

4

Simulação de Monte-Carlo: o caso da opção européia

4.1

Definição do método de Monte-Carlo

A opção européia dá ao comprador o direito, mas não a obrigação de comprar ou vender o ativo objeto a um preço determinado, somente em uma data definida.

Os parâmetros envolvidos no cálculo da opção pelo método de Monte-Carlo são:

S_0	O preço atual do ativo objeto
k	O "strike", ou seja, o preço de exercício da opção
T	O tempo até a expiração da opção
r	A taxa livre de risco
v	A volatilidade do título
y	O "dividend yield" do ativo
n	O número de simulações efetuadas

O objetivo da simulação de Monte-Carlo é de realizar, dependendo dos parâmetros do ativo objeto, varias simulações da evolução dos preços e calcular para cada simulação o payoff da opção. Fazendo a média dos payoffs e a atualização desse valor ao tempo de compra da opção, temos o prêmio a ser pago pela opção.

Os preços são simulados como visto no capítulo 3 com a fórmula seguinte:

$$S_T = S_0 e^{\left(r - y - \frac{v^2}{2}\right)T + v \cdot \text{eps} \cdot \sqrt{T}} \quad (1)$$

No vencimento da opção, ou seja, no tempo final, podemos calcular o payoff da opção dependendo do preço do ativo S na data de expiração:

$$PayoffCall = \text{Max}(S - K, 0)$$

$$PayoffPut = \text{Max}(K - S, 0)$$

O parâmetro "eps" é um valor aleatório de uma distribuição normal N(0,1) (média 0 e variância 1), e deve mudar para cada simulação realizada.

Realizando a média dos valores simulados e atualizando ao tempo inicial:

$$PreçoOpção = \frac{\sum_{n=1}^n Payoff_n}{n} \cdot \exp(-r \cdot T) \quad (2)$$

4.2

Exemplo de simulação da opção européia

Usando os seguintes parâmetros da opção:

Preço do ativo no início	S=100
Strike da opção	k=105
Tempo à expiração (ano)	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0
Número de simulações	n=10

Esses valores foram gerados pelo programa Matlab usando as fórmulas citadas acima.

1. Simulação dos preços:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
98,8660	112,4842	93,4073	138,2300	99,5720	104,2274	91,6089	110,3184	74,5464	103,4884

Tabela 2 – Valores numéricos de simulação dos preços

2. Cálculo do payoff para cada simulação:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Opção de compra	0	7,4842	0	33,2300	0	0	0	5,3184	0	0
Opção de venda	6,1340	0	11,5927	0	5,4280	0,7726	13,3911	0	30,4536	1,5116

Tabela 3 – Valores numéricos do payoff

3. Cálculo do preço da opção obtido na simulação:

Média dos payoffs	
Opção de compra	4,6033
Opção de venda	6,9284

Tabela 4 – Valores numéricos da média dos payoffs

4. Atualização das médias calculadas:

$$PreçoOpçãoCompra = 4,6033 \times e^{-0,05.1} = 4,3788$$

$$PreçoOpçãoVenda = 6,9284 \times e^{-0,05.1} = 6,5905$$

4.3

Análise de sensibilidade

Os parâmetros padrões da opção usados pelas análises de sensibilidade são:

Preço do ativo no início	S=100
Strike da opção	k=105
Tempo a expiração (ano)	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0

4.3.1

Sensibilidade em relação ao número de simulações

A precisão da simulação de Monte-Carlo aumenta com o número de simulações. A aproximação da distribuição dos payoffs da opção é mais precisa, quando maiores foram os eventos simulados.

O preço teórico é conhecido e calculado pela fórmula analítica de Black e Scholes.

Número de simulações	10	100	1000	5000	10 000	50 000	100 000	Preço teórico
Preço Opção Compra	3,78	6,19	7,24	8,22	8,10	8,06	8,01	8,0213
Preço Opção Venda	4,91	6,56	7,36	8,01	7,94	7,93	7,89	7,9004
Erro no Call(%)	52,90	22,8	9,75	2,46	1	0,5	0,16	
Erro no Put (%)	37,89	16,91	6,73	1,35	0,56	0,32	0,07	

Tabela 5 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações

A convergência do cálculo aumentando o número de simulações é verificada. A eficiência desse método de Monte-Carlo é muito grande: com 50 000 simulações e um tempo computacional de alguns segundos, a precisão cai por baixo de 1% em comparação ao preço teórico dado pela fórmula de Black e Scholes. Com 100 000, o resultado é quase igual.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.1.

4.3.2

Sensibilidade em relação ao preço de exercício

Variando o preço de exercício somente, e usando 100 000 simulações para conservar a precisão obtemos os seguintes valores:

Preços de exercício	Opção de Compra	Opção de venda
90	16,74	2,33
92	15,29	2,81
94	13,97	3,39
96	12,71	4,03
98	11,53	4,77
100	10,43	5,56
102	9,41	6,43
104	8,48	7,40
106	7,58	8,41
108	6,79	9,52
110	6,02	10,65

Tabela 6 - Valores das opções – Sensibilidade em relação ao preço de exercício

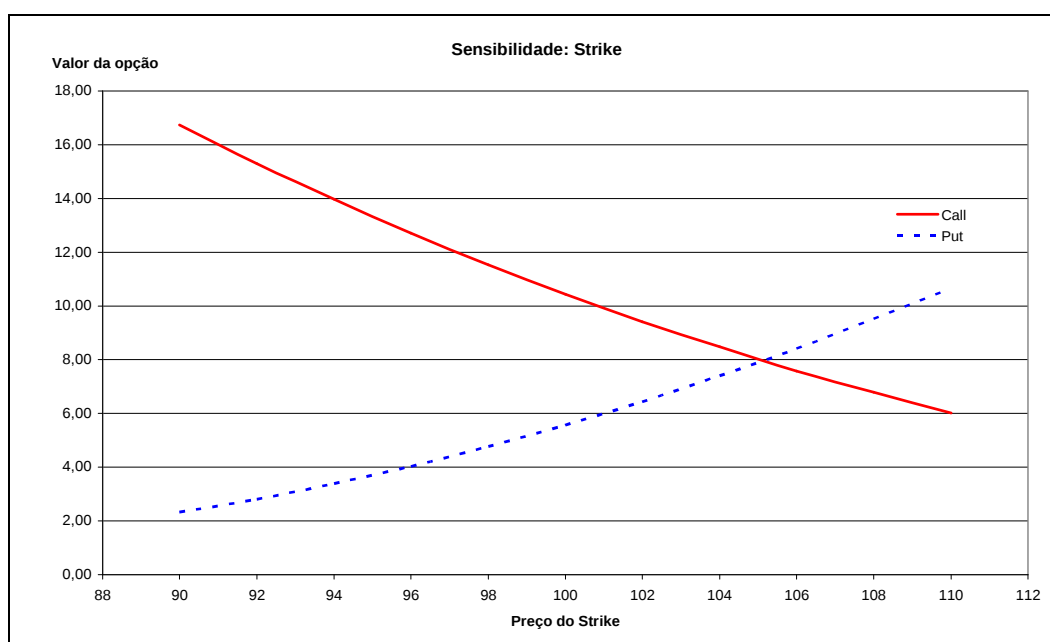


Figura 6 – Gráfico de sensibilidade das opções em relação ao preço de exercício

Mudando o preço do strike de 90 para 95, o preço da opção de compra varia de $-3,5$ e da opção de venda $+1,5$, mas só de -2 (*call*) e $+2,5$ (*put*) quando o strike passa de 105 a 110. Isso demonstra que a opção de compra fica mais sensível que a opção de venda na mudança do preço de exercício. O preço de uma opção é mais sensível quando ela está "*deep-in-the-money*" no instante inicial, seja com preço de exercício baixo para a opção de compra, e preço de exercício alto para a opção de venda.

4.3.3

Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade

Variando a volatilidade do ativo somente, e usando 100 000 simulações para conservar a precisão obtemos os seguintes valores:

Volatilidade (%)	Opção de compra	Opção de venda
5	2,05	1,93
9	3,65	3,53
13	5,25	5,12
17	6,84	6,71
21	8,42	8,30
25	10,00	9,89
29	11,59	11,47
33	13,16	13,04
37	14,73	14,61
41	16,29	16,17
45	17,86	17,74

Tabela 7 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade

A volatilidade do título se torna uma variável decisiva na análise de sensibilidade. Quanto mais alta a volatilidade, mais alto será o preço. No aumento da volatilidade, aumenta também a incerteza nos preços futuros do ativo. Há assim mais oportunidades para a opção de acabar "*deep-in-the-money*" no vencimento, ou seja, de poder ser exercida. Ela fica logicamente mais cara.

Aumentando a volatilidade de 13 para 37 (multiplicando por 3 aproximadamente), o preço da opção se multiplica por 3 também, mostrando uma relação quase linear entre o aumento da volatilidade e do preço da opção, cujo coeficiente depende dos outros parâmetros escolhidos para o cálculo do preço da opção.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.2.

4.3.4

Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco

Variando a taxa livre de risco somente, e usando 100 000 simulações para conservar a precisão obtemos os seguintes valores:

Taxa livre de risco (%)	Opção de compra	Opção de venda
1	6,29	10,25
2	6,71	9,63
3	7,13	9,03
4	7,57	8,45
5	8,02	7,90
6	8,50	7,38
7	8,98	6,88
8	9,48	6,40
9	9,99	5,95
10	10,51	5,52
11	11,05	5,11

Tabela 8 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco

A variação do preço com a taxa livre de risco não é muito importante e em média:

Opção de compra: + 0,45 para cada 1% na taxa a mais. (modelo linear)

Opção de venda: – 0,55 para cada 1% na taxa a mais. (modelo linear)

Existe uma relação quadrática para relacionar o preço e a taxa livre de risco, com os outros parâmetros da opção constante, mas com coeficientes quadráticos bastante fracos.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.3.