

5

Decomposição de Helmholtz-Hodge

Com os dados obtidos na resolução de um problema em DFC, a interpretação dos mesmos se torna necessária. A *visualização científica* (8) desempenha um papel importante nessa área. Esta tese tem como um de seus propósitos a visualização científica de campos vetoriais, mais precisamente a visualização de campos vetoriais baseados em suas feições características. Com esse objetivo, é apresentado neste capítulo um novo método de decomposição de campos vetoriais, com o qual é possível a detecção de algumas feições do campo.

Na área de visualização científica, torna-se ineficiente a visualização de campos vetoriais utilizando setas (hedgehogs) ou integrais de linha (streamlines) devido ao tamanho dos dados coletados em uma simulação. Uma abordagem topológica mais eficiente de campos vetoriais é proposta por Helman e Hesselink (45), onde o campo é dividido em regiões de integrais de linha que têm padrões semelhantes. Uma outra possibilidade é localizar *feições características* do campo. Embora não exista uma definição geral do que é uma feição, entende-se como feição um certo padrão ou uma estrutura do dado a ser interpretado. Feições podem ser descritas por pontos, linhas e regiões do dado.

Entre as principais feições de um campo vetorial, encontram-se as feições conhecidas como *fontes*, *sorvedouros* e *vórtices*. Todas essas feições são caracterizadas por serem regiões do campo cujo centro $\mathbf{x}$ é um ponto do campo vetorial de velocidade nula $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$. No trabalho de Nielsen (81) encontram-se classificações matemáticas para fontes e sorvedouros. Por outro lado, não existe uma definição rigorosa de vórtice, entendendo-se por vórtice um padrão circular ou espiral que não contém outros padrões.

A detecção de feições características pelo novo método de decomposição de campos vetoriais será apresentado mais adiante nesse capítulo, antes, porém, algumas definições básicas serão dadas.

5.1

Campos Vetoriais e Escalares

Um campo vetorial é uma aplicação que associa um vetor a cada ponto de um domínio. Campos vetoriais são utilizados, por exemplo, na física, para modelar observações em cada ponto de um domínio. Exemplos são o movimento de um fluido, onde a velocidade e a direção de um ponto do domínio são representados por um campo de velocidades; a força gerada por um campo magnético num pólo magnético, ou numa carga elétrica, onde a magnitude e direção dessas forças são representadas por um campo de forças.

Campos vetoriais podem ser vistos como funções vetoriais. Uma função f é chamada de função vetorial se esta mapeia seus argumentos em vetores, isto é, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, com $f(\mathbf{r}) = \mathbf{v}$ onde $\mathbf{r} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$.

Outro tipo de campo que serão vistos são os escalares. Um campo escalar $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ determina para cada ponto $\mathbf{r} \in \Omega$ um escalar $t \in \mathbb{R}$.

Conjuntos de campos vetoriais podem ser definidos de acordo com propriedades especiais dadas por operadores diferenciais. Alguns desses grupos são descritos abaixo.

Campo vetorial potencial. Um campo vetorial $\mathbf{v}$ é chamado de *potencial* se existe um campo escalar φ tal que

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi.$$

O campo escalar φ é então chamado de potencial escalar de $\mathbf{v}$. Se um campo vetorial $\mathbf{v}$ está definido sobre um domínio simplesmente conexo, então $\mathbf{v}$ é um campo potencial se, e somente se, $\mathbf{v}$ é um campo *irrotacional*

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0.$$

Vale mencionar que pela definição acima, o campo escalar associado a um campo vetorial potencial não é único. Como

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi = \nabla (\varphi + c)$$

para todo $c \in \mathbb{R}$, o potencial escalar φ é definido a menos de uma constante.

Campo vetorial solenoidal. Um outro grupo de campos vetoriais é definido por potenciais vetoriais. Um campo vetorial $\mathbf{v}$ é chamado de solenoidal quando

é dado pelo rotacional de um outro campo vetorial Ψ

$$\mathbf{v} = \nabla \times \Psi.$$

O campo Ψ é então chamado de potencial vetorial de $\mathbf{v}$. Um campo vetorial $\mathbf{v}$ é solenoidal se, e somente se, o divergente de $\mathbf{v}$ é nulo

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

De maneira análoga, o potencial vetorial é definido a menos de um campo gradiente, pois

$$\mathbf{v} = \nabla \times \Psi = \nabla \times (\Psi + \nabla \xi)$$

para qualquer campo escalar ξ .

Campo vetorial harmônico. Um campo vetorial $\mathbf{v}$ que é tanto potencial quanto solenoidal, é chamado de *harmônico*. Em um domínio simplesmente conexo um campo harmônico $\mathbf{v}$ é o gradiente de um potencial escalar, que satisfaz a equação diferencial de Laplace

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \quad ; \quad \Delta \phi = 0$$

Portanto, um campo harmônico é chamado também de campo *Laplaciano*.

Um campo harmônico é uma campo potencial, pois é definido pelo gradiente de uma função escalar

$$\mathbf{v} = \nabla \phi.$$

Mais ainda, como

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \Delta \phi = 0$$

um campo harmônico também é um campo solenoidal

$$\mathbf{v} = \nabla \times \Psi.$$

Conseqüentemente um campo harmônico satisfaz

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Ver-se-á, a seguir, que os três tipos de campos apresentados acima são úteis para compreender campos vetoriais mais complexos.

5.2

Decomposição de Helmholtz-Hodge usando SPH

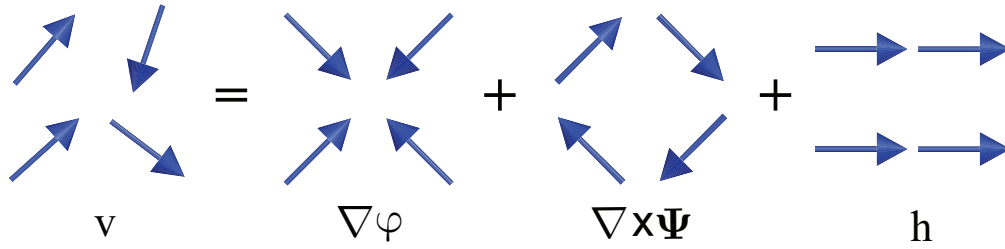


Figura 5.1: Decomposição de Helmholtz-Hodge para um campo vetorial.

Várias áreas de pesquisas têm como resultado final um campo vetorial. Analisar esses campos é necessário para uma melhor compreensão dos resultados obtidos. A decomposição de Helmholtz-Hodge torna essa análise mais simples. Essa decomposição diz que qualquer campo vetorial, definido em uma região simplesmente conexa, pode ser decomposto como soma de três componentes: uma componente com rotacional nulo, outra componente com divergente nulo e uma última componente com laplaciano nulo (Figura 5.1).

Pela decomposição de Helmholtz-Hodge, um campo vetorial $\mathbf{v}$ pode ser decomposto em

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi + \nabla \times \Psi + \mathbf{h}, \quad (5-1)$$

onde φ é um potencial escalar, Ψ é um potencial vetorial e $\mathbf{h}$ é um campo vetorial harmônico.

Devido às propriedades dos operadores diferenciais e do campo harmônico $\mathbf{h}$;

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla\varphi &= 0 \\ \nabla \cdot \nabla \times \Psi &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{h} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{h} &= 0 \end{aligned}$$

pode-se utilizar o seguinte sistema de equações diferenciais parciais para encontrar os potenciais associados às componentes do campo:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla\varphi) \\ \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\nabla \times \Psi) \end{cases} \quad (5-2)$$

O campo vetorial $\mathbf{d} = \nabla\varphi$ é chamado de parte com rotação nula ou *irrotacional* de $\mathbf{v}$, e o campo vetorial $\mathbf{r} = \nabla \times \Psi$ é chamado de parte com divergência nula ou *solenoidal* de $\mathbf{v}$.

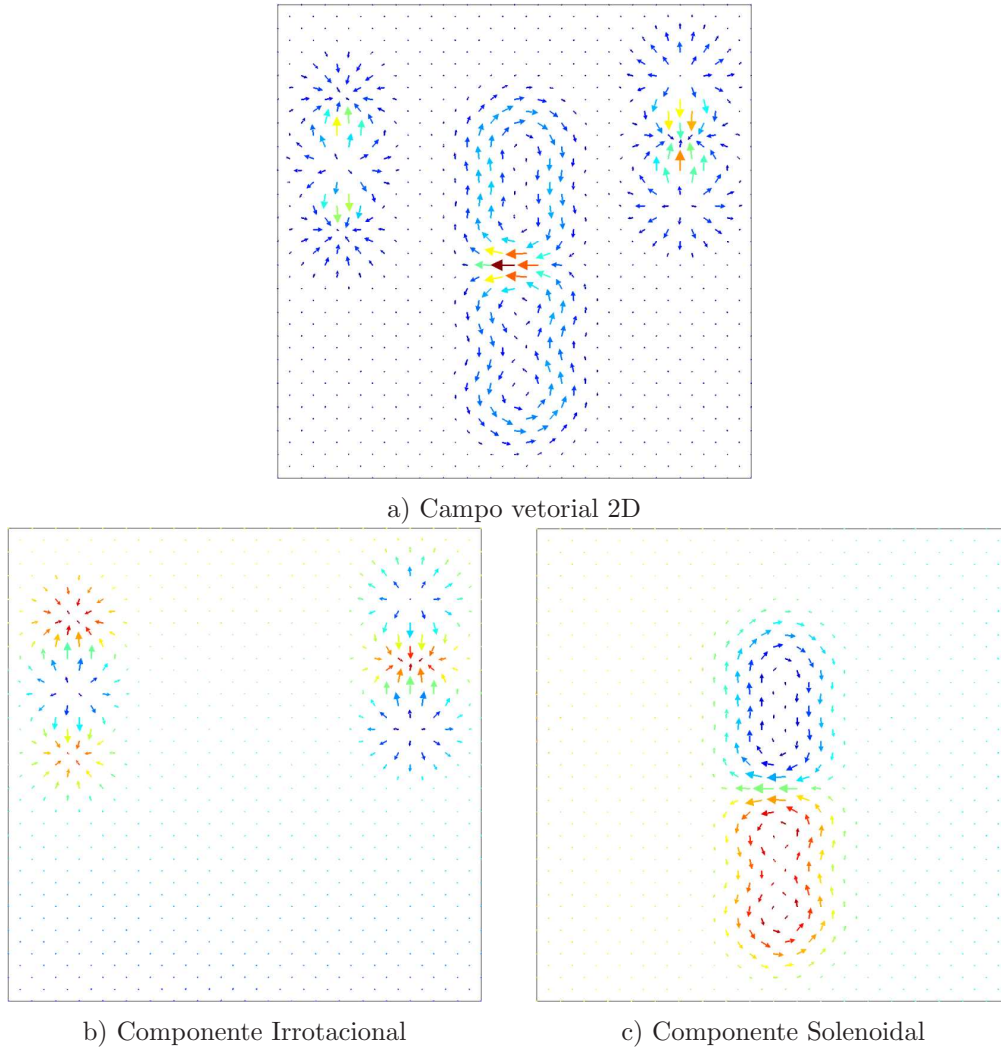


Figura 5.2: Um campo vetorial bidimensional 5.2(a) pode ser decomposto como a soma de um campo irrotacional 5.2(b) com um campo solenoidal 5.2(c).

A decomposição de Helmholtz-Hodge é particularmente interessante para obter feições características de um campo vetorial qualquer. Por exemplo, em um campo bidimensional, a componente irrotacional $\mathbf{d}$ contém somente fontes e sorvedouros presentes no campo $\mathbf{v}$, enquanto a componente solenoidal $\mathbf{r}$ contém somente vórtices de $\mathbf{v}$. A Figura 5.2 ilustra a decomposição de Helmholtz-Hodge para um campo vetorial sintético dado por 1.681 amostras. O campo vetorial, ilustrado em 5.2(a) é decomposto como a soma do campo de rotação nula 5.2(b) com o campo de divergência nula 5.2(c).

A decomposição para campos bi-dimensionais, porém, requer uma diferente notação. A decomposição de Helmholtz-Hodge para um campo vetorial bi-dimensional, descrita por Polthier (86), é definida como

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi + J(\nabla\psi) + \mathbf{h}, \quad (5-3)$$

onde J é uma função definida como a rotação de 90° no sentido horário

$$J(v_1, v_2) = (v_2, -v_1) .$$

Na decomposição 2D, ambos os potenciais, φ e ψ , são potenciais escalares.

O rotacional, em coordenadas cartesianas tri-dimensionais, é definido por

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (v_1, v_2, v_3) = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) , \quad (5-4)$$

onde $v_i = v_i(x, y, z)$. No espaço bi-dimensional, é conveniente defini-lo como a função de valor real

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (v_1, v_2) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \quad (5-5)$$

onde $v_i = v_i(x, y)$. Observa-se que pela definição da função J o rotacional 2D pode ser visto como

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \nabla \times (v_1, v_2) \\ &= \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ &= \nabla \cdot (v_2, -v_1) \\ &= \nabla \cdot (J(v_1, v_2)) \\ &= (\nabla \cdot J) \mathbf{v} \end{aligned} \quad (5-6)$$

Portanto, com as definições e notações adotadas para o caso bidimensional, as componentes da decomposição bidimensional ainda retêm as propriedades:

1. $\mathbf{d} = \nabla\varphi$ é um campo irrotacional

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla\varphi) &= (\nabla \cdot J) (\nabla\varphi) \\ &= \nabla \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. $\mathbf{r} = J(\nabla\psi)$ é um campo com divergente nulo

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (J(\nabla\psi)) &= \nabla \cdot \left(J \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) \right) \\ &= \nabla \cdot \left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \\ &= 0\end{aligned}$$

3. $\mathbf{h}$ é um campo com divergente e rotacional nulos

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = (\nabla \cdot J) \mathbf{h} = 0$$

Conseqüentemente, valem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= \nabla \cdot (\nabla\varphi) &+ \nabla \cdot (J(\nabla\psi)) &+ \nabla \cdot \mathbf{h} \\ &= \nabla \cdot (\nabla\varphi) &+ 0 &+ 0 \\ &= \Delta\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot J) \mathbf{v} &= \nabla \cdot (J(\nabla\varphi)) &+ \nabla \cdot (J(J(\nabla\psi))) &+ \nabla \cdot (J\mathbf{h}) \\ &= 0 &+ \nabla \cdot (-\nabla\psi) &- \nabla \times \mathbf{h} \\ &= 0 &- \Delta\psi &- 0 \\ &= &- \Delta\psi &\end{aligned}$$

e obtemos a versão bi-dimensional do sistema 5-2

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \Delta\varphi \\ \nabla \cdot (J\mathbf{v}) &= -\Delta\psi \end{cases} \quad (5-7)$$

O sistema 5-7 será utilizado para obter as componentes irrotacional $\mathbf{d} = \nabla\varphi$ e solenoidal $\mathbf{r} = J(\nabla\psi)$ do campo vetorial $\mathbf{v}$ dadas, respectivamente, pelos potenciais φ e ψ , soluções desse sistema. As variáveis do sistema 5-7 são independentes e, cada uma, é dada por uma equação de Poisson, cuja solução numérica foi vista no capítulo 4. A parte harmônica será calculada

pela diferença $\mathbf{h} = \mathbf{v} - \mathbf{r} - \mathbf{d}$.

Recentemente, na análise de campos vetoriais, Tong et al. (104) estenderam para campos vetoriais tridimensionais o modelo bidimensional proposto por Polthier et al. (86), onde ambos utilizam método de elementos finitos para obter a decomposição. Outros trabalhos aplicam diferentes métodos para obter a decomposição de Helmholtz-Hodge (2, 41). O método proposto nesta tese utiliza as aproximações SPH para os operadores gradiente ∇ , divergente $\nabla \cdot$, e laplaciano Δ para obter a decomposição de Helmholtz-Hodge em um campo vetorial discreto bidimensional, independente da amostragem na qual o campo foi obtido.

O algoritmo usado no novo método de decomposição de Helmholtz-Hodge usando SPH (SPH-HH) será descrito adiante. Um campo vetorial discreto em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ será decomposto em duas etapas: primeiro, a parte irrotacional $\mathbf{d} = \nabla \varphi$ é calculada; depois, independentemente, a parte solenoidal $\mathbf{r} = J(\nabla \psi)$ é obtida.

Discretização por partículas do domínio

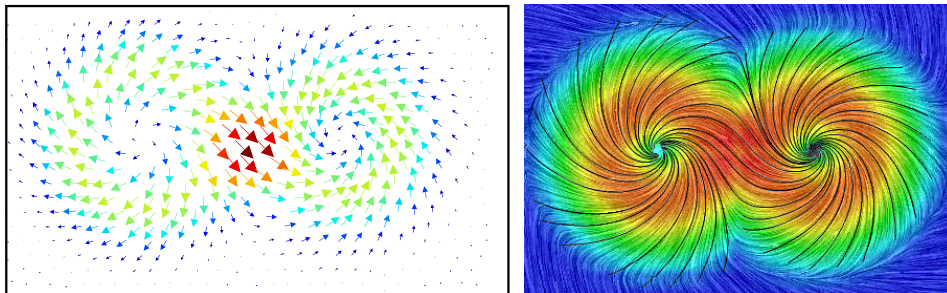


Figura 5.3: Um campo vetorial discreto em 493 partículas é ilustrado à esquerda. À direita algumas linhas de fluxo do campo são mostradas. O mapa de cores representa, em ambas imagens, a magnitude do campo.

Inicialmente, dado um campo vetorial discreto definido em um domínio Ω

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\},$$

onde $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}(\mathbf{x}_i)$ com $\mathbf{x}_i \in \Omega$; associa-se para cada vetor $\mathbf{v}_i$ uma partícula i posicionada em $\mathbf{x}_i$. O atributo massa de cada partícula, é definido como o volume de Ω dividido pelo número de partículas. A partir daí, a densidade é obtida usando

$$\rho_i = \rho(\mathbf{x}_i) = \sum_{j \in \mathcal{V}_i} m_j W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$$

Além dos atributos definidos acima, cada partícula ainda possui como atributo os potenciais escalares e as componentes da decomposição. Os atributos de uma partícula são listados na tabela abaixo.

P A R T Í C U L A	
atributo	descrição
massa	m
densidade	ρ
posição	$\mathbf{x}$
velocidade	$\mathbf{v}$
potencial 1	ϕ
potencial 2	φ
irrotacional	$\mathbf{d}$
solenoidal	$\mathbf{r}$
harmônica	$\mathbf{h}$

A Figura 5.3 ilustra um campo sintético representado em 493 partículas. Algumas linhas de fluxo, obtidas pela integração de um ponto ao longo de um campo aproximado (54), também são ilustradas. O mapa de cores representa, em ambas imagens, a magnitude do campo.

Solução para a componente irrotacional

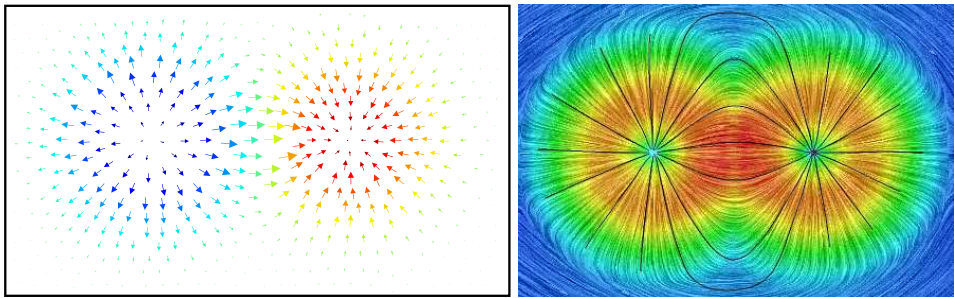


Figura 5.4: Decomposição de Helmholtz-Hodge: $\mathbf{v} = \mathbf{d} + \mathbf{r} + \mathbf{h}$. A componente irrotacional $\mathbf{d} = \nabla\varphi$ obtida pela decomposição de Helmholtz-Hodge usando SPH é ilustrada. Na imagem da esquerda a componente de rotação nula do campo é ilustrada em cada partícula, onde o mapa de cores representa o valor do potencial escalar φ obtido. A imagem da direita ilustra algumas linhas de fluxos da componente irrotacional, o mapa de cores está associado a magnitude do campo $\mathbf{d}$. O campo $\mathbf{v}$ é ilustrado na Figura 5.3.

Pela decomposição de Helmholtz-Hodge, um campo vetorial $\mathbf{v}$ pode ser decomposto como

$$\mathbf{v} = \mathbf{d} + \mathbf{r} + \mathbf{h}.$$

A componente irrotacional $\mathbf{d} = \nabla\varphi$ é obtida resolvendo a equação diferencial parcial

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{d} = \nabla \cdot (\nabla\varphi) = \Delta\varphi.$$

A EDP acima é uma equação de Poisson. Viu-se no capítulo 4 que a partir da discretização dessa equação com os operadores SPH

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{v})_h(\mathbf{x}_i) &= \frac{1}{\rho_i} \left[\sum_{j \in \mathbf{V}_i} m_j (\mathbf{v}(\mathbf{x}_j) - \mathbf{v}(\mathbf{x}_i)) \cdot \nabla_i W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \right] \\ (\Delta\varphi)_h(\mathbf{x}_i) &= \sum_{j \in \mathbf{V}_i} \frac{2(\varphi(\mathbf{x}_i) - \varphi(\mathbf{x}_j))}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \nabla_i W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \end{aligned}$$

encontramos um sistema de equações, representado matricialmente por

$$A\Phi = \mathbf{b},$$

cuja solução Φ retorna, em cada coordenada i , o valor do potencial escalar φ associado à componente irrotacional do campo vetorial $\mathbf{v}$ na partícula i .

Para obter a componente irrotacional $\mathbf{d} = \nabla\varphi$, basta utilizar a aproximação SPH para o operador gradiente na propriedade φ

$$\mathbf{d}_i = (\nabla\varphi)_h(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{\rho_i} \left[\sum_{j \in \mathbf{V}_i} m_j (\varphi(\mathbf{x}_j) - \varphi(\mathbf{x}_i)) \nabla_i W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \right]$$

A Figura 5.4 ilustra a componente irrotacional $\mathbf{d} = \nabla\varphi$ obtida na decomposição do campo vetorial $\mathbf{v}$ (Figura 5.3). A imagem da esquerda ilustra a componente de rotação nula do campo em cada partícula, onde o mapa de cores representa o valor do potencial escalar φ obtido. A imagem da direita ilustra algumas linhas de fluxos da componente irrotacional (54), o mapa de cores está associado a magnitude do campo $\mathbf{d}$.

Solução para a componente solenoidal

A componente solenoidal $\mathbf{r} = J(\nabla\psi)$, onde $J(v_1, v_2) = (v_2, -v_1)$, é obtida de maneira semelhante à componente irrotacional $\mathbf{d} = \nabla\varphi$. A equação

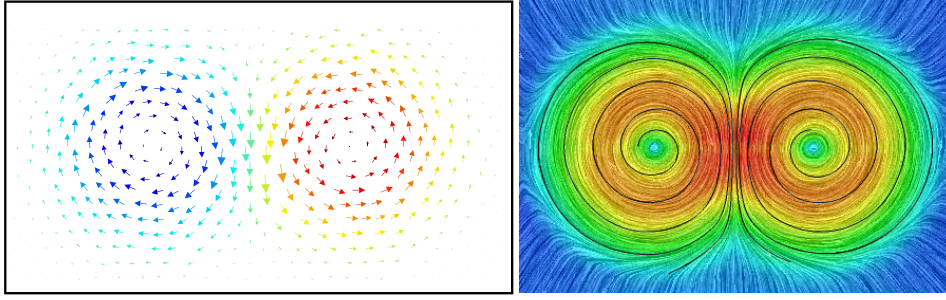


Figura 5.5: Decomposição de Helmholtz-Hodge: $\mathbf{v} = \mathbf{d} + \mathbf{r} + \mathbf{h}$. A componente solenoidal $\mathbf{r} = J(\nabla\psi)$ obtida pela decomposição de Helmholtz-Hodge usando SPH é ilustrada. Na imagem da esquerda a componente de divergência nula do campo é ilustrada em cada partícula, onde o mapa de cores representa o valor do potencial escalar ψ obtido. A imagem da direita ilustra algumas linhas de fluxos da componente solenoidal, o mapa de cores está associado a magnitude do campo $\mathbf{r}$. O campo $\mathbf{v}$ é ilustrado na Figura 5.3.

de Poisson a ser resolvida

$$\nabla \times \mathbf{v} = (\nabla \cdot J) \mathbf{v} = (\nabla \cdot J) \mathbf{r} = -\Delta\psi$$

é discretizada usando os operadores SPH

$$(\nabla \cdot J\mathbf{v})_h(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{\rho_i} \left[\sum_{j \in \mathbf{V}_i} m_j (J\mathbf{v}(\mathbf{x}_j) - J\mathbf{v}(\mathbf{x}_i)) \cdot \nabla_i W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \right]$$

$$(\Delta\psi)_h(\mathbf{x}_i) = \sum_{j \in \mathbf{V}_i} \frac{2(\psi(\mathbf{x}_i) - \psi(\mathbf{x}_j))}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot \nabla_i W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$$

Mais uma vez, a discretização da equação de Poisson acima, em todas as partículas, resulta em um conjunto de equações lineares, representado na forma matricial por

$$A\Psi = \mathbf{b}.$$

A solução Ψ desse sistema retorna, em cada coordenada i , o valor do potencial escalar ψ associado à componente solenoidal do campo vetorial $\mathbf{v}$, na partícula de mesmo índice i . A componente solenoidal $\mathbf{r} = J(\nabla\psi)$ é obtida pelo operador SPH gradiente composto com a rotação J

$$\mathbf{r}_i = J(\nabla\psi_i) = J \left((\nabla\psi)_h(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{\rho_i} \left[\sum_{j \in \mathbf{V}_i} m_j (\psi(\mathbf{x}_j) - \psi(\mathbf{x}_i)) \nabla_i W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \right] \right)$$

A Figura 5.5 ilustra a componente solenoidal $\mathbf{r} = J(\nabla\psi)$ obtida pela decomposição de Helmholtz-Hodge usando SPH. A imagem da esquerda ilustra a componente de divergência livre do campo vetorial $\mathbf{v}$ (ilustrado na Figura 5.3)

em cada partícula, onde o mapa de cores representa o valor do potencial escalar ψ obtido. A imagem da direita ilustra algumas linhas de fluxos da componente solenoidal (54) e o mapa de cores está associado a magnitude do campo $\mathbf{r}$.

Solução para a componente harmônica

Com as componentes irrotacional e solenoidal obtidas, o campo original $\mathbf{v}$ pode ser reescrito como a soma das três componentes $\mathbf{v} = \mathbf{d} + \mathbf{r} + \mathbf{h}$, onde a componente harmônica $\mathbf{h}$ é obtida fazendo

$$\mathbf{h} = \mathbf{v} - \mathbf{r} - \mathbf{d}.$$

Tem-se, pela definição acima, que $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$ e $\nabla \times \mathbf{h} = 0$. Portanto, a decomposição encontrada satisfaz a todas as propriedades da decomposição de Helmholtz-Hodge.

Nos exemplos anteriores a componente harmônica obtida é praticamente nula. Em geral, a componente harmônica é muito pequena e praticamente constante em campos vetoriais resultantes de problemas em várias áreas. Contudo, alguns problemas, como por exemplo simulações de escoamentos com domínios complexos, resultam em um campo onde a componente harmônica é “forte”, o que comprometeria o método proposto.

5.3

Deteção automática de feições

Na introdução foi mencionado como campos vetoriais estão presentes em várias áreas. Portanto, a visualização científica desses campos é muito importante para a compreensão dos fenômenos descritos pelos mesmos. Dentre várias possibilidades de visualização, localizar feições características do campo e ilustrá-las é uma excelente alternativa. Um campo vetorial de divergência nula é ilustrado na Figura 5.6. Destaca-se regiões do campo vetorial onde encontram-se vórtices do mesmo. Essas regiões foram detectadas automaticamente pelo método SPH-HH.

As componentes obtidas pela decomposição SPH-HH para um campo

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} + \mathbf{d} + \mathbf{h}$$

possuem propriedades distintas, nas quais a compreensão de toda a estrutura do campo vetorial torna-se uma tarefa muito mais simples.

A componente solenoidal $\mathbf{r} = J(\nabla\psi)$ que tem a mesma rotação do campo

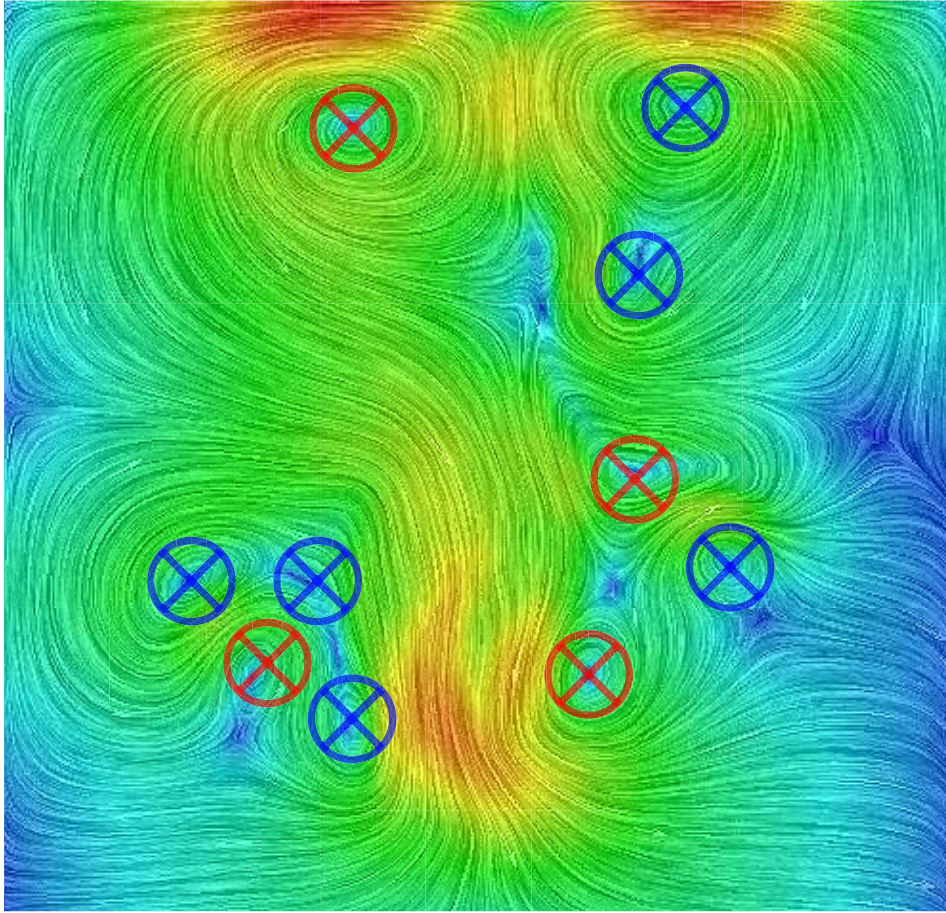


Figura 5.6: Os potenciais φ e ψ retêm importantes informações sobre o campo vetorial. As regiões em destaques são vórtices do campo vetorial e foram obtidas automaticamente pelo método SPH-HH analisando os potenciais escalares obtidos na decomposição.

original $\mathbf{v}$

$$\nabla \times \mathbf{r} = \nabla \times \mathbf{v}$$

contém todos os vórtices do mesmo. Por outro lado, as fontes e sorvedouros do campo original aparecem na componente irrotacional $\mathbf{d} = \nabla\varphi$, que possui a parte divergente de $\mathbf{v}$

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Os campos escalares φ e ψ , obtidos pelo método SPH-HH, retêm importantes informações sobre o campo $\mathbf{v}$ decomposto. Portanto, podem ser encontradas algumas feições do campo vetorial $\mathbf{v}$ analisando os potenciais escalares φ e ψ .

O potencial φ encontrado para obter a parte irrotacional do campo $\mathbf{v}$ nos revela sorvedouros e fontes contidos no campo. Máximos e mínimos locais de φ indicam localizações do campo vetorial na qual encontram-se, respectivamente, sorvedouros e fontes. A segunda linha da Figura 5.7 ilustra

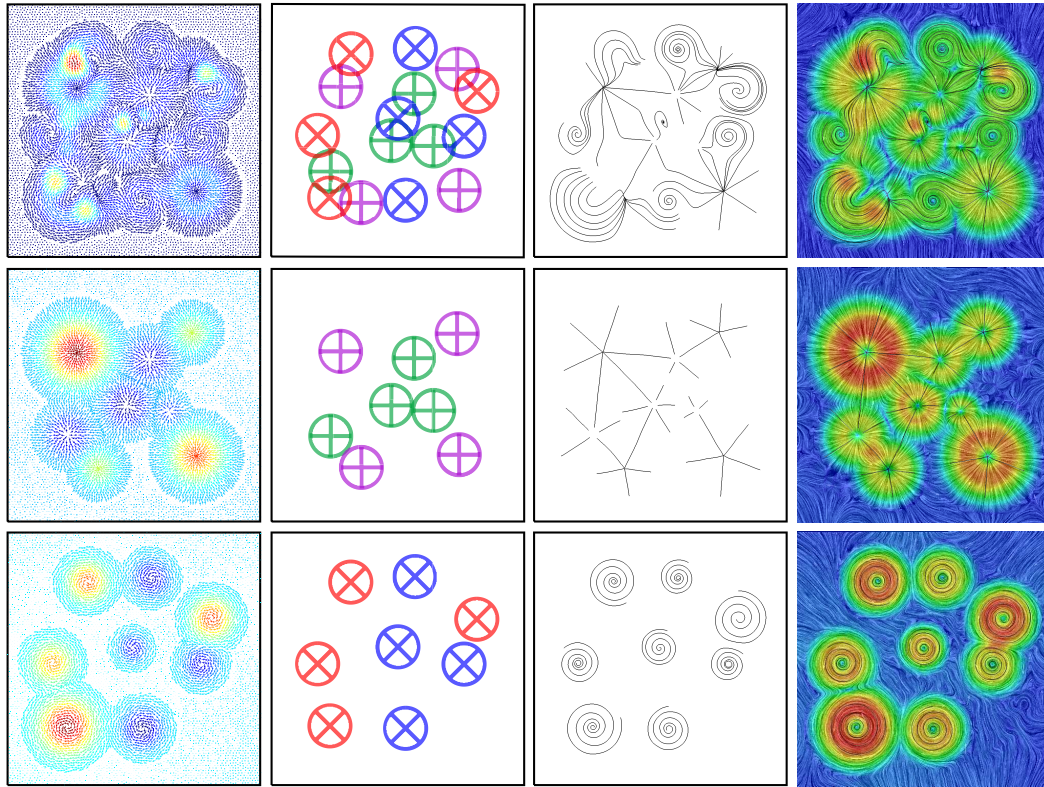


Figura 5.7: Detecção automática de feições características. O campo vetorial sintético, ilustrado na primeira linha, é decomposto como soma da componente solenoidal com a componente irrotacional ilustradas, respectivamente, na segunda e terceira linhas. As feições características obtidas pelo método SPH-HH são ilustradas na segunda coluna (da esquerda para a direita). A partir dessas feições algumas linhas de fluxo são geradas, ilustradas na terceira coluna. Por último, uma visualização baseada nas feições é obtida (última coluna).

essa propriedade do potencial. Na primeira coluna, o mapa de cores associado ao vetor representa o valor do potencial φ ; do azul para o vermelho representa-se o crescimento do potencial. Pontos de mínimos (máximos) locais desse potencial, juntamente com as regiões locais onde esses pontos são mínimos (máximos), são ilustrados pelos círculos verdes (roxos), onde para cada região o ponto de mínimo (máximo) é o centro desse círculo.

De maneira semelhante, máximos e mínimos locais de ψ indicam as regiões do campo vetorial na qual encontram-se outras feições do campo, os vórtices. A terceira linha da Figura 5.7 ilustra essa propriedade do potencial. Na primeira coluna, o mapa de cores associado ao vetor representa o valor do potencial ψ ; do azul para o vermelho representa-se o crescimento do potencial. Analogamente, pontos de mínimos (máximos) desse potencial, juntamente com as regiões local onde estes pontos são mínimos (máximos), são ilustradas pelos círculos azuis (vermelhos), onde para cada região o ponto de mínimo (máximo) é o centro desse círculo.

5.4 Resultados

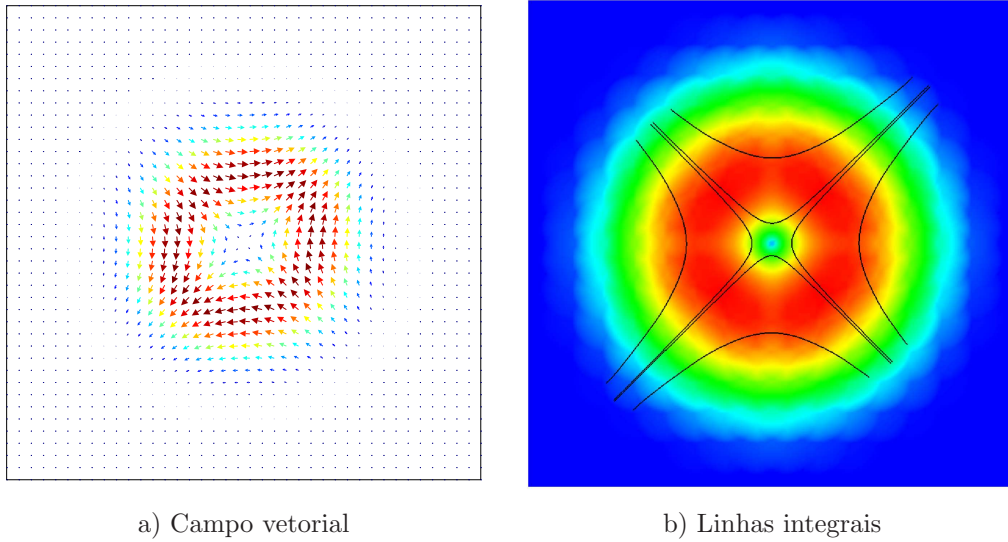


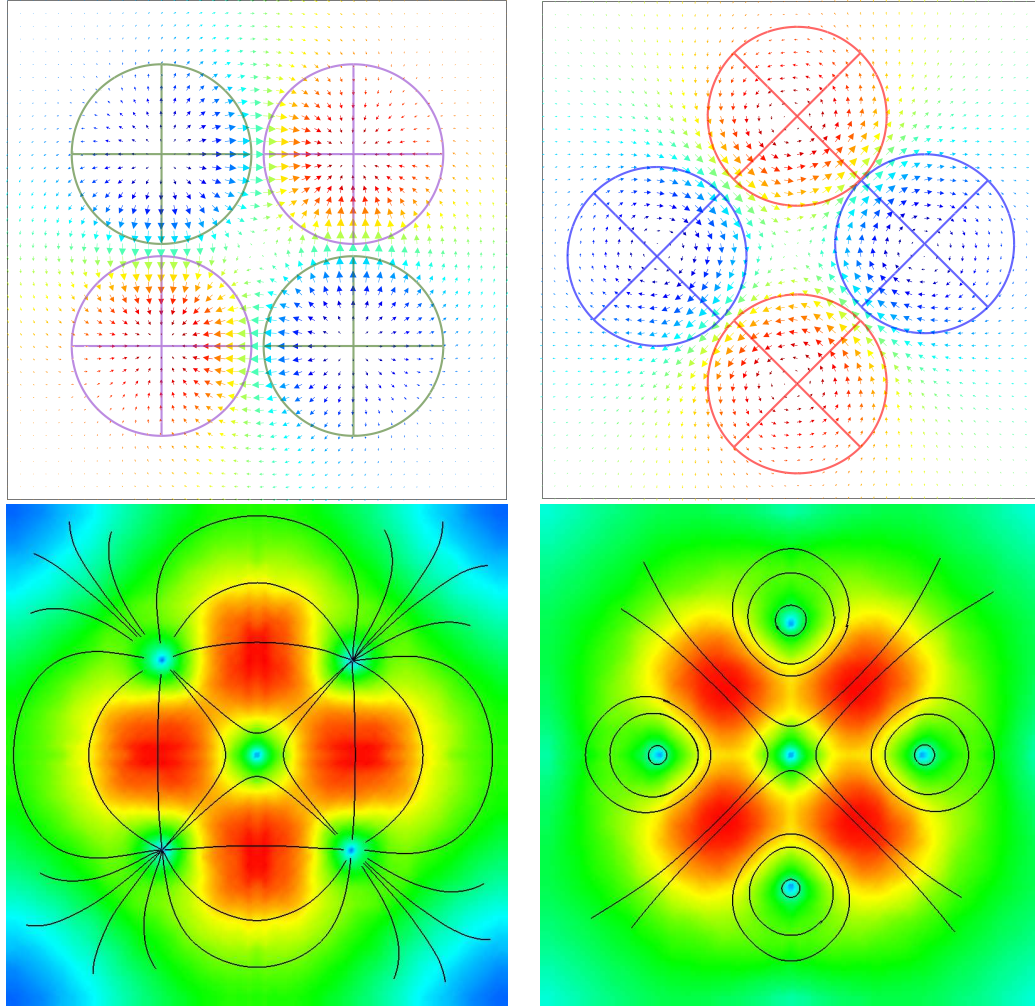
Figura 5.8: Campo vetorial sintético, contendo uma singularidade do tipo sela. A figura da esquerda mostra o campo, enquanto que na figura da direita algumas linhas integrais obtidas pela integração de um ponto inicial ao longo de um campo aproximado são ilustradas. Em ambas imagens o mapa de cores representa a magnitude do campo.

Essa seção de resultados é iniciada mostrando as feições obtidas pelo método SPH-HH em um campo sintético. O campo vetorial, contendo uma singularidade do tipo sela, é ilustrado na Figura 5.8, juntamente com algumas linhas integrais obtidas pela integração de um ponto inicial ao longo de um campo aproximado (54).

O método SPH-HH decompõe um campo como soma da componente solenoidal com a componente irrotacional. Além disso, o método detecta automaticamente feições características de cada componente do campo, como máximos e mínimos locais dos potenciais escalares φ e ψ relacionados.

A decomposição do campo ilustrado na Figura 5.8 é mostrado na Figura 5.9. As componentes irrotacional e solenoidal, assim como, as feições características correspondentes, obtidas pelo método SPH-HH, são ilustradas nas Figuras 5.9(a) e 5.9(b), respectivamente. Algumas linhas integrais, obtidas pela integração de um ponto inicial ao longo de um campo aproximado (54), são também ilustradas para cada componente da decomposição.

O próximo resultado foi obtido pelo método SPH-HH ao decompor o campo ilustrado na Figura 5.10. O campo, ilustrado em 1.600 partículas, foi criado pela soma de um campo constante $\mathbf{c} = (0, 1; 0)$ com o campo vetorial contendo uma singularidade do tipo sela, ilustrado na Figura 5.8.



a) Componente irrotacional

b) Componente solenoidal

Figura 5.9: A Figura 5.8 ilustra um campo vetorial $\mathbf{v}$ contendo uma singularidade do tipo sela. As componentes irrotacional e solenoidal e as feições características obtidas pelo método SPH-HH em função dos potenciais φ e ψ , respectivamente, são ilustradas em 5.9(a) e 5.9(b). A linha superior ilustra as componentes obtidas, onde os mapas de cores representam os valores dos potenciais. Na linha inferior, algumas linhas integrais, para cada componente, também são mostradas, onde os mapas de cores representam a magnitude das componentes irrotacional e solenoidal.

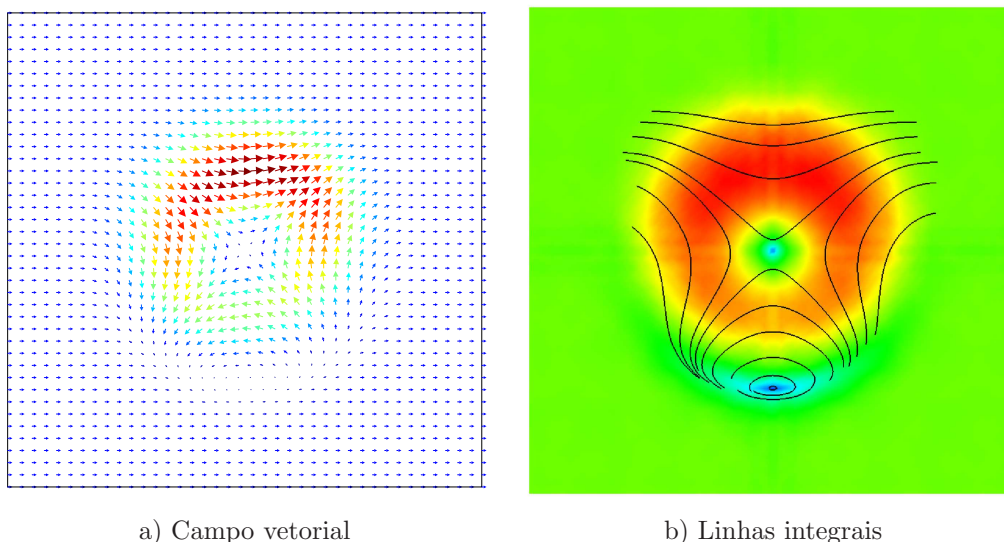


Figura 5.10: Campo vetorial sintético, criado pela soma de um campo constante $\mathbf{c} = (0, 1; 0)$ com o campo vetorial contendo uma singularidade do tipo sela, ilustrado na Figura 5.8. A figura da esquerda mostra o campo, enquanto que na figura da direita algumas linhas integrais obtidas pela integração de um ponto inicial ao longo de um campo aproximado são ilustradas. Em ambas imagens o mapa de cores representa a magnitude do campo.

As feições obtidas pelo método SPH-HH para as componentes irrotacional e solenoidal são ilustradas na Figura 5.11. Nem todas feições obtidas ao decompor o campo vetorial do tipo sela sem a presença do campo constante (Figuras 5.8 e 5.9), são obtidas pelo método SPH-HH na decomposição do campo ilustrado na Figura 5.10. Isso acontece devido ao método de solução do problema. Observe que pelas definições de campo vetorial irrotacional e campo vetorial solenoidal (seção 5.1), as componentes irrotacional e solenoidal de um campo na decomposição de Helmholtz-Hodge são definidas a menos de uma constante. Portanto, em ambas as partes do método SPH-HH, isto é, ao obter-se a parte irrotacional e a parte solenoidal, o resultado pode conter, por ambas, uma mesma componente constante do campo.

Ao comparar as feições obtidas pelo método SPH-HH no campo que contém uma singularidade do tipo sela (Figura 5.8), e no campo dado pela soma do campo contendo uma singularidade do tipo sela com um campo constante (Figura 5.10), observa-se que algumas feições obtidas no primeiro campo não são encontradas quando adiciona-se o campo constante. Isto acontece porque algumas feições do campo não são mais captadas pelo método SPH-HH devido a forte influência do campo constante adicionado. Para evitar este problema inerente ao método proposto, pode-se, antes de calcular as componentes irrotacional e solenoidal, obter a componente harmônica. Esta técnica é utilizada no trabalho de Wiebel, Garth e Scheuermann (107).

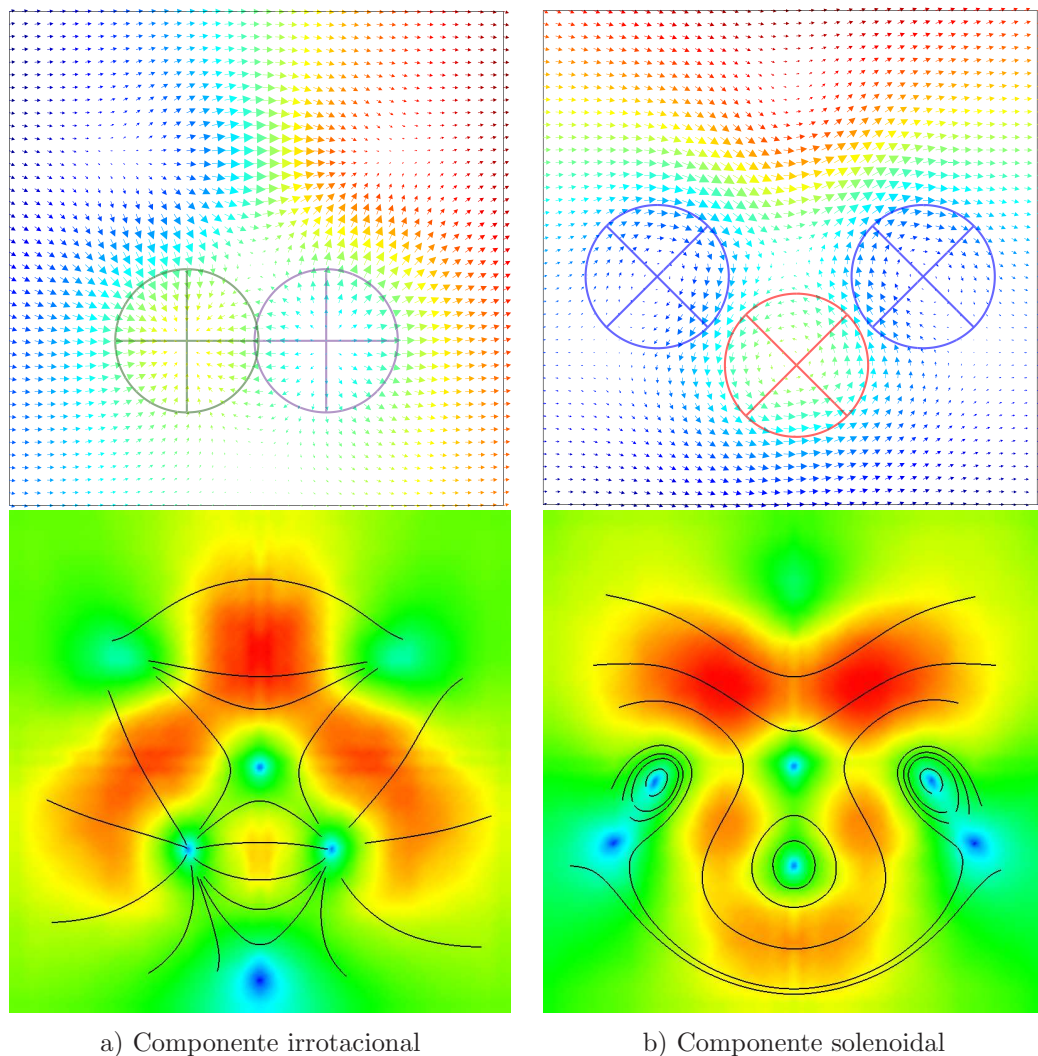


Figura 5.11: A decomposição de Helmholtz-Hodge do campo vetorial $\mathbf{v}$ ilustrado na Figura 5.10 é obtida pelo método SPH-HH. As feições encontradas pelo método SPH-HH são ilustradas em 5.11(a) e 5.11(b), juntamente com as componentes associadas, irrotacional e solenoidal, respectivamente. A linha inferior ilustra algumas linhas integrais para cada componente encontrada pelo método.

Os dois últimos resultados obtidos com o método SPH-HH são para campos vetoriais resultantes de simulações de escoamentos de fluidos. Como citado anteriormente, uma grande quantidade de campos vetoriais é resultado desse tipo de simulação. A análise desses campos é necessária para uma melhor compreensão dos resultados obtidos. Por exemplo, detectar a formação de vórtices no modelo inicial de um carro em um túnel de vento é importante para evitar danos no resultado final do projeto. Experimentos similares são utilizados por engenheiros na aviação (Figura 5.12).

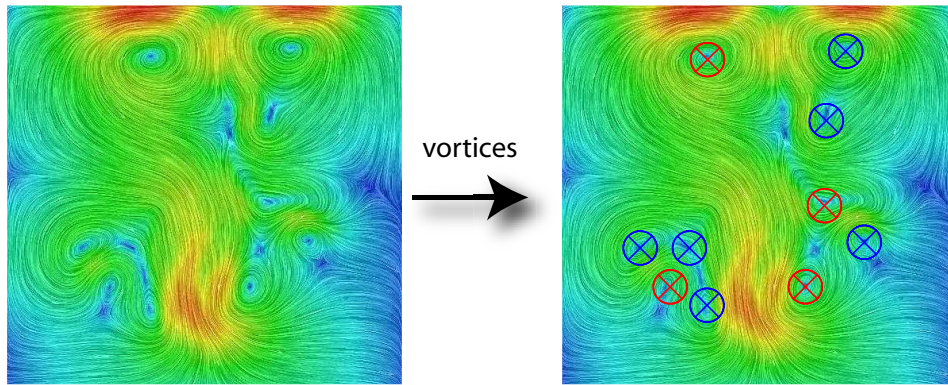


Figura 5.12: A detecção de vórtices pelo método SPH-HH é ilustrada.

Na Figura 5.13, ilustramos a detecção de vórtices pelo método SPH-HH em um campo representado por 6.400 partículas. O campo foi obtido por uma simulação Euleriana (3) e é ilustrado em 5.13(a), com o mapa de cores representando a magnitude do campo. Em 5.13(b), a componente de divergência nula $\mathbf{r} = \nabla\varphi$ obtida pelo método SPH-HH é ilustrada, onde o mapa de cores representa o valor do potencial φ . Os vórtices detectados pelo método SPH-HH são ilustrados em 5.13(c).

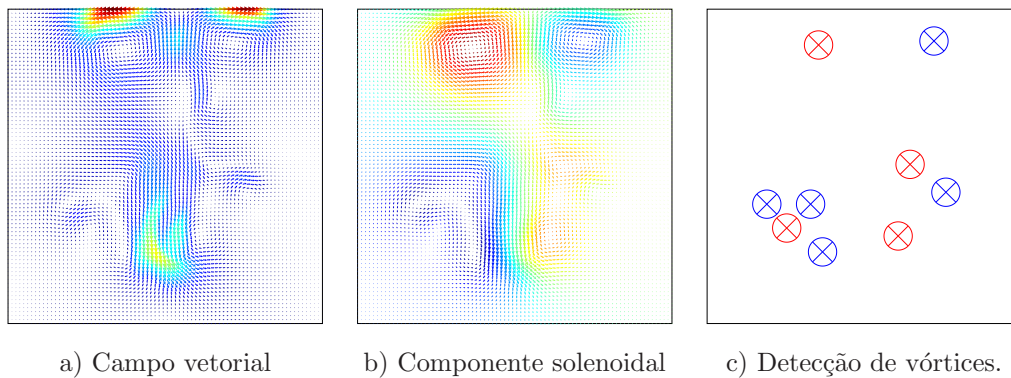


Figura 5.13: Na Figura 5.13(a), ilustra-se um campo vetorial representado por 6.400 partículas. A componente de divergência nula e os vórtices detectados pelo método SPH-HH são ilustrados na Figuras 5.13(b) e 5.13(c), respectivamente. Os mapa de cores representam a magnitude do campo em 5.13(a) e o valor do potencial em 5.13(b).

Esta seção de resultados é finalizada com a decomposição de um campo oriundo de simulações de escoamentos de fluidos (Figura 5.14). Nesse exemplo, porém, uma abordagem Lagrangeana foi utilizada na simulação e, portanto, o campo é representado por um conjunto de vetores distribuídos irregularmente (Figura 5.14(a)). As feições detectadas pelo método SPH-HH são ilustradas junto com a componente solenoidal na Figura 5.14(b). Algumas linhas integrais são ilustradas na Figura 5.14(c). Observa-se, no destaque na Figura 5.14(d), o vórtice encontrado pelo método SPH-HH, ilustrado sobre o campo original.

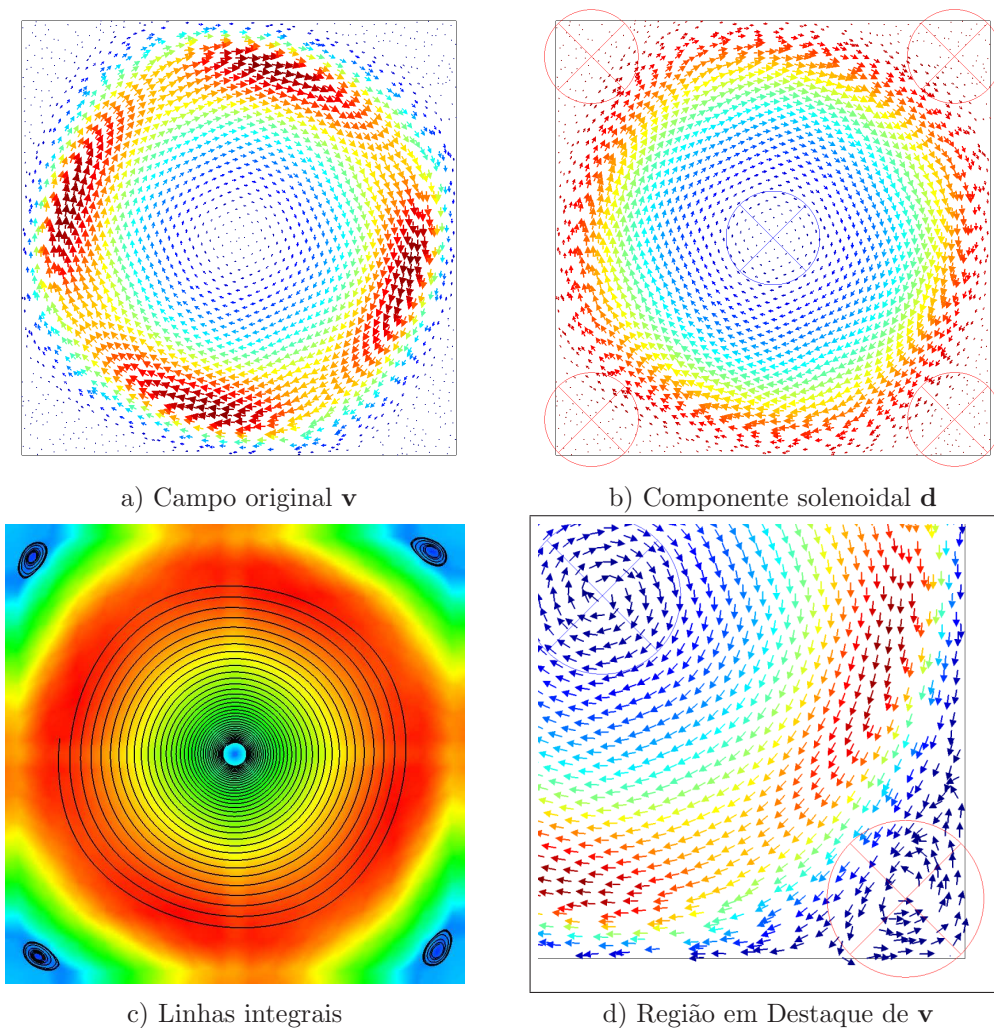


Figura 5.14: Campo vetorial obtido durante a simulação de escoamentos de fluidos. O campo original com 11.450 partículas é ilustrado em 5.14(a). Em 5.14(b) é ilustrada a componente de divergência livre e as feições obtidas pelo método SPH-HH. Em Figura 5.14(c), algumas linhas integrais são ilustradas. Observa-se na região destacada em 5.14(d) o vórtice encontrado pelo método SPH-HH.