}(x, t)$ é a resposta dinâmica do eixo para $N = 10$.

$$erro_{10-5} = 100 \cdot media \left(\frac{er(t)}{er_{ref}(t)} \right). \quad (6-1)$$

onde:

$$er(t) = \int_0^L (U_{10} - U_5)^2 dx + \int_0^L (U'_{10} - U'_5)^2 dx + \int_0^L (U''_{10} - U''_5)^2 dx \quad (6-2)$$

$$er_{ref}(t) = \int_0^L (U_{10})^2 dx + \int_0^L (U'_{10})^2 dx + \int_0^L (U''_{10})^2 dx \quad (6-3)$$

(') é a diferenciação com respeito a x e *media* não significa média no tempo.

6.1.2 Formulação Variacional

Sistemas de equações que modelam o rotor do compressor bp é descrito na seqüência.

Seja Π um funcional definido como:

$$\Pi = \int_{t_1}^{t_2} (U - T - W) dt. \quad (6-4)$$

Onde U descreve a energia potencial de deformação do corpo, T é a energia cinética, e W o trabalho exercido pelas forças externas. Aplicando-se o princípio de Hamilton, [21], pode-se escrever:

$$\delta \Pi = \delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T - W) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta T - \delta W) dt = 0. \quad (6-5)$$

O símbolo δ representa a variação, então, obtém-se a dinâmica igualando-se a primeira variação de Π a zero. Apenas pequenos deslocamentos e rotações serão considerados. A energia cinética pode ser escrita como:

$$T = T_t + T_r. \quad (6-6)$$

Onde T_t e T_r são as energias cinéticas de translação e rotação, respectivamente.

$$T_t = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho A (\dot{u}_a)^2 + \rho A (\dot{u}_{vy})^2 + \rho A (\dot{u}_{vz})^2] dx. \quad (6-7)$$

$$T_r = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho I (\dot{u}_{ry})^2 + \rho I (\dot{u}_{rz})^2 + \rho I (\dot{u}_\varphi^2 - 2\dot{u}_\varphi u_{ry} \dot{u}_{rz})] dx. \quad (6-8)$$

Os dois primeiros termos de T_r são relacionados à inércia de rotação enquanto o último é relacionado com a rotação sobre o eixo próprio e o acoplamento giroscópico (vide anexo 3 para detalhes). A energia potencial

devido à deformação será a soma das energias de deformação:

$$U = U_b + U_a + U_s + U_t. \quad (6-9)$$

Onde U_b é a energia de deformação, U_a é a energia axial, U_s e U_t é a energia torsional.

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(u'_{rz})^2 + EI(u'_{ry})^2] dx. \quad (6-10)$$

$$U_a = \frac{1}{2} \int_0^L [EA(u'_a)^2] dx. \quad (6-11)$$

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^L [GI_p(u'_\varphi)^2] dx. \quad (6-12)$$

$$U_t = \frac{1}{2} \int_0^L [k_s GA(u'_{vy} - u_{rz})^2 + k_s GA(u'_{vz} - u_{ry})^2] dx. \quad (6-13)$$

Onde $(')$ é a derivada com respeito a x .

6.2 Discretização por Elementos Finitos

Considere-se a viga mostrada na figura 6.3 com três graus de liberdade por nó.

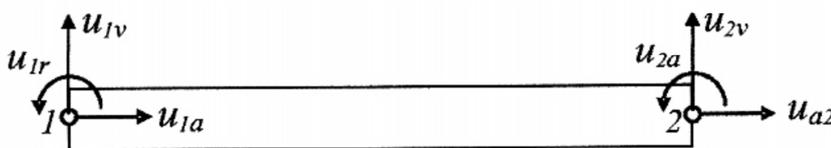


Figura 6.3: Ordem dos graus de liberdade do nó

Os deslocamentos nodais serão aproximados por:

$$\begin{aligned} u_a &= \mathbf{h}_a \mathbf{u}_e, \quad u_v = \mathbf{h}_v \mathbf{u}_e, \quad u_r = \mathbf{h}_r \mathbf{u}_e \\ \mathbf{u}_e^T &= [u_{1a} \ u_{1v} \ u_{1r} \ u_{2a} \ u_{2v} \ u_{2r}]. \end{aligned} \quad (6-14)$$

Onde \mathbf{h}_a , \mathbf{h}_r e \mathbf{h}_v são vetores compostos com as funções de forma para o deslocamento axial, deslocamento vertical e rotação angular respectivamente. Funções Lineares Lagrangeanas são usadas para o

deslocamento axial:

$$\mathbf{h}_a = [(1 - \xi) \ 0 \ 0 \ \xi \ 0 \ 0]. \quad (6-15)$$

onde $\xi = x/l$. As funções de forma para o deslocamento vertical e para a rotação angular são dadas por [14]:

$$\mathbf{h}_v = [0 \ h_{11} \ h_{12} \ 0h_{13} \ h_{14}] \quad (6-16)$$

$$\mathbf{h}_r = [0 \ h_{21} \ h_{22} \ 0h_{23} \ h_{24}] \quad (6-17)$$

Vide anexo 3 para saber de onde são obtidas estas funções. As matrizes dos elementos podem então serem calculadas, como por exemplo:

$$[K]^{(e)} = \int_0^L [EI(\mathbf{b}_e^T \mathbf{b}_e) + k_s GA(\mathbf{b}_s^T \mathbf{b}_s) + EA(\mathbf{b}_a^T \mathbf{b}_a)] dx, \quad (6-18)$$

onde:

$$(b)_e = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{h}_r, \quad (6-19)$$

$$(b)_a = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{h}_a, \quad (6-20)$$

$$(b)_s = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{h}_v - \mathbf{h}_r. \quad (6-21)$$

$$(6-22)$$

A matriz de rigidez do elemento ($[K]^{(e)}$), após a integração se torna:

$$\frac{E}{1 + \varphi} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{A(1 + \varphi)}{l} & 0 & 0 & -\frac{A(1 + \varphi)}{l} & 0 & 0 \\ & \frac{12I}{l^3} & \frac{6I}{l^2} & 0 & -\frac{12I}{l^3} & \frac{6I}{l^2} \\ & & \frac{4I(1 + \varphi/4)}{l} & 0 & -\frac{6I}{l^2} & \frac{2I(1 + \varphi/2)}{l} \\ & & & -\frac{A(1 + \varphi)}{l} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12I}{l^3} & -\frac{6I}{l^2} \\ & & & & & \frac{4I(1 + \varphi/4)}{l} \end{bmatrix}}_{[K]^{(e)}} \begin{pmatrix} u_{1a} \\ u_{1vy} \\ u_{1rz} \\ u_{2a} \\ u_{2vy} \\ u_{2rz} \end{pmatrix} \quad (6-23)$$

A figura 6.4 mostra os graus de liberdade quando se considera um sistema tridimensional.

$u_a \rightarrow$ deslocamento axial (direção x); $u_{vy} \rightarrow$ deslocamento lateral na direção y ;

$u_{rz} \rightarrow$ rotação sobre o eixo z ; $u_{vz} \rightarrow$ deslocamento lateral na direção z ;

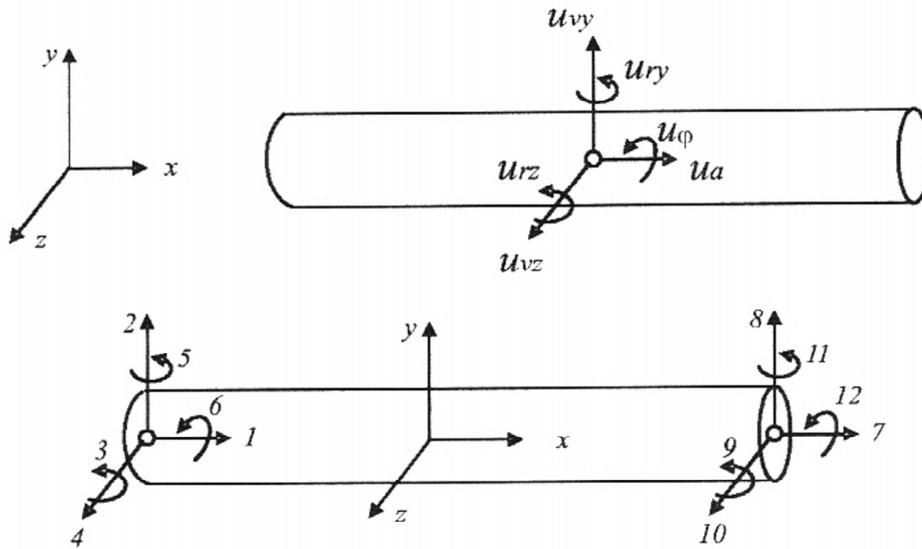


Figura 6.4: Graus de Liberdade

$u_{ry} \rightarrow$ rotação sobre o eixo y ; $u_{varphi} \rightarrow$ rotação sobre o eixo x .

Se se considera a dimensão z e se considera a deformação torsional, a matriz $12 \times 12 [K]^{(e)}$ se torna:

$$\frac{EI}{l^3(1+\varphi)} \begin{bmatrix} K_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K01 & K03 & 0 & 0 & 0 & 0 & K04 & K03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K03 & K02 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K03 & K05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K01 & -K03 & 0 & 0 & 0 & 0 & K04 & -K03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K03 & K02 & 0 & 0 & 0 & 0 & K03 & K05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Kt & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Kt \\ -K_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K04 & -K03 & 0 & 0 & 0 & 0 & K01 & -K03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K03 & K05 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K03 & K02 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K04 & K03 & 0 & 0 & 0 & 0 & K01 & K03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K03 & K05 & 0 & 0 & 0 & 0 & K03 & K02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Kt & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Kt \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{1a} \\ u_{1vy} \\ u_{1ry} \\ u_{1rz} \\ u_{1vz} \\ u_{1ry} \\ u_{1\varphi} \\ u_{2a} \\ u_{2vy} \\ u_{2rz} \\ u_{2vz} \\ u_{2ry} \\ u_{2\varphi} \end{pmatrix} \quad (6-24)$$

Deve-se ter atenção com os sinais. Onde $K_a = EA/l$, $Kt = GI_p/l$, $K01 = 12$, $K02 = 4l^2(1 + \varphi/4)$, $K03 = 6l$, $K04 = -12$, $K05 = 2l^2(1 - \varphi/2)$. A matriz de elementos usada no programa foi a desenvolvida por Piovan e Sampaio.

6.2.1 Sistema Discretizado

Após a discretização o problema se torna:

$$[M]\ddot{\mathbf{u}}(t) + [C + G]\dot{\mathbf{u}}(t) + [K]\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (6-25)$$

onde, $[M]$ é a matriz de massa, $[C] = \frac{c}{\rho A}[M]$ é a matriz de amortecimento, $[K]$ é a matriz de rigidez e $[G]$ a matriz giroscópica. As matrizes $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são simétricas positivo-definidas e $[G]$ é uma matriz anti-simétrica. A resposta do sistema é \mathbf{u} e \mathbf{f} é o vetor-forçamento.

6.2.2 Mancais de Deslizamento

Os mancais de deslizamento são modelados com coeficientes de rigidez e amortecimento, assim os elementos da matriz podem incluir seus elementos. Se o mancal está num nó quatro, por exemplo, figura 6.1, a matriz do elemento cinco deve considerar o seguinte termo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_a & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_y & 0 & k_{yz} & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & k_{zy} & 0 & k_z & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \dots & & & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}}_{=[K]_b^{(5)}} \begin{pmatrix} u_{1a} \\ u_{1vy} \\ u_{1rz} \\ u_{1vz} \\ u_{1ry} \\ u_{1\varphi} \\ \dots \\ u_{2\varphi} \end{pmatrix} \quad (6-26)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_a & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_y & 0 & c_{yz} & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & c_{zy} & 0 & c_z & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \dots & & & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}}_{=[C]_b^{(5)}} \begin{pmatrix} \dot{u}_{1a} \\ \dot{u}_{1vy} \\ \dot{u}_{1rz} \\ \dot{u}_{1vz} \\ \dot{u}_{1ry} \\ \dot{u}_{1\varphi} \\ \dots \\ \dot{u}_{2\varphi} \end{pmatrix} \quad (6-27)$$

onde $[K]_b$ é uma matriz 12×12 . É importante observar que este termo será adicionado apenas no termo cinco da matriz (não no quatro e cinco).

**6.2.3
Discos**

Caso haja um disco no elemento número quatro, por exemplo, os seguintes termos devem ser considerados:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_d & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_d & & 0 \\ \dots & & & & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=[M_d]^{(5)}} \begin{pmatrix} \ddot{u}_{1a} \\ \ddot{u}_{1vy} \\ \ddot{u}_{1rz} \\ \ddot{u}_{1vz} \\ \ddot{u}_{1ry} \\ \ddot{u}_{1\varphi} \\ \dots \\ \ddot{u}_{2\varphi} \end{pmatrix} \quad (6-28)$$

Onde $[M_d]$ é a matriz 12×12 . É importante observar que este termo será adicionado apenas no elemento cinco da matriz (não será adicionado ao elemento quatro e cinco).

**6.2.4
Acoplamento Giroscópico**

Deve-se considerar a matriz giroscópica se há um disco no nó quatro, por exemplo, o seguinte termo deve ser considerado:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_p\Omega & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & I_p\Omega & 0 & 0 & & 0 \\ \dots & & & & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=[G_p]^{(5)}} \begin{pmatrix} \dot{u}_{1a} \\ \dot{u}_{1vy} \\ \dot{u}_{1rz} \\ \dot{u}_{1vz} \\ \dot{u}_{1ry} \\ \dot{u}_{1\varphi} \\ \dots \\ \dot{u}_{2\varphi} \end{pmatrix} \quad (6-29)$$

Onde $[G_p]$ é uma matriz 12×12 . É importante observar que este termo será adicionado apenas no elemento cinco da matriz (não será adicionado ao elemento quatro e cinco).

6.2.5 Análise Modal-Síntese

As frequências naturais e os modos normais são obtidos resolvendo-se o problema de autovalor:

$$(\omega_i[M] + [K])\Phi = \mathbf{0}, \quad (6-30)$$

onde ω_i é a $i^{ésima}$ frequência natural, $[M]$ e $[K]$ são as matrizes de massa e rigidez e Φ_i é o $i^{ésimo}$ modo de vibração. Sabe-se que:

$$\Phi_i^T[M]\Phi_i = 1, \quad \Phi_i^T[K]\Phi_i = \omega_i^2 \quad (6-31)$$

onde $\xi = \frac{c_i}{c_{i,critico}}$ é a razão de amortecimento do primeiro modo, e $c_{i,crit} = 2\sqrt{m_i k_i}$. A oscilação do sistema amortecido é $\omega_{di} = \omega_i \sqrt{i - \xi^2}$.

6.2.6 Diagrama de Campbell

A frequência de oscilação muda com a rotação do rotor (Ω). O diagrama de Campbell mostra esta curva. Reescrevendo-se o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & -[M] \\ [K] & [C + G(\Omega)] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (6-32)$$

Se

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}, \quad (6-33)$$

então

$$\dot{\mathbf{y}} = [A]\mathbf{y}. \quad (6-34)$$

Onde,

$$[A(\Omega)] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [M]^{-1}[K] & [M]^{-1}[C + G(\Omega)] \end{bmatrix}. \quad (6-35)$$

Propõe-se uma solução para a equação 6-35 do tipo: $\mathbf{y} = \psi e^{\lambda t}$, obtém-se o seguinte problema de autovalor:

$$\lambda \psi e^{\lambda t} = [A]\psi e^{\lambda t} \rightarrow ([A] - \lambda[I])\psi = 0. \quad (6-36)$$

Onde ψ são os modos complexos do sistema e $\lambda = \sigma \pm \omega_d(\Omega)$. Para cada Ω haverá uma frequência de oscilação diferente. A parte real, σ está relacionada ao fator de amortecimento e deve ser negativa para um sistema estável. A figura 6.5 mostra um exemplo de diagrama de Campbell.

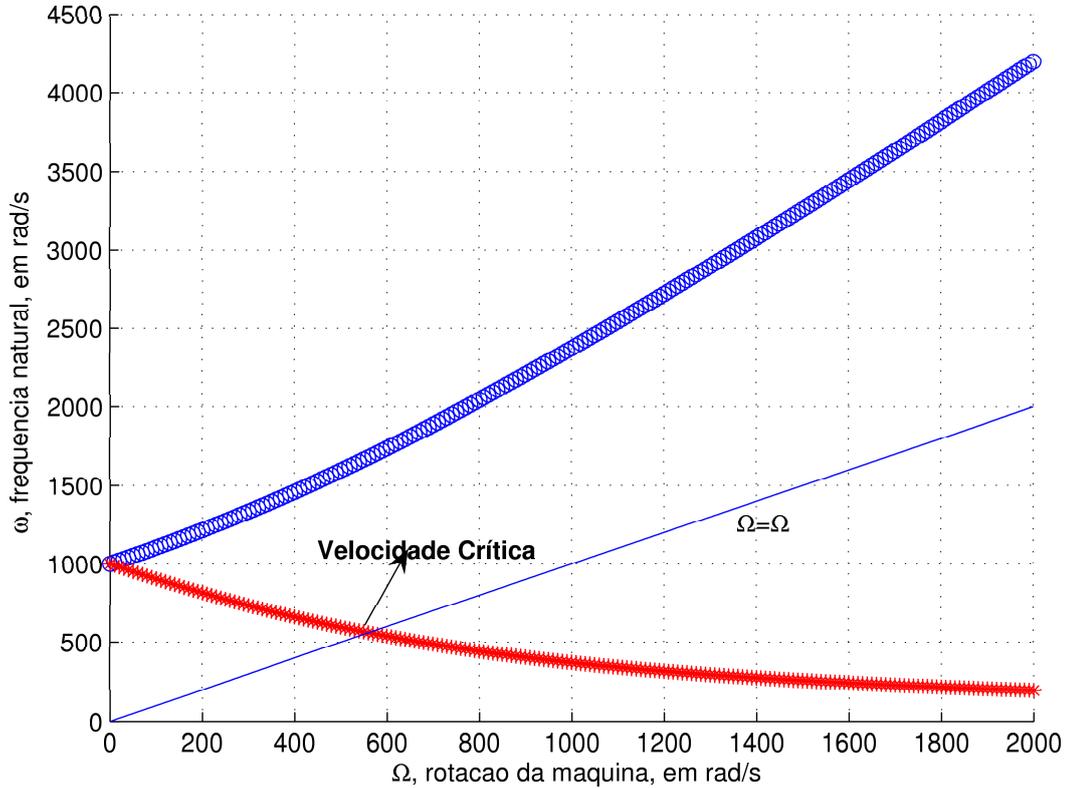


Figura 6.5: Diagrama de Campbell

O ponto onde a curva da frequência intercepta a reta onde $(\Omega = \omega)$ é o ponto onde a velocidade é crítica.

6.2.7 Redução de Modelo Usando Modos Normais

O modelo considerado na simulação numérica do rotor do compressor de ar *bp*, utilizando-se o método de elementos finitos é:

$$[M]\ddot{\mathbf{u}}(t) + [C + G]\dot{\mathbf{u}}(t) + [K]\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (6-37)$$

As matrizes $[M]$, $[C+G]$ e $[K]$ têm dimensão $\mathbb{R}^{m \times m}$. Considerando-se $[\Phi]$ composto de n modos normais, e dimensões $\Phi^{n \times m}$, ($n \ll m$), faz-se a mudança de variáveis:

$$\mathbf{u}(t) = [\Phi]\mathbf{q}(t). \quad (6-38)$$

A equação 6-38 torna-se então:

$$[M][\Phi]\ddot{\mathbf{q}}(t) + [C + G][\Phi]\dot{\mathbf{q}}(t) + [K][\Phi]\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (6-39)$$

A matriz $[\Phi]$ é composta por vetores ortogonais, Φ_i , que gera um subespaço reduzido no qual a dinâmica será projetada. A decomposição linear pode ser escrita como: $u(t, x) = \sum_{i=1}^n a_i(t)\phi_i(x)$. Projetando-se a dinâmica no espaço gerado pela nova base:

$$[\Phi]^T[M][\Phi]\ddot{\mathbf{q}}(t) + [\Phi]^T[C + G][\Phi]\dot{\mathbf{q}}(t) + [\Phi]^T[K][\Phi]\mathbf{q}(t) = [\Phi]^T\mathbf{f}(t). \quad (6-40)$$

onde $[M_r] = [\Phi]^T[M][\Phi]$, $[C_r] = [\Phi]^T[C + G]$, $[K_r] = [\Phi]^T[K][\Phi]$ e $\mathbf{f}_r = [\Phi]^T\mathbf{f}$. Pode-se observar que o novo sistema tem dimensão $\mathbb{R}^{n \times n}$, então o problema da dimensão $m \times m$ para $n \times n$, $n \ll m$. Pode-se deprender que o tempo de integração de um modelo reduzido é muito menor.

6.3 Simulação

É necessário reproduzir numericamente os dados da análise modal de campo, obtida no fabricante original do compressor *bp* e da dinâmica do rotor considerando-se inicialmente o mesmo como um corpo dotado de elasticidade e rigidez na direção axial e lateral também.

É necessário também simular-se um forçamento que reproduza os efeitos de ressonância observados na figura precedente 7.1.

Os desenho do rotor do compressor *bp* e suas seções para efeito de análise modal, considerando-se rigidez infinita nos pontos dos mancais de escora encontra-se na figura 6.3, e os gráficos dos modos e freqüências reais, fornecidas pelo fabricante original do equipamento encontram-se nas figuras 6.3 e 6.3, sendo esta última a interpolação dos pontos da figura 6.3 para efeito de comparação com os modos calculados mostrados nas figuras 6.3, 6.3 e 6.3.

Observa-se que o erro percentual calculado entre os valores numéricos e os reais são:

- 0.0932% para o primeiro modo na 1^a Freqüência;
- 1.2851% para o segundo modo na 2^a Freqüência;
- 1.7681% para o terceiro modo na 3^a Freqüência.

Estes percentuais de erro indicam que o modelo matemático do programa em *Matlab*[®], **rotor-axial.m**, está coerente com os resultados obtidos em bancada.

Embora a geometria de fabricação do eixo não fosse fornecida pelo fabricante, obtiveram-se valores dimensionais próximos aos valores de fabricação, corroborando-se a coerência do modelo matemático.

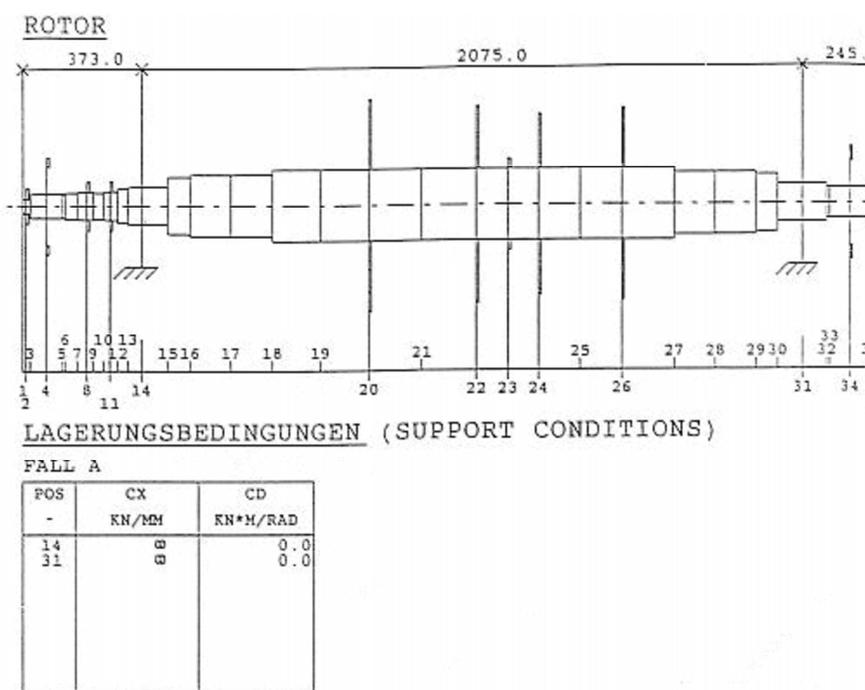


Figura 6.6: Rotor do Compressor *bp* e seções

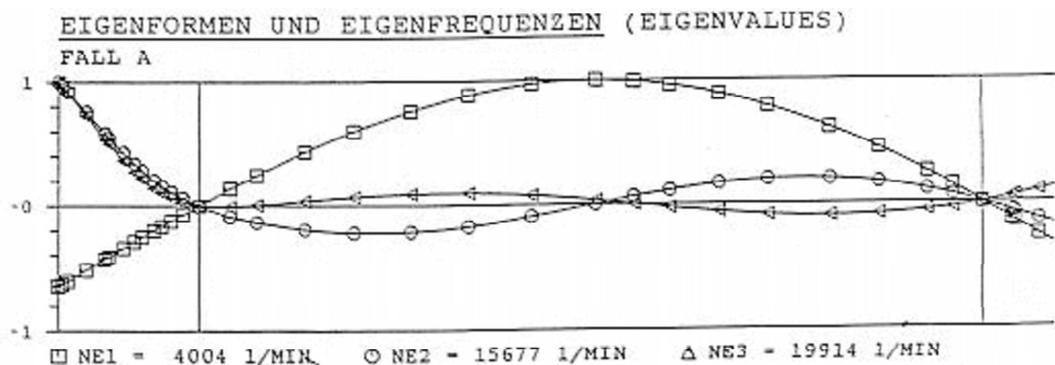


Figura 6.7: Modos e Frequências Naturais do Rotor do Compressor *bp*

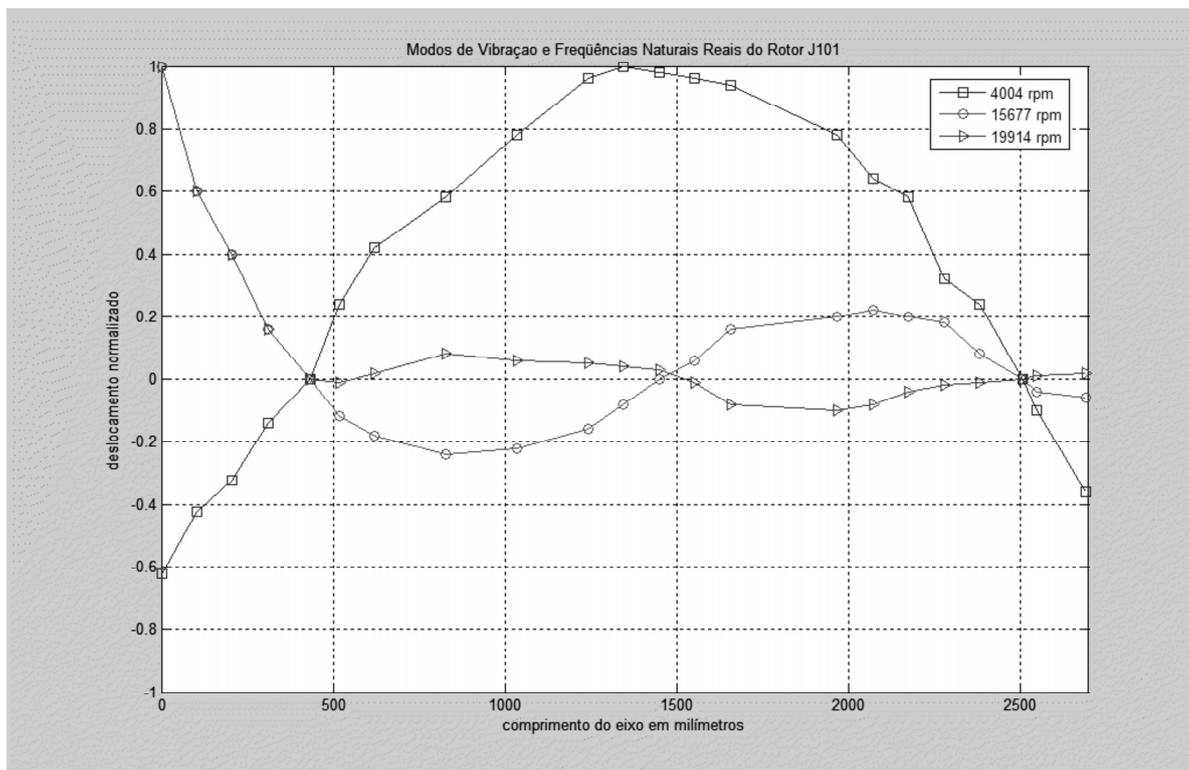


Figura 6.8: Modos nas Frequências Medidas - Interpolação da Curva 6.3

6.3.1

Simulação Dinâmica do Rotor do Compressor *bp*

A interação dos mancais radiais e de escora na formulação da elasticidade e amortecimento do rotor do problema industrial, base desta Dissertação, a traçagem do diagrama de Cambbell para as 5 primeiras frequências naturais é visto na figura 7.1.

Os gráficos de órbita tridimensional e nas posições intermediária e na ponta do eixo do lado do acoplamento também são mostrados nas figuras 6.15 e 6.14 tanto a baixa rotação como a rotação que excita a crítica do rotor (± 18470 RPM).

Na dinâmica do eixo, verifica-se a magnitude do deslocamento *pico* – *a* – *pico* nos gráficos 6.3.1 e 6.3.1 abaixo.

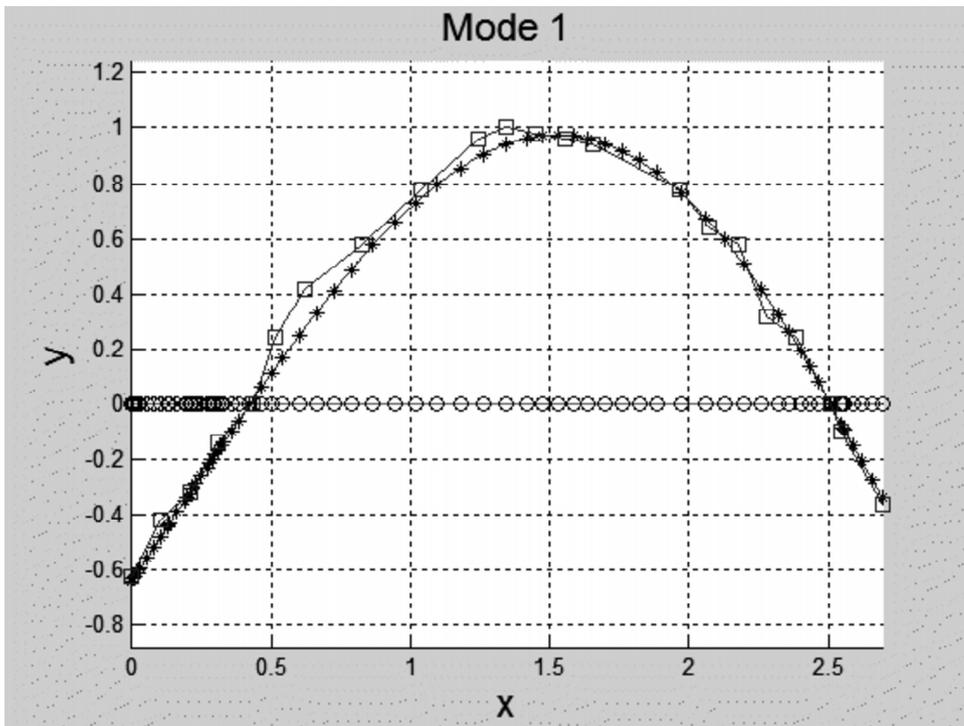


Figura 6.9: 1^o Modo na Frequência Lateral

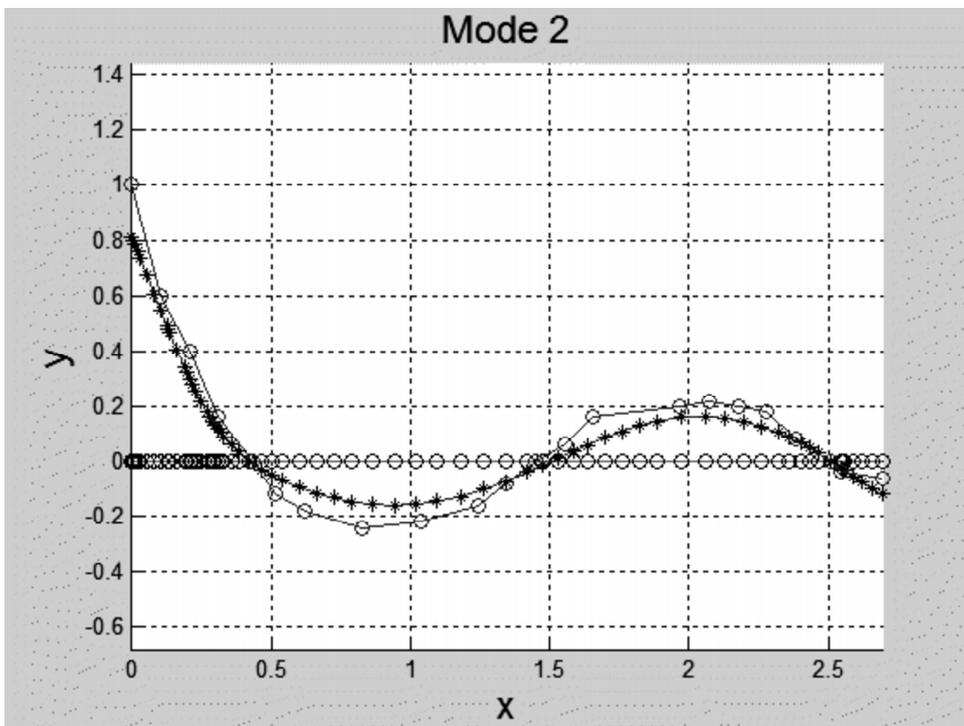


Figura 6.10: 2^o Modo na Frequência Lateral

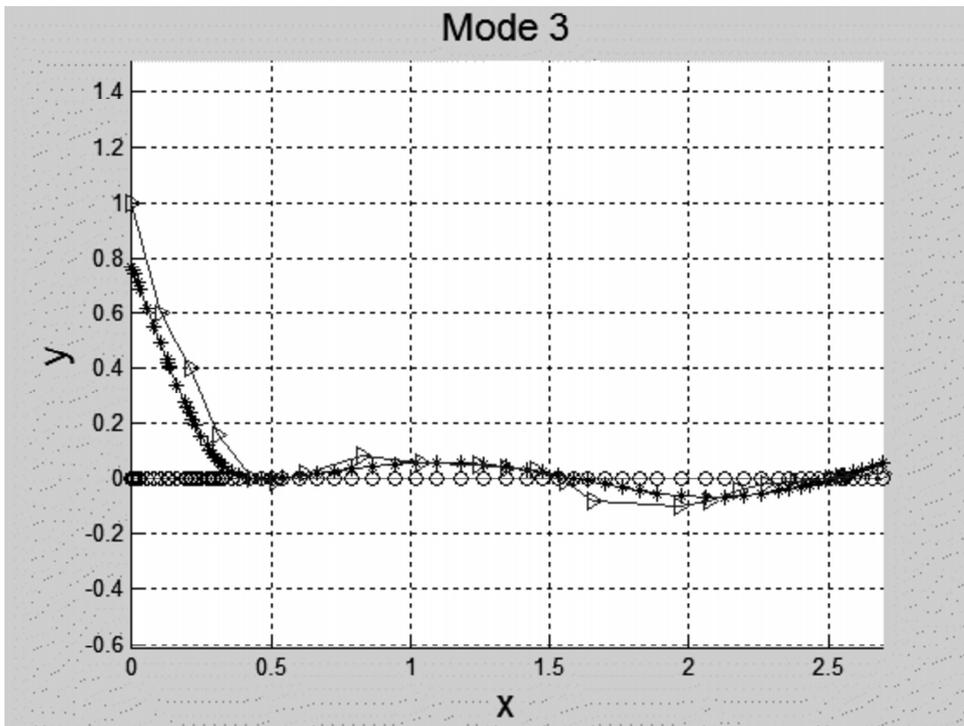


Figura 6.11: 3^o Modo na Frequência Lateral

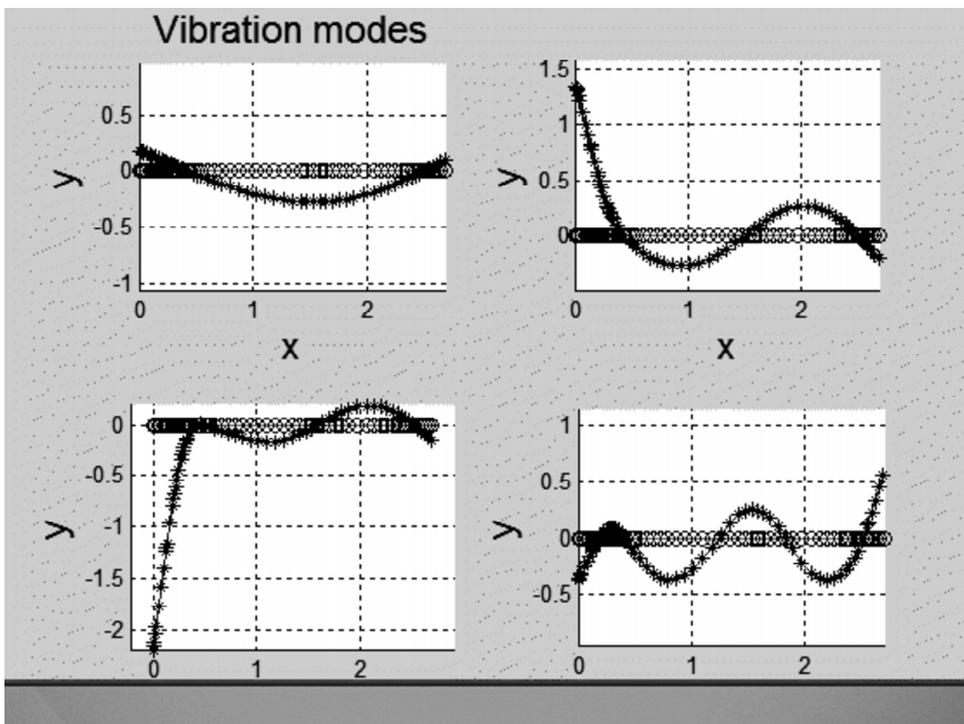


Figura 6.12: Modos nas Frequências Laterais

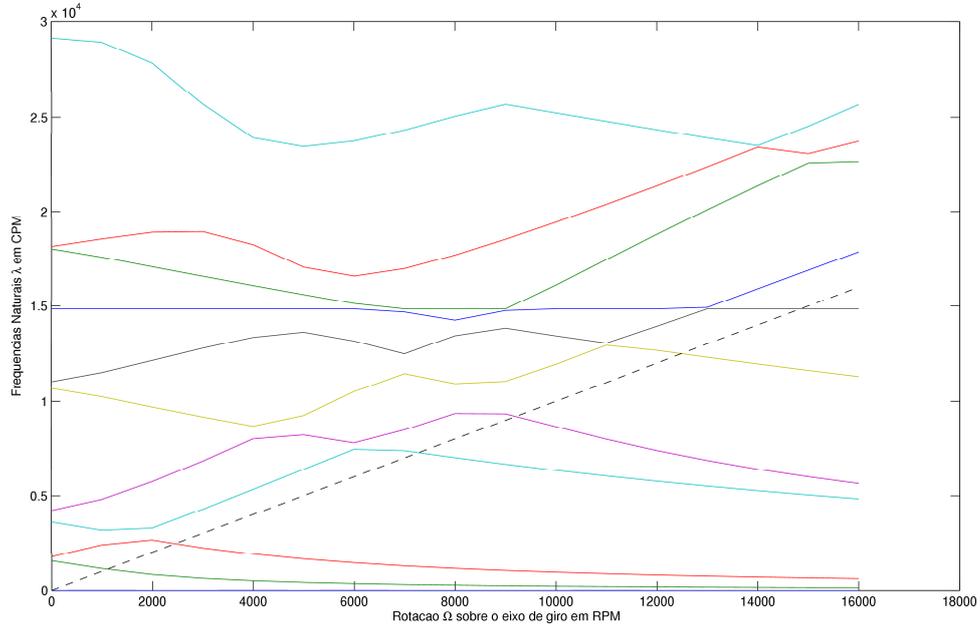


Figura 6.13: Diagrama de Campbell do rotor do compressor *cbp*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511119/CA

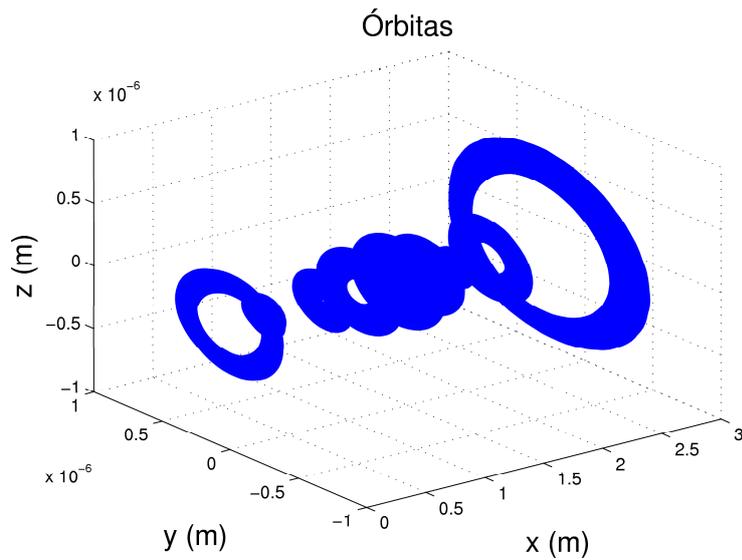


Figura 6.14: Órbita Tridimensional do Rotor do Compressor *bp*

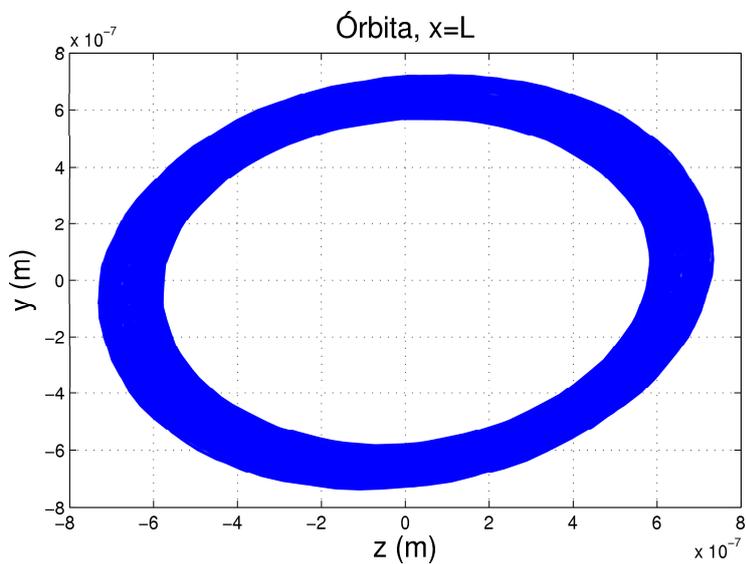


Figura 6.15: Órbita do Rotor do Compressor *bp*

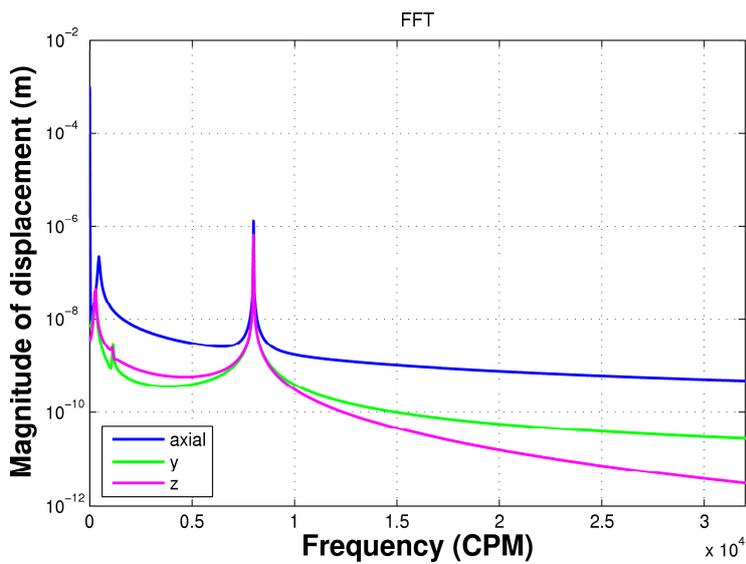


Figura 6.16: Bode (sem a fase) do Compressor *bp* na axial

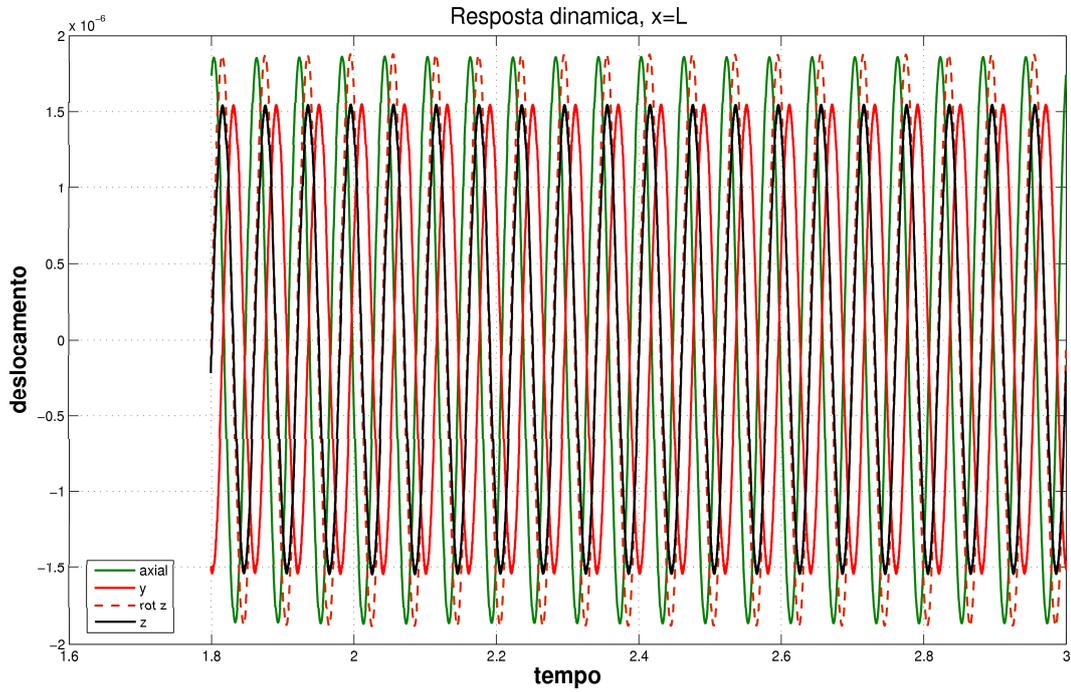


Figura 6.17: Deslocamentos @1000 RPM do eixo do Compressor *bp*

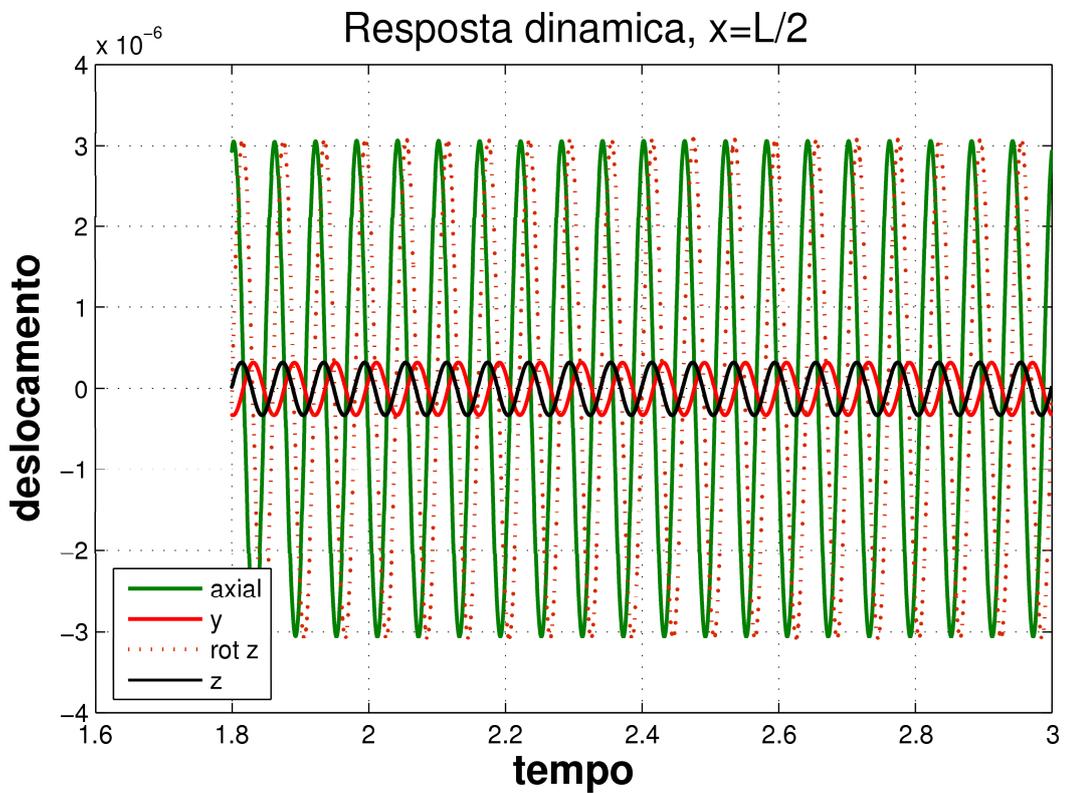


Figura 6.18: Deslocamentos @1000 RPM do eixo do Compressor *bp*

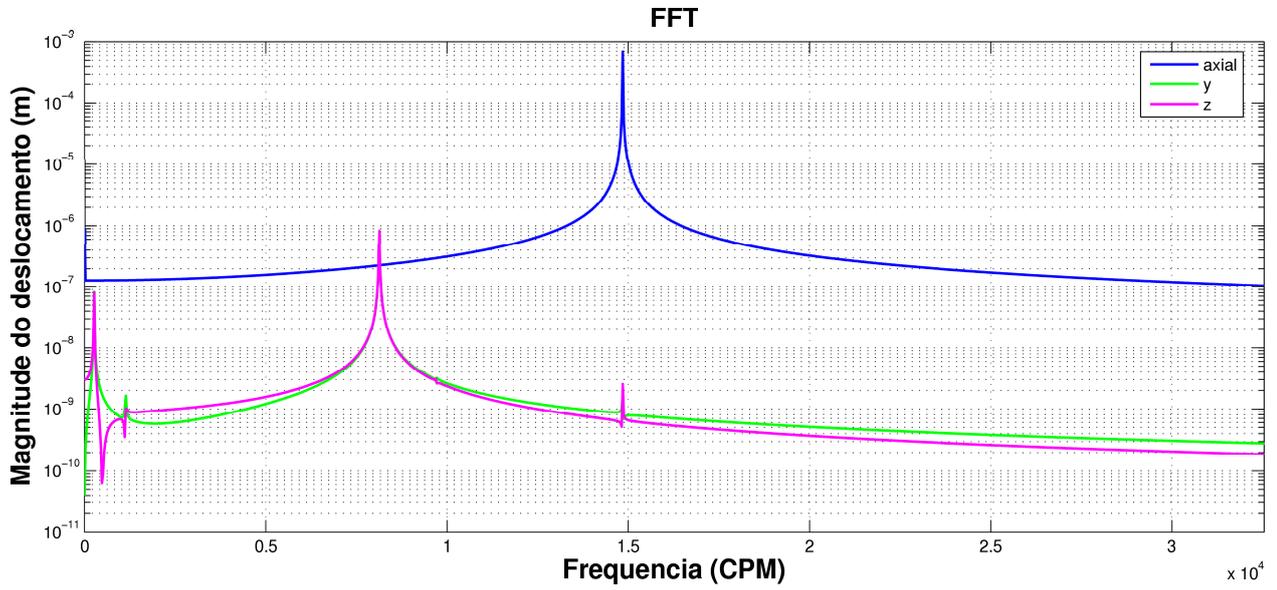


Figura 6.19: Simulação @ $1.8251 \times N_1 \approx N_2$, na axial

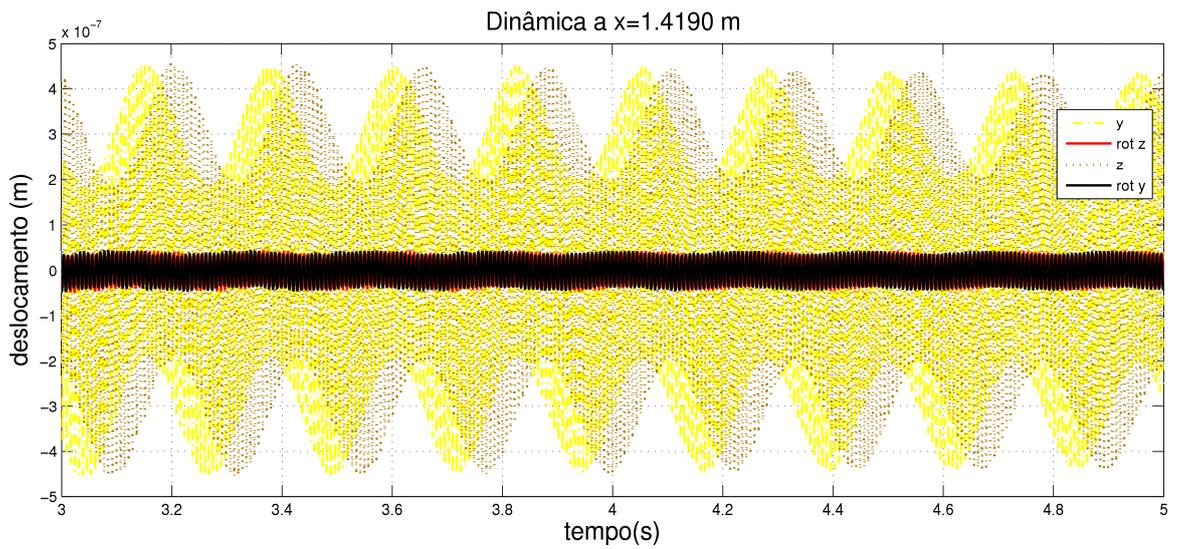


Figura 6.20: Simulação a N_1 e a $1.8251 \times N_1 \approx N_2$, na axial

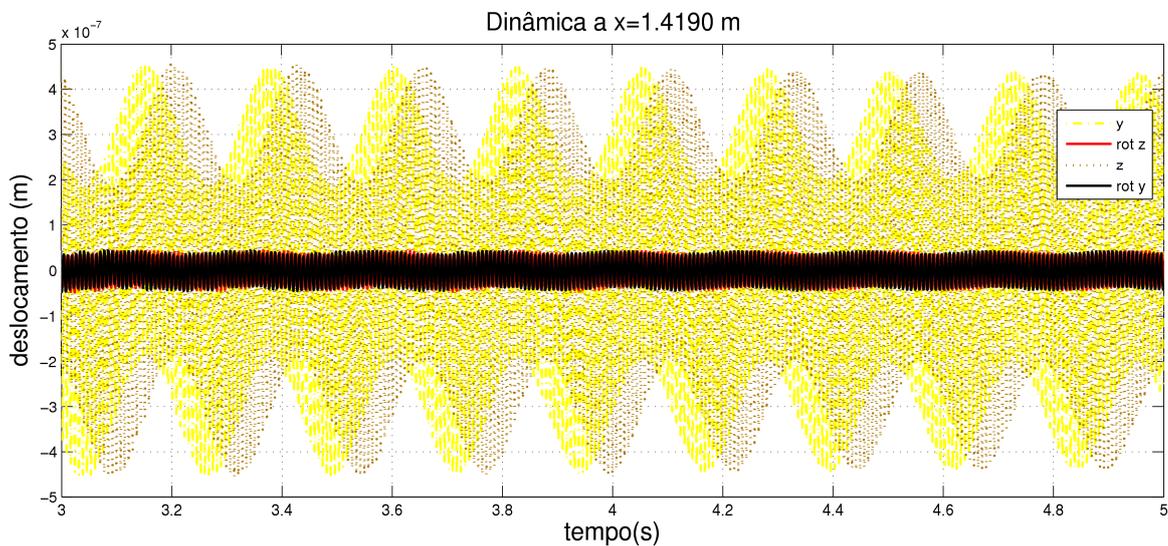


Figura 6.21: Simulação a N_1 e a $1.8251 \times N_1 \approx N_2$, na axial

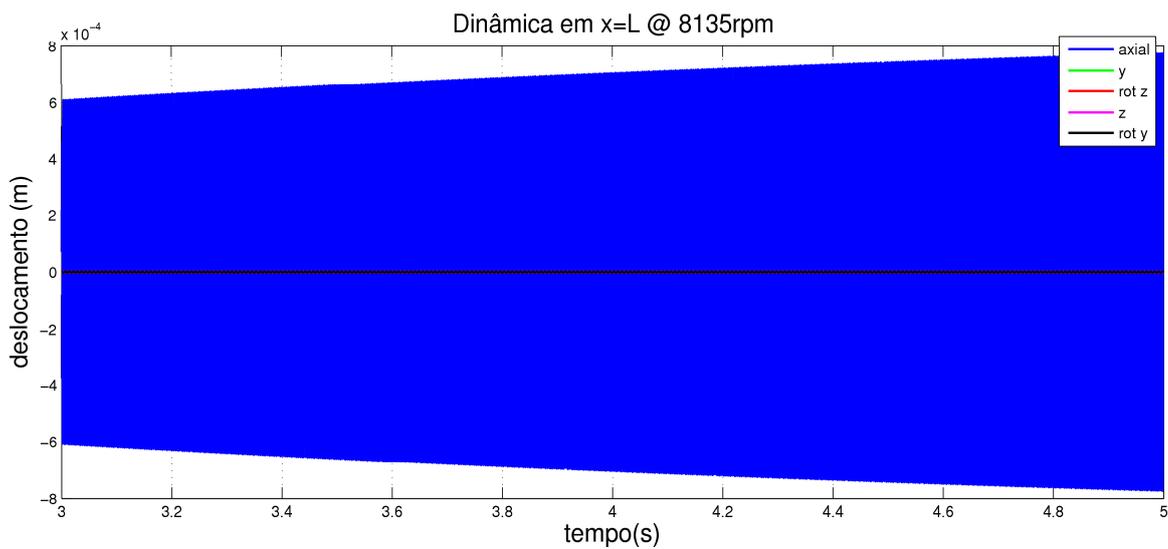


Figura 6.22: Simulação a N_1 e a $1.8251 \times N_1 \approx N_2$, na axial

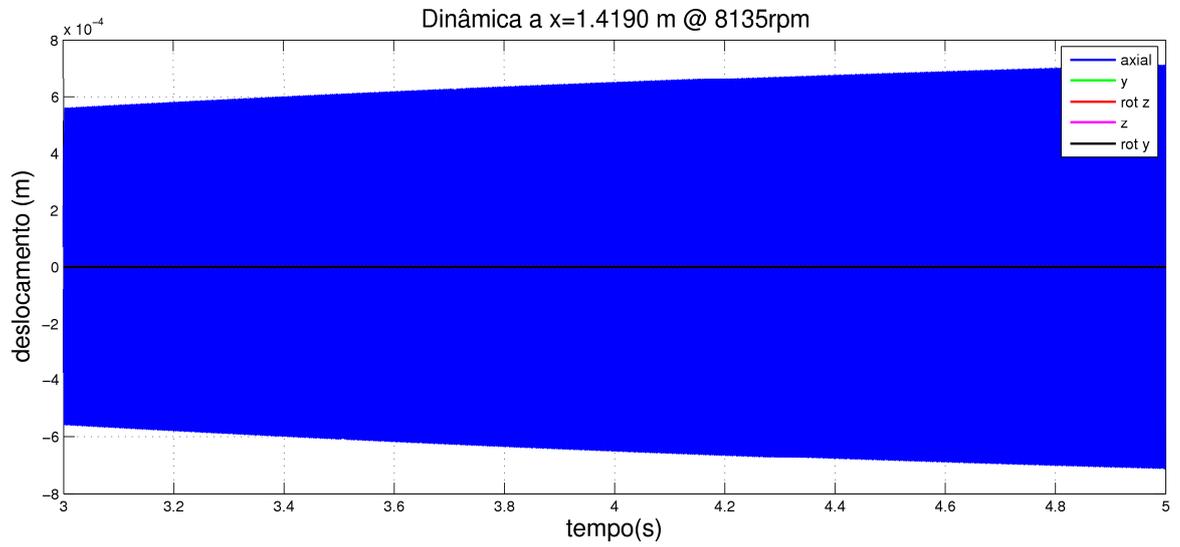


Figura 6.23: Simulação a N_1 e a $1.8251 \times N_1 \approx N_2$, na axial

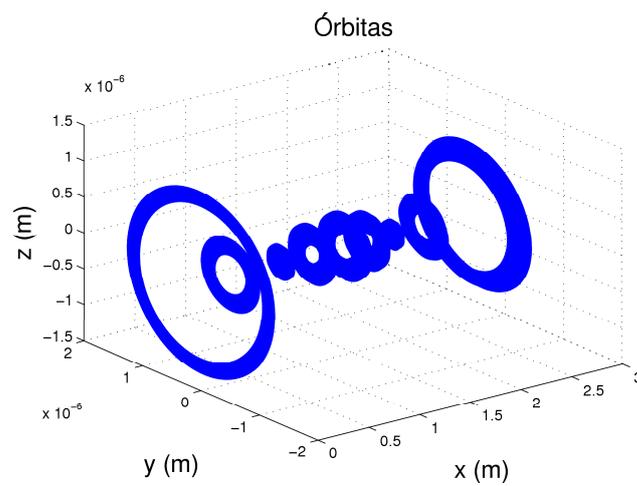


Figura 6.24: Simulação a N_1 e a $1.8251 \times N_1 \approx N_2$, na axial

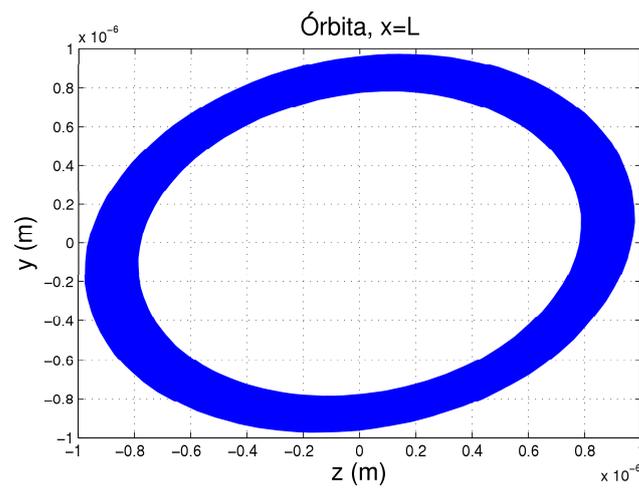


Figura 6.25: Simulação a N_1 e a $1.8251 \times N_1 \approx N_2$, na axial