

Método do Balanço Harmônico

O HBM possui a forma mais simples e direta de aplicação. Um somatório de harmônicos, acrescido de um termo constante, tal qual a série de Fourier, é tomado como solução aproximada

$$x(t) \approx c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \cos i\omega t + d_i \sin i\omega t \quad (4-1)$$

Esta solução aproximada é substituída na equação diferencial. As potências e produtos trigonométricos que surgem devidos às não-linearidades, são substituídos pela expansão destas potências em somatórios de harmônicos. O passo seguinte é coletar os coeficientes de cada harmônico em (4-1) e fazer o “balanço” dos harmônicos resultantes, isto é, igualar os coeficientes do lado esquerdo aos coeficientes do lado direito da equação. Cada harmônico de interesse em (4-1) produz uma equação não-linear. Tomando todos as equações, tem-se um sistema não-linear que é resolvido iterativamente por Newton-Raphson, para se determinar as constantes da solução aproximada (4-1).

O aspecto mais importante a ser considerado ao escrever a solução aproximada é o tipo de não-linearidade do problema e, em alguns casos, a característica da excitação. Ao inserir (4-1) na equação diferencial, resultam potências destes harmônicos. Tomando como exemplo uma potência cúbica e uma quártica de cosseno, as seguintes relações trigonométricas são válidas:

$$\begin{aligned} (\cos x)^3 &= \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x \\ (\cos x)^4 &= \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8} \end{aligned} \quad (4-2)$$

A expansão de potências pares, gera um termo constante e harmônicos pares, enquanto que apenas harmônicos ímpares são gerados na expansão de potências ímpares. Assim sendo, a não linearidade cúbica exige apenas a presença dos harmônicos ímpares, exceto nos casos forçados onde o carregamento possui algum termo constante, enquanto que a solução aproximada para uma não-linearidade quadrática necessita de todos os harmônicos, pois,

devido aos termos lineares sempre presentes, os harmônicos ímpares também são necessários.

Em problemas de vibração livre ou vibração forçada não-amortecida, não é necessário que a solução aproximada tenha termos em seno e cosseno, basta ter um dos dois. É preferível adotar um somatório de cossenos pois a solução aproximada irá atender à condição de deslocamento inicial. Somente nos problemas forçados amortecidos, os termos de seno e cosseno devem estar presentes, ou, então, deve-se adicionar um ângulo de fase a cada harmônico. Assim, a expansão (4-1) pode ser reescrita como

$$x(t) \approx c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \sin(i\omega t + \phi_i) \quad (4-3)$$

4.1

Newton-Raphson com Comprimento de Arco

O HBM conduz a um sistema algébrico não-linear que é resolvido iterativamente por Newton-Raphson. Para o traçado da curva de ressonância, tanto a frequência quanto a amplitude podem ser tomados como parâmetros de controle. O procedimento de solução usual consiste em fixar um valor para o parâmetro de controle e iterar até que as demais variáveis atendam ao sistema. Frequentemente, ao incrementar o parâmetro de controle, pode-se perder ramos da solução, pois não se pode prosseguir além de certos pontos limite.

A única forma de fazer o sistema contornar os pontos limites é transformando o parâmetro de controle numa variável como as demais, onde o método de Newton-Raphson irá fornecer seu valor adequado.

Para poder resolver o problema com mais uma variável é preciso dispor de mais uma equação. Esta nova equação é acrescida como uma restrição ao problema. Há várias técnicas que permitem tornar o parâmetro de controle uma variável. Como mostrado por Carrera (1992)[79], cada método apresenta uma equação diferente. O método adotado neste trabalho é o Comprimento de Arco Constante, proposto por Crisfield em 1981[80].

4.2

Vibração livre

A seguir é descrita a metodologia do HBM para o caso de vibração livre.

Para tanto considera-se novamente a equação de movimento

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + \beta x^3(t) = 0 \quad (4-4)$$

Inicialmente, assume-se a solução aproximada

$$x(t) = c_1 \cos \omega t \quad (4-5)$$

Substituindo (4-5) em (4-4) e expandindo $(\cos \omega t)^3$, chega-se a

$$-c_1 \omega^2 \cos \omega t + c_1 \omega_0^2 \cos \omega t - \frac{1}{4} \beta c_1^3 \cos 3\omega t + \frac{3}{4} \beta c_1^3 \cos \omega t = 0 \quad (4-6)$$

Para que (4-5) seja solução, a igualdade (4-6) precisa ser atendida. Coletando os harmônicos, tem-se

$$\cos \omega t \left(-\omega^2 c_1 + \omega_0^2 c_1 + \frac{3}{4} \beta c_1^3 \right) = 0 \quad (4-7)$$

$$\cos 3\omega t \left(-\frac{1}{4} \beta c_1^3 \right) = 0 \quad (4-8)$$

Evidentemente somente a eq. (4-7) pode ser atendida, permitindo explicitar a frequência ω da resposta em função dos parâmetros c_1 , β e ω_0 . Não há forma de atender a eq. (4-8) quando $c_1 \neq 0$, portanto (4-8) é um resíduo resultante da solução aproximada. Para que este resíduo possa ser desprezado e conseqüentemente a solução (4-5) seja uma boa aproximação, é necessário que β e c_1 não sejam muito grandes. Adicionando mais harmônicos em (4-5), os resíduos dos harmônicos superiores se tornam cada vez menores.

Admitindo que

$$c_1 = x(0) \quad (4-9)$$

a solução da eq. (4-7) é

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{(4\omega_0^2 + 3\beta x(0)^2)} \quad (4-10)$$

que é igual à solução dada pelo LP, eq. (3-92).

Considerando mais harmônicos na solução adotada, eq. (4-5), chega-se a soluções mais complexas para ω , tornando-se necessário um procedimento numérico para se obter a solução do sistema não-linear resultante. Seja a aproximação

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_3 \cos 3\omega t \quad (4-11)$$

Substituindo (4-11) em (4-4) e expandindo as potências trigonométricas

e coletando somente os harmônicos presentes na solução aproximada (4-11), chega-se a um sistema de duas equações e três incógnitas (c_1 , c_3 e ω):

$$\begin{aligned} -c_1\omega^2 + \omega_0^2c_1 + \frac{3}{4}\beta c_1^2c_3 + \frac{3}{4}\beta c_1^3 + \frac{3}{2}\beta c_1c_3^2 &= 0 \\ -9c_3\omega^2 + \omega_0^2c_3 + \frac{3}{2}\beta c_1^2c_3 + \frac{1}{4}\beta c_1^3 + \frac{3}{4}\beta c_3^3 &= 0 \end{aligned} \quad (4-12)$$

Uma das incógnitas deve ser tomada como parâmetro de controle e mantida constante para poder se resolver o sistema. Uma opção é considerar $x(0)$ como parâmetro de controle,

$$x(0) = c_1 + c_3 \quad (4-13)$$

o que permite correlacionar as duas incógnitas,

$$c_1 = x(0) - c_3 \quad (4-14)$$

Substituindo (4-14) no sistema (4-12), c_1 é eliminado e $x(0)$ passa a ser o novo parâmetro de controle, restando como incógnitas c_3 e ω .

$$\begin{aligned} c_3\omega^2 - \omega^2x(0) - \omega_0^2c_3 + \omega_0^2x(0) - \frac{3}{2}\beta c_3^3 + \frac{9}{4}\beta c_3^2x(0) \\ - \frac{3}{2}\beta c_3x(0)^2 + \frac{3}{4}\beta x(0)^3 &= 0 \\ -9c_3\omega^2 + \omega_0^2c_3 + 2\beta c_3^3 - \frac{9}{4}\beta c_3^2x(0) + \frac{3}{4}\beta c_3x(0)^2 + \frac{1}{4}\beta x(0)^3 &= 0 \end{aligned} \quad (4-15)$$

Se a eq. (4-13) não for considerada antes de se encontrar as soluções, $x(0)$ deve ser determinado a partir da solução aproximada no instante inicial para se poder traçar uma curva de frequência de resposta versus deslocamento inicial. Substituir (4-14) em (4-12) é melhor que acrescentar (4-13) como uma nova equação porque converge mais rapidamente. Quando $x(0)$ não é adicionado ao sistema através da eq. (4-13), deve-se evitar de tomar outra amplitude além de c_1 como parâmetro de controle, porque isto possibilita encontrar soluções corretas no tempo, mas expúrias no domínio da frequência. Por exemplo, mantendo c_3 constante em (4-12), as incógnitas são ω e c_1 . Este sistema pode conduzir a uma solução onde apenas o terceiro harmônico possuirá amplitude não nula, e a frequência ω da resposta será 1/3 da frequência dada pela eq. (4-10), de forma a tornar a solução aproximada idêntica à solução encontrada contendo um único harmônico, eq. (4-5). A figura 4.1(a) mostra que isto não ocorre quando $x(0)$ é inserido no sistema.

Na figura 4.1 utilizou-se uma solução aproximada contendo os cinco primeiros harmônicos ímpares. Na figura (a), de forma semelhante que na eq. (4-14), $x(0)$ toma o lugar da amplitude escolhida, permanecendo com valor

constante enquanto as iterações do método de Newton-Raphson são executadas. Independente da amplitude da resposta, as soluções coincidem com a solução numérica. Em 4.1(b), $x(0)$ não é parte do sistema original e sempre uma amplitude é escolhida e mantida constante durante as iterações. A solução correta é encontrada unicamente quando a amplitude do primeiro harmônico é mantida constante. Nas demais situações, as soluções são incorretas

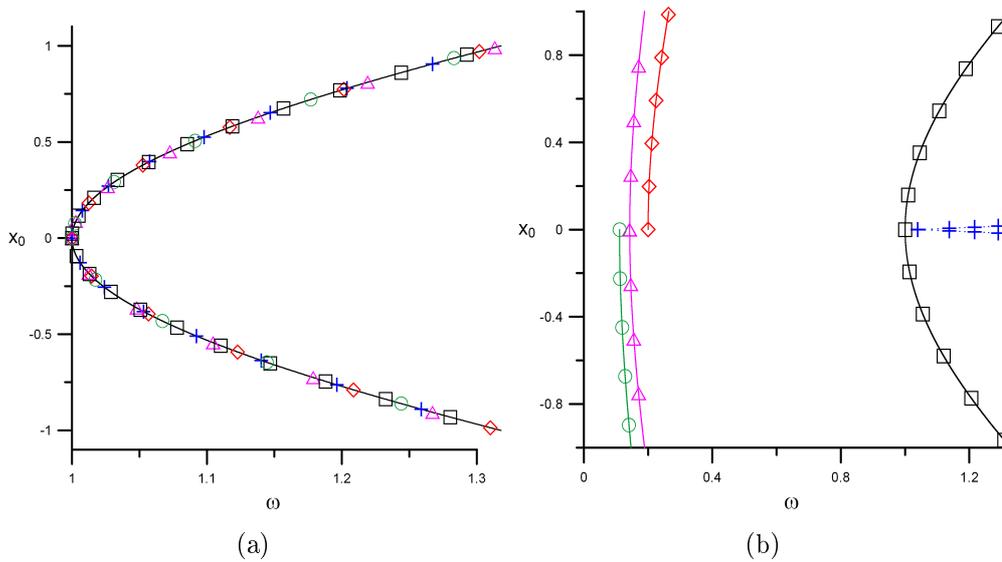


Figura 4.1: ω vs deslocamento inicial, diversas soluções aproximadas. (a) Uma amplitude é escolhida para ser função das demais amplitudes, $c_i = f(x_0, c_j)$ para $i \neq j$: \square , $i = 1$; $+$, $i = 2$; \diamond , $i = 3$; \triangle , $i = 4$; \circ , $i = 5$. (b) Uma amplitude é escolhida como parâmetro de controle, $c_i = cte$: \square , $i = 1$; $+$, $i = 2$; \diamond , $i = 3$; \triangle , $i = 4$; \circ , $i = 5$.

4.3 Vibração Forçada

Para resolver o problema de vibração forçada,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = F \sin \Omega t \quad (4-16)$$

admite-se que a solução seja do tipo

$$x = c_1 \sin \Omega t \quad (4-17)$$

Como anteriormente, substitui-se a solução aproximada na equação diferencial (4-16), obtendo-se

$$-c_1 \Omega^2 \sin \Omega t + \omega_0^2 c_1 \sin \Omega t - \frac{1}{4} \beta c_1^3 \sin 3\Omega t +$$

$$\frac{3}{4}\beta c_1^3 \sin \Omega t - F \sin \Omega t = 0 \quad (4-18)$$

Observa-se que, para que a igualdade (4-18) seja atendida, é necessário que

$$-c_1\Omega^2 + \omega_0^2 c_1 + \frac{3}{4}\beta c_1^3 - F = 0 \quad (4-19)$$

enquanto que o termo $\beta c_1^3/4$, que é a amplitude do terceiro harmônico em (4-18), é o resíduo da solução aproximada, idêntico ao caso de vibração livre, eq. (4-8).

Esta é a equação da curva de ressonância não-linear. Para um dado par (F, Ω) que define a força externa, tem-se uma equação cúbica em c_1 . Resolvendo (4-19) encontram-se três raízes, que, dependendo dos parâmetros, poderão ser uma real e um par complexo conjugado ou três raízes reais.

Considerando mais harmônicos na solução aproximada,

$$x = c_1 \sin \Omega t + c_3 \sin 3\Omega t + c_5 \sin 5\Omega t + c_7 \sin 7\Omega t \quad (4-20)$$

obtém-se o seguinte sistema de equações não-lineares:

$$\begin{aligned} & -\frac{3}{4}\beta c_1^2 c_3 + \frac{3}{2}\beta c_1 c_3^2 + \frac{3}{4}\beta c_3^2 c_5 - F - \frac{3}{4}\beta c_3^2 c_7 + \frac{3}{2}\beta c_1 c_5^2 - \\ & \frac{3}{2}\beta c_1 c_3 c_5 + \frac{3}{2}\beta c_3 c_5 c_7 - c_1\Omega^2 + \omega_0^2 c_1 + \frac{3}{4}\beta c_1^3 - \frac{3}{2}\beta c_1 c_5 c_7 + \\ & \frac{3}{2}\beta c_1 c_7^2 = 0 \\ & \frac{3}{2}\beta c_1^2 c_3 + \frac{3}{4}\beta c_3^3 + \frac{3}{2}\beta c_3 c_7^2 - \frac{3}{2}\beta c_1 c_3 c_7 + \frac{3}{4}\beta c_5^2 c_7 + \frac{3}{2}\beta c_3 c_5^2 + \\ & \frac{3}{2}\beta c_1 c_3 c_5 - \frac{3}{4}\beta c_1^2 c_5 - \frac{1}{4}\beta c_1^3 - 9c_3\Omega^2 + \omega_0^2 c_3 + \frac{3}{2}\beta c_1 c_5 c_7 = 0 \quad (4-21) \\ & -\frac{3}{4}\beta c_1^2 c_3 + \frac{3}{4}\beta c_1 c_3^2 + \frac{3}{2}\beta c_3^2 c_5 - 25c_5\Omega^2 + \omega_0^2 c_5 + \frac{3}{2}\beta c_5 c_7^2 - \\ & \frac{3}{4}\beta c_1^2 c_7 + \frac{3}{2}\beta c_1 c_3 c_7 + \frac{3}{2}\beta c_3 c_5 c_7 + \frac{3}{4}\beta c_5^3 + \frac{3}{2}\beta c_1^2 c_5 = 0 \\ & -\frac{3}{4}\beta c_1 c_3^2 + \frac{3}{4}\beta c_7^3 + \frac{3}{2}\beta c_1^2 c_7 + \frac{3}{2}\beta c_5^2 c_7 + \frac{3}{2}\beta c_3^2 c_7 + \frac{3}{4}\beta c_3 c_5^2 + \\ & \frac{3}{2}\beta c_1 c_3 c_5 - \frac{3}{4}\beta c_1^2 c_5 - 49c_7\Omega^2 + \omega_0^2 c_7 = 0 \end{aligned}$$

que deve ser resolvido numericamente.

Freqüentemente sistemas não-lineares tais como o (4-21) apresentam pontos críticos ou pontos limites onde o método de Newton-Raphson não converge. Neste casos, deve-se utilizar o método do comprimento de arco.

Adicionando a equação de restrição

$$(c_1 - \widehat{c}_1)^2 + (c_3 - \widehat{c}_3)^2 + (c_5 - \widehat{c}_5)^2 + (c_7 - \widehat{c}_7)^2 + (\Omega - \widehat{\Omega})^2 = r^2$$

ao sistema (4-21), onde \widehat{c}_1 , \widehat{c}_3 , \widehat{c}_5 , \widehat{c}_7 e $\widehat{\Omega}$ são os valores da última solução encontrada, e r é um valor pequeno, torna-se possível ultrapassar os pontos limites, obtendo-se a curva de ressonância desejada.

4.3.1

Solução de sistemas algébricos não-lineares através do método de perturbação

O sistema não-linear (4-21) pode ser resolvido usando uma expansão em termos de um parâmetro de perturbação, tal como apresentado por Richards(2002)[81].

Seja a expansão para a frequência Ω :

$$\Omega = \omega_0 + \beta\Omega_1 + \beta^2\Omega_2 + \beta^3\Omega_3 \quad (4-22)$$

Observando que a força na eq. (4-16) contém apenas o primeiro harmônico, sua expansão conterá apenas um único termo em β . Para que F apareça na equação correspondente à primeira potência de β , considera-se, como no capítulo anterior, que a força F seja multiplicada pelo parâmetro não-linear β .

Considera-se de forma similar que o terceiro, o quinto e o sétimo harmônicos da solução aproximada (4-20) só aparecem a partir da primeira, segunda e terceira ordem da potência de β respectivamente. Assim, as expansões para as constantes em (4-20) são

$$c_1 = A \quad (4-23)$$

$$c_3 = \beta c_{31} + \beta^2 c_{32} + \beta^3 c_{33} \quad (4-24)$$

$$c_5 = \beta^2 c_{52} + \beta^3 c_{53} \quad (4-25)$$

$$c_7 = \beta^3 c_{73} \quad (4-26)$$

Substituindo (4-22) a (4-26) em (4-21), e também F por βF , e coletando os termos de mesma potência em β , partindo da potência 1 até a potência três, são obtidas nove novas equações. A duas primeiras eqs. em (4-21) fornecem cada uma três novas equações, enquanto que a terceira fornece duas novas equações e a última apenas uma equação, totalizando nove equações, necessárias para se obter as nove incógnitas envolvidas, Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 , que determinam a frequência da resposta e as constantes c_{31} , c_{32} , c_{33} , c_{52} , c_{53} e c_{73} que determinam as amplitudes dos harmônicos mais altos em termos da amplitude do primeiro harmônico, A . Coletando as potências de β na primeira eq. de (4-21), tem-se

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{4}A^2c_{32} + \frac{3}{2}Ac_{31}^2 - A(2\omega_0\Omega_3 + 2\Omega_1\Omega_2) &= 0 \\
-A(2\omega_0\Omega_2 + \Omega_1^2) - \frac{3}{4}A^2c_{31} &= 0 \\
-2A\omega_0\Omega_1 + \frac{3}{4}A^3 - F &= 0
\end{aligned} \tag{4-27}$$

que fornecem

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= -\frac{F}{2A\omega_0} + \frac{3A^2}{8\omega_0} \\
\Omega_2 &= -\frac{A^2F^2}{8\omega_0^3} + \frac{3AF}{16\omega_0^3} - \frac{9A^4}{128\omega_0^3} - \frac{3A}{8\omega_0}c_{31} \\
\Omega_3 &= \frac{3}{8\omega_0}(-Ac_{32} + 2c_{31}^2) + -\frac{3c_{31}}{64\omega_0^3}(4F - 3A^3) - \\
&\quad \frac{1}{1024A^3\omega_0^5}(64F^3 - 144F^2A^3 + 108FA^6 - 27A^9)
\end{aligned}$$

Coletando as potências de β na segunda das eqs. de (4-21), tem-se

$$\begin{aligned}
-9c_{31}(2\omega_0\Omega_2 + \Omega_1^2) - 18c_{32}\omega_0\Omega_1 - 8c_{33}\omega_0^2 - \frac{3}{4}A^2c_{52} + \frac{3}{2}A^2c_{32} &= 0 \\
-18c_{31}\omega_0\Omega_1 - 8c_{32}\omega_0^2 + \frac{3}{2}A^2c_{31} &= 0 \\
-8c_{31}\omega_0^2 - \frac{1}{4}A^3 &= 0
\end{aligned} \tag{4-28}$$

Da última das eqs. (4-28) retira-se c_{31} , da segunda c_{32} e da primeira, c_{33} , a saber

$$\begin{aligned}
c_{31} &= -\frac{A^3}{32\omega_0^2} \\
c_{32} &= -\frac{21A^5}{1024\omega_0^4} - \frac{9A^2F}{256\omega_0^4} \\
c_{33} &= -\frac{3A^2}{32\omega_0^2}c_{52} - \frac{207A^7}{16384\omega_0^6} + \frac{189A^4F}{4096\omega_0^6} - \frac{81AF^2}{2048\omega_0^6}
\end{aligned} \tag{4-29}$$

Coletando as potências de β na terceira eq. de (4-21), escreve-se duas novas equações

$$\begin{aligned}
-50c_{52}\omega_0\Omega_1 - 24c_{53}\omega_0^2 + \frac{3}{4}Ac_{31}^2 + \frac{3}{2}A^2c_{52} - \frac{3}{4}A^2c_{32} &= 0 \\
-\frac{3}{4}A^2c_{31} - 24c_{52}\omega_0^2 &= 0
\end{aligned}$$

de onde são retirados c_{52} , e c_{53} ,

$$c_{52} = \frac{A^5}{1024\omega_0^4}$$

$$c_{53} = -\frac{43A^7}{32768\omega_0^6} + \frac{13A^4F}{6144\omega_0^6}$$

Da última das eqs. (4-21), ao coletar as potências de β , obtém-se mais uma equação,

$$-\frac{3}{4}Ac_{31}^2 - 48c_{73}\omega_0^2 - \frac{3}{4}A^2c_{52} = 0 \quad (4-30)$$

que permite a obtenção de c_{73}

$$c_{73} = -\frac{A^7}{32768\omega_0^6} \quad (4-31)$$

De posse de todas as constantes, pode-se escrever a frequência (4-22) e a solução aproximada (4-20)

$$\Omega = \omega_0 - \frac{1}{8A\omega_0}\beta(-3A^3 + 4F) - \frac{\beta^2}{256A^2\omega_0^3}(15A^6 - 48A^3F + 32F^2) - \frac{\beta^3}{8192A^3\omega_0^5}(-123A^9 + 708A^6F - 1152A^3F^2 + 512F^3) \quad (4-32)$$

$$\begin{aligned} x(t) = A \sin \Omega t + & \left\{ -\frac{1}{32\omega^2}\beta A^3 + \beta^2\left(\frac{21}{1024\omega^4}A^5 - \frac{9}{256\omega^4}A^2F\right) + \right. \\ & \left. \beta^3\left(-\frac{417}{32768\omega^6}A^7 + \frac{189}{4096F\omega^6}A^4 - \frac{81}{2048\omega^6}AF^2\right) \right\} \sin 3\Omega t + \\ & \left(\frac{1}{1024\omega^4}\beta^2 A^5 + \beta^3\left(-\frac{43}{32768\omega^6}A^7 + \frac{13}{6144\omega^6}A^4F\right)\right) \sin 5\Omega t - \\ & \frac{1}{32768\omega^6}\beta^3 A^7 \sin 7\Omega t \end{aligned} \quad (4-33)$$

Os resultados são coincidentes com os encontrados pelo LP tradicional, eqs. (3-52) para Ω e (3-53) para $x(t)$.

Pode-se, entretanto, considerar a seguinte expansão para ω_0 ,

$$\omega_0^2 = \Omega^2 - \beta\omega_{01} - \beta^2\omega_{02} - \beta^3\omega_{03} \quad (4-34)$$

Repetindo todo o processo, encontram-se a seguinte relação frequência-amplitude e solução no tempo

$$\begin{aligned} \Omega^2 = \omega_0^2 + \beta\left(-\frac{1}{A}F + \frac{3}{4}A^2\right) + \frac{3}{128\Omega^2}\beta^2 A^4 + \left(\frac{15}{4096\Omega^4}A^6 + \frac{3}{1024\Omega^4}A^3F\right)\beta^3 \\ x(t) = A \sin \Omega t - \left(\frac{A^3}{32\beta\omega_0^2} - \frac{21\beta^2 A^5}{1024\omega_0^4} + \frac{9\beta^2 A^2 F}{256\omega_0^4} + \frac{417\beta^3 A^7}{32768\omega_0^6} - \frac{189\beta^3 A^4 F}{4096\omega_0^6} + \frac{81\beta^3 A F^2}{2048\omega_0^6}\right) \sin 3\Omega t + \left(\frac{\beta^2 A^5}{1024\omega_0^4} - \frac{43\beta^3 A^7}{32768\omega_0^6} + \right. \end{aligned} \quad (4-35)$$

$$\left. \frac{13\beta^3 A^4 F}{6144\omega_0^6} \right) \sin 5\Omega t - \frac{\beta^3 A^7}{32768\omega_0^6} \sin 7\Omega t \quad (4-36)$$

A frequência dada por (4-35) e a solução no tempo (4-33) coincidem com as encontradas pelo LP modificado, eqs. (3-113) e (3-112).

4.4

Vibração Forçada Amortecida

Inserindo um termo de amortecimento na eq. (4-16), tem-se

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x + \beta x^3 = F \sin \Omega t \quad (4-37)$$

a solução aproximada é escrita contendo um único harmônico e com um ângulo de fase ϕ , ou seja

$$x = c_1 \sin(\Omega t + \phi_1) \quad (4-38)$$

Como anteriormente, substitui-se a solução aproximada na equação diferencial (4-37) e, após a expansão das potências, obtém-se

$$\begin{aligned} & -c_1 \sin(\Omega t + \phi_1)\Omega^2 + 2\zeta\omega_0 c_1 \cos(\Omega t + \phi_1)\Omega + \omega_0^2 c_1 \sin(\Omega t + \phi_1) - \\ & \frac{1}{4}\beta c_1^3 \sin 3\Omega t + \frac{3}{4}\beta c_1^3 \sin(\Omega t + \phi_1) - F \sin(\Omega t + \phi_1) = 0 \end{aligned} \quad (4-39)$$

Expandindo $\sin(\Omega t + \phi_1)$ e $\cos(\Omega t + \phi_1)$ em (4-39) e pondo em evidência os harmônicos $\sin \Omega t$ e $\cos \Omega t$, chega-se respectivamente às seguintes equações:

$$\begin{aligned} & \left(\omega_0^2 c_1 + \frac{3}{4}\beta c_1^3 - c_1 \Omega^2 \right) \cos \phi_1 - F - 2\zeta\omega_0 \Omega c_1 \sin \phi_1 = 0 \\ & \left(\omega_0^2 c_1 + \frac{3}{4}\beta c_1^3 - c_1 \Omega^2 \right) \sin \phi_1 + 2\zeta\omega_0 \Omega c_1 \cos \phi_1 = 0 \end{aligned} \quad (4-40)$$

onde as incógnitas são a amplitude c_1 e ângulo de fase ϕ_1 . O ângulo ϕ_1 é determinado isolando $\cos \phi_1$ na primeira das eqs. (4-40). Depois $\cos \phi_1$ é substituído na segunda das eqs. (4-40) e obtém-se $\sin \phi_1$ e conseqüentemente ϕ_1 . A amplitude c_1 é obtida ao se escrever $(\cos \phi_1)^2 + (\sin \phi_1)^2 = 1$, mas não será apresentada por ser uma expressão muito extensa. O ângulo de fase é dado por

$$\sin \phi_1 = - \frac{2\zeta\omega_0 c_1 \Omega F}{\left(\omega_0^2 c_1 + \frac{3}{4}\beta c_1^3 - c_1 \Omega^2 \right)^2 \left(1 + \frac{4\zeta^2 \omega_0^2 c_1^2 \Omega^2}{\left(\omega_0^2 c_1 + \frac{3}{4}\beta c_1^3 - c_1 \Omega^2 \right)^2} \right)} \quad (4-41)$$

A eq. (4-38) é a solução analítica do problema de vibração forçada amortecida pelo HBM. Adicionando mais termos, não é possível encontrar uma solução analítica. Porém, ao serem inseridos mais termos na solução (4-38) é mais conveniente escrever a solução aproximada sem o ângulo fase.

4.5 Método de Galerkin-Urabe

O método de Galerkin-Urabe é semelhante ao HBM. A diferença é que, em vez de se expandir as potências e produtos das funções trigonométricas e fazer o “balanço” dos harmônicos, emprega-se o método de Galerkin para gerar um sistema de equações algébricas não-lineares para a determinação das amplitudes dos harmônicos.

Considerando novamente a eq. (4-4) como exemplo, a solução aproximada é tomada na forma

$$x = c_1 \cos \omega t + c_3 \cos 3\omega t \quad (4-42)$$

Substituindo a solução aproximada (4-42) em (4-4), tem-se

$$\begin{aligned} & -c_1 \omega^2 \cos \omega t - 9c_3 \omega^2 \cos 3\omega t + \omega_0^2 c_1 \cos \omega t + \omega_0^2 c_3 \cos 3\omega t + \\ & \beta c_1^3 (\cos \omega t)^3 + 3\beta c_1^2 c_3 (\cos \omega t)^2 \cos 3\omega t + \\ & 3\beta c_1 c_3^2 \cos \omega t (\cos 3\omega t)^2 + \beta c_3^3 (\cos 3\omega t)^3 = 0 \end{aligned} \quad (4-43)$$

Como a igualdade (4-43) não é atendida, o lado esquerdo é na verdade um resíduo.

Deseja-se que o resíduo ao longo de todo o domínio seja zero, dessa forma o resíduo é multiplicado por funções peso e integrado ao longo do domínio da equação diferencial e feito igual a zero. As funções peso são

$$W_i = \frac{\partial x}{\partial c_i} \quad (4-44)$$

$$W_1 = \cos \omega t \quad (4-45)$$

$$W_2 = \cos 3\omega t \quad (4-46)$$

O sistema de equações não-lineares de onde a solução será retirada é obtido fazendo a integração, ao longo de um período, do resíduo multiplicado pela função peso, isto é

$$\int_0^T (W_i R dt) = 0 \quad (4-47)$$

A partir de (4-47), chega-se ao sistema

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\omega} \left(-c_1\omega^2 + c_1\omega_0^2 + \frac{3}{2}\beta c_1 c_3^2 + \frac{3}{4}\beta c_1^2 c_3 + \frac{3}{4}\beta c_1^3 \right) &= 0 \\ \frac{\pi}{\omega} \left(\frac{3}{4}\beta c_3^3 - 9\omega^2 c_3 + \frac{3}{2}\beta c_1^2 c_3 + \frac{1}{4}\beta c_1^3 + \omega_0^2 c_3 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4-48)$$

que é um sistema similar ao obtido com o HBM, eq. (4-12). Percebe-se que as equações obtidas com o método de Galerkin são π/ω vezes maiores que as equações obtidas com o HBM. Isto ocorre pela integração das funções trigonométricas ao longo do período.

4.6 Método do balanço harmônico incremental

O IHBM foi desenvolvido por Cheung e Lau (1981) [2]. No HBM tradicional, chega-se a um sistema não-linear de equações. Para resolvê-lo, aplica-se o método de Newton-Raphson, que é a expansão em séries de Taylor das equações não-lineares, onde os termos de alta ordem são desprezados. Neste método, a expansão da série de Taylor ocorre antes da substituição da solução aproximada no problema a ser resolvido.

Considerando somente o problema mais geral de vibração forçada amortecida, tem-se que

$$\varphi = \Omega^2 x'' + 2\Omega\zeta\omega_0\beta x' + \omega_0^2 x + \beta x^3 - F \cos \tau = 0 \quad (4-49)$$

Expandindo a função φ em série de Taylor e desprezando os termos de mais alta ordem, tem-se

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial x''} \Delta x'' + \frac{\partial\varphi}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial \Omega} \Delta \Omega + \frac{\partial\varphi}{\partial F} \Delta F + \frac{\partial\varphi}{\partial \beta} \Delta \beta \quad (4-50)$$

onde

$$\varphi_0 = \Omega^2 x'' + 2\Omega\zeta\omega_0\beta x' + \omega_0^2 x + \beta x^3 - F \cos \tau \quad (4-51)$$

Agora x , x' , x'' , Δx , $\Delta x'$, e $\Delta x''$ são dados por séries de Fourier.

Utilizando a mais simples solução possível para uma equação com não-linearidade ímpar amortecida, adota-se

$$\begin{aligned} x &= c_1 \sin \tau + d_1 \cos \tau \\ x' &= c_1 \cos \tau - d_1 \sin \tau \\ x'' &= -c_1 \sin \tau - d_1 \cos \tau \\ \Delta x &= \Delta c_1 \sin \tau + \Delta d_1 \cos \tau \\ \Delta x' &= \Delta c_1 \cos \tau - \Delta d_1 \sin \tau \end{aligned}$$

$$\Delta x'' = -\Delta c_1 \sin \tau - \Delta d_1 \cos \tau \quad (4-52)$$

Inserindo (4-51) e as eqs. (4-52) em (4-50), simplificando as potências trigonométricas, e coletando os harmônicos, chega-se ao sistema

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}\beta c_1 d_1 \Delta_{d_1} + \omega_0^2 \Delta_{c_1} + \frac{3}{4}\Delta_\beta c_1 d_1^2 + \frac{3}{4}\beta c_1^3 + 2\Delta_{\omega_0} \omega_0 c_1 + \frac{3}{4}\Delta_\beta c_1^3 + \\ & \frac{9}{4}\beta c_1^2 \Delta_{c_1} + \frac{3}{4}\beta d_1^2 \Delta_{c_1} - 2\zeta \omega_0 d_1 - 2\zeta \omega_0 \Delta_{d_1} - \Omega^2 c_1 - 2\Omega \Delta_\Omega c_1 + \\ & \omega_0^2 c_1 + \frac{3}{4}\beta c_1 d_1^2 - \Omega^2 \Delta_{c_1} - 2\Delta_{\omega_0} \zeta d_1 = 0 \end{aligned} \quad (4-53)$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4}\beta c_1^2 d_1 + \frac{9}{4}\beta d_1^2 \Delta_{d_1} + \omega_0^2 \Delta_{d_1} - 2\Omega \Delta_\Omega d_1 + \frac{3}{4}\beta d_1^3 + \frac{3}{2}\beta c_1 d_1 \Delta_{c_1} - \\ & F + \frac{3}{4}\Delta_\beta d_1^3 + \frac{3}{4}\Delta_\beta c_1^2 d_1 + 2\zeta \omega_0 \Delta_{c_1} + 2\Delta_{\omega_0} \zeta c_1 + 2\Delta_{\omega_0} \omega_0 d_1 + \\ & \frac{3}{4}\beta c_1^2 \Delta_{d_1} + 2\zeta \omega_0 c_1 - \Omega^2 d_1 + \omega_0^2 d_1 - \Omega^2 \Delta_{d_1} = 0 \end{aligned} \quad (4-54)$$

Escolhendo apenas as amplitudes dos harmônicos c_1 e d_1 como incógnitas, tem-se que Ω , F e β são constantes. Assim $\Delta\Omega$, ΔF e $\Delta\beta$ valem zero em (4-53) e (4-54). Obtém-se, de (4-53) e (4-54), o sistema sob a forma matricial,

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc} \frac{3\beta}{4}(3c_1^2 + d_1^2) + \omega_0^2 - \Omega^2 & \frac{3}{2}\beta c_1 d_1 - 2\zeta \omega_0 \\ \frac{3}{2}\beta c_1 d_1 + 2\zeta \omega_0 & \frac{3\beta}{4}(c_1^2 + 3d_1^2) + \omega_0^2 - \Omega^2 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \Delta c_1 \\ \Delta d_1 \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} \frac{3}{4}\beta c_1^3 - 2\zeta \omega_0 d_1 - \Omega^2 c_1 + \omega_0^2 c_1 + \frac{3}{4}\beta c_1 d_1^2 \\ \frac{3}{4}\beta c_1^2 d_1 + \frac{3}{4}\beta d_1^3 - F + 2\zeta \omega_0 c_1 - \Omega^2 d_1 + \omega_0^2 d_1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4-55)$$

Inicialmente são atribuídos valores quaisquer para c_1 e d_1 e encontram-se Δc_1 e Δd_1 resolvendo o sistema (4-55). Dessa forma c_1 e d_1 são atualizados e encontram-se novos Δc_1 e Δd_1 . Atualiza-se c_1 e d_1 até que $\Delta c_1 \cong \Delta d_1 \cong 0$. Quando isso acontecer, tem-se a solução c_1 e d_1 para os parâmetros Ω , F , β e ω_0 . Eventualmente em alguns pontos críticos da curva de ressonância o sistema (4-55) não irá convergir. Novamente o comprimento de arco é utilizado através da equação.

$$\varphi_1 = (c_1 - \widehat{c}_1)^2 + (d_1 - \widehat{d}_1)^2 + (\Omega - \widehat{\Omega})^2 - r^2 \quad (4-56)$$

onde \widehat{c}_1 , \widehat{d}_1 e $\widehat{\Omega}$ correspondem à última solução conhecida. Expandindo (4-56) em série de Taylor, tem-se

$$\begin{aligned} \varphi_1 \approx & (c_1 - \widehat{c}_1)^2 + (d_1 - \widehat{d}_1)^2 + (\Omega - \widehat{\Omega})^2 - r^2 + (2\Omega - 2\widehat{\Omega})\Delta_\Omega + \\ & (2c_1 - 2\widehat{c}_1)\Delta_{c_1} + (2d_1 - 2\widehat{d}_1)\Delta_{d_1} \end{aligned} \quad (4-57)$$

Assim, o sistema de eqs. (4-55) passa a ter a forma

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a & \frac{3}{2}\beta c_1 d_1 - 2\zeta\omega_0 & -2\Omega c_1 \\ \frac{3}{2}\beta c_1 d_1 + 2\zeta\omega_0 & b & -2\Omega d_1 \\ 2c_1 - 2c_{10} & 2d_1 - 2d_{10} & 2\Omega - 2\Omega_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta c_1 \\ \Delta d_1 \\ \Delta \Omega \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} \frac{3}{4}\beta c_1^3 - 2\zeta\omega_0 d_1 - \Omega^2 c_1 + \omega_0^2 c_1 + \frac{3}{4}\beta c_1 d_1^2 \\ \frac{3}{4}\beta c_1^2 d_1 + \frac{3}{4}\beta d_1^3 - F + 2\zeta\omega_0 c_1 - \Omega^2 d_1 + \omega_0^2 d_1 \\ (c_1 - c_{10})^2 + (d_1 - d_{10})^2 + (\Omega - \Omega_0)^2 - r^2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4-58)$$

onde

$$a = \frac{9}{4}\beta c_1^2 + \frac{3}{4}\beta d_1^2 + \omega_0^2 - \Omega^2 \quad (4-59)$$

$$b = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta c_1^2 + \frac{9}{4}\beta d_1^2 - \Omega^2 \quad (4-60)$$

que é idêntico ao resultado obtido com o HBM.

4.7

Não Linearidade Quadrática

Seja novamente a equação

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0 \quad (4-61)$$

A solução aproximada necessita conter o harmônico fundamental ω já que o termo linear está presente, além do termo constante e o harmônico típico da não-linearidade quadrática, $\cos 2\omega t$. Tem-se pois a aproximação

$$x(t) = c_0 + c_1 \cos \omega t + c_2 \cos 2\omega t \quad (4-62)$$

Substituindo (4-62) em (4-61) e coletando os termos constantes e os coeficientes dos harmônicos presentes em (4-62), chega-se ao sistema

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha c_2^2 + \alpha c_0^2 + \omega_0^2 c_0 + \frac{1}{2}\alpha c_1^2 &= 0 \\ 2\alpha c_1 c_0 + \alpha c_1 c_2 + \omega_0^2 c_1 - c_1 \omega^2 &= 0 \\ 2\alpha c_2 c_0 + \frac{1}{2}\alpha c_1^2 + \omega_0^2 c_2 - 4c_2 \omega^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4-63)$$

Utilizando a condição inicial de deslocamento,

$$x(0) = c_0 + c_1 + c_2 \quad (4-64)$$

pode-se por qualquer constante em função das demais, mas isto pode trazer problemas de convergência, além de múltiplas soluções que embora atendam (4-63), não existem na realidade. Isto é evitado ao se fixar a amplitude c_1 do primeiro harmônico ao se resolver o sistema (4-63).