

5

Sistemas Lineares com Coeficientes Periódicos

Este capítulo trata de forma sucinta do estudo da estabilidade de soluções periódicas de sistemas dinâmicos não-lineares.

Segundo Rand [83], a teoria de Floquet é a teoria mais geral que trata de equações diferenciais lineares com coeficientes periódicos do tipo

$$\dot{x} = A(t)x \quad (5-1)$$

Fazendo um mapeamento de Poincaré de um sistema linear, pode-se verificar que as coordenadas que determinam o estado do sistema num determinado instante de tempo t (vetor de estado x em t) estão linearmente conectadas com as coordenadas num instante defasado de um certo Δt através de uma matriz Φ , tal como ilustrado na figura 5.1, ou seja

$$\{x\}_{t+\Delta t} = [\Phi]_{t+\Delta t, t} \{x\}_t \quad (5-2)$$

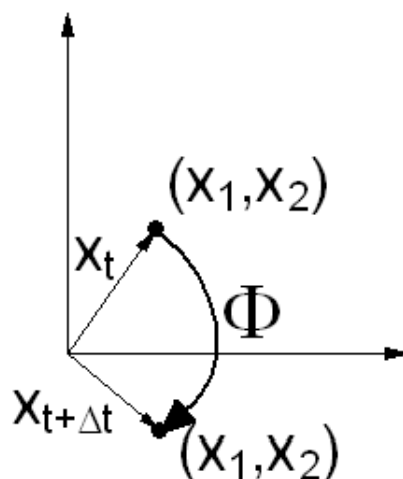


Figura 5.1: Espaço de fase

Φ é chamada de matriz de transição ou matriz de monodromia.

Se A em (5-1) for constante, Φ é dado por

$$\Phi_{t,0} = e^{At} \quad (5-3)$$

Nos casos em que A é periódico, o teorema de Floquet afirma que a matriz de transição assume a forma.

$$\Phi_{t,0} = P(t)e^{Rt} \quad (5-4)$$

onde $P(t)$ é uma função periódica e R é uma matriz constante.

Em geral é muito difícil obter Φ analiticamente, para estes casos é necessário definir as matrizes de soluções que possibilitam o cálculo de Φ numericamente. De forma semelhante à eq. (5-2), pode-se escrever que

$$[X]_{t+T} = [\Phi]_{t+T,t} [X]_t \quad (5-5)$$

Assim,

$$[\Phi]_{t+T,t} = [X]_{t+T} [X]_t^{-1} \quad (5-6)$$

5.1

Multiplicadores de Floquet

Com base em (5-3), sabe-se que, quando A é constante, seus autovalores definem o comportamento do sistema ao longo do tempo. Autovalores positivos indicam que a solução irá crescer indefinidamente, autovalores nulos indicam órbitas periódicas e, para autovalores negativos, a solução tende assintoticamente para zero. Portanto, os autovalores da matriz de transição Φ e da matriz A estão relacionados. A relação é dada pela eq. (5-3). Logo os autovalores de Φ são as exponenciais dos autovalores λ de A , como ilustra a figura 5.2. Os autovalores de Φ são chamados de multiplicadores de Floquet e indicam instabilidade para valores maiores que 1.

O módulo dos multiplicadores de Floquet relacionam o módulo das componentes de dois vetores de estado, separados por um intervalo de tempo Δt igual ao período T de A .

A seguinte relação entre os multiplicadores de Floquet e a parte real dos

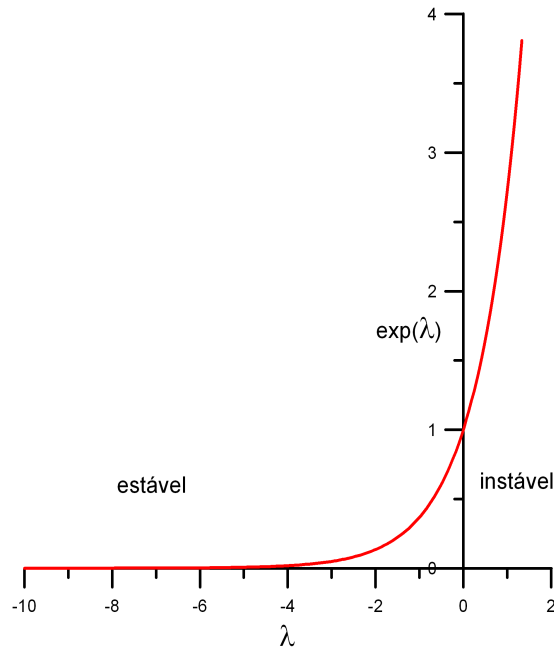


Figura 5.2: Relação entre um autovalor de Φ e um autovalor de A

autovalores de A é válida, quando A é constante

$$\begin{aligned} |\lambda_{\Phi}^i| > 1 &\Rightarrow |x_{t+T}^i| > |x_t^i| \Rightarrow \lambda_A^i > 0 \\ |\lambda_{\Phi}^i| = 1 &\Rightarrow |x_{t+T}^i| = |x_t^i| \Rightarrow \lambda_A^i = 0 \\ |\lambda_{\Phi}^i| < 1 &\Rightarrow |x_{t+T}^i| < |x_t^i| \Rightarrow \lambda_A^i < 0 \end{aligned} \quad (5-7)$$

Portanto, se o módulo de algum multiplicador de Floquet for maior que 1, há instabilidade associada a alguma direção do espaço de fase.

A matriz Φ pode ser computada em (5-6) a partir de uma matriz diagonal de soluções

$$X_t = \begin{bmatrix} \delta & & \\ & \ddots & \\ & & \delta \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

Em geral assume-se $\delta = 1$, o que permite simplificar um pouco a eq. (5-6), obtendo-se

$$[\Phi]_{(t+T,t)} = [X]_{t+T} \quad (5-9)$$

Como os autovalores de Φ podem ser complexos conjugados, diversos autores classificam os tipos de bifurcações de acordo com as formas com que estes autovalores ultrapassam o módulo unitário. Isto é visualizado por um plano onde o eixo horizontal corresponde à parte real do autovalor e o eixo vertical contém a componente imaginária do autovalor, como mostra a figura 5.3 ([84]).

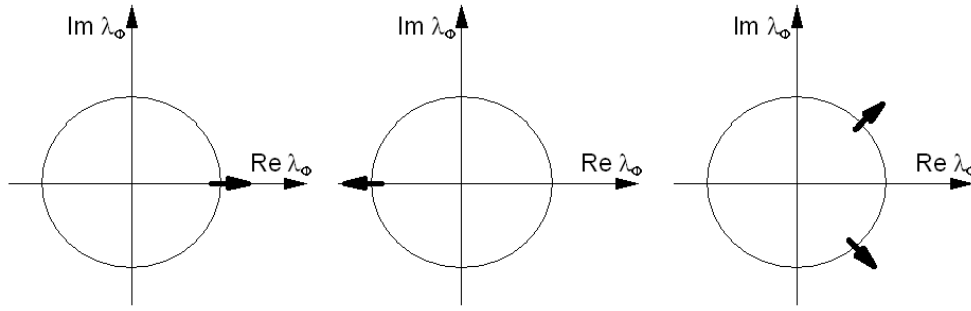


Figura 5.3: Possibilidades de perda de estabilidade de uma solução periódica.

5.2

Estabilidade de sistemas não-lineares

A estabilidade de soluções periódicas de sistemas não-lineares é determinada pela avaliação ao longo do tempo de uma perturbação ϵ , muito pequena, que é adicionada à solução periódica conhecida. Se a perturbação cresce com o passar do tempo, então o sistema é instável.

Para saber a tendência da perturbação, basta linearizar a equação. A equação linearizada obrigatoriamente terá coeficientes periódicos, o que conduz à utilização da teoria de Floquet.

Tomando como exemplo a equação de Duffing, ao se adicionar uma perturbação $\epsilon(t)$ à solução $x(t)$, tem-se

$$\ddot{x} + \ddot{\epsilon} + 2\zeta\omega_0(\dot{x} + \dot{\epsilon}) + \omega_0^2(x + \epsilon) + \beta(x + \epsilon)^3 = F \sin \Omega t \quad (5-10)$$

Eliminando os termos não-lineares em ϵ e tendo em mente que $\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x + \beta x^3 = F \sin \Omega t$, obtém-se,

$$\ddot{\epsilon} + 2\zeta\omega_0\dot{\epsilon} + \omega_0^2\epsilon + 3\beta x^2\epsilon = 0 \quad (5-11)$$

onde o coeficiente $3\beta x^2$ é uma função periódica em t , dado que $x(t)$ é a solução periódica cuja estabilidade se deseja analisar.

Assumindo as seguintes relações

$$\epsilon = \epsilon_1$$

$$\dot{\epsilon} = \epsilon_2$$

a eq. (5-11) é transformada em um sistema de primeira ordem

$$\begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ \dot{\epsilon}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 - 3\beta x^2 & -2\zeta\omega_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{Bmatrix} \quad (5-12)$$

O que deseja-se é encontrar os autovalores da matriz de transição Φ do sistema (5-12). Com a matrix de condições iniciais sendo uma identidade, pode-se obter Φ através de (5-9), integrando (5-12) durante um período T correspondente à solução da equação diferencial não-linear, $x(t)$.

5.2.1 Determinante de Hill

Considerando novamente o equação de Duffing,

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x + \beta x^3 = F \sin \Omega t \quad (5-13)$$

a solução aproximada pode ser escrita como,

$$x = a \cos \Omega t + b \sin \Omega t \quad (5-14)$$

Acrescentando uma perturbação ϵ à solução aproximada (5-14), e desprezando os termos não-lineares, chega-se à seguinte equação que rege a perturbação,

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon} + 2\omega_0\zeta\dot{\epsilon} + (\omega_0^2 + \frac{3}{2}\beta(a^2 + b^2) + 3\beta ab \sin 2\Omega t + \\ \frac{3}{2}\beta(a^2 - b^2) \cos 2\Omega t)\epsilon = 0 \end{aligned} \quad (5-15)$$

cuja solução, segundo Floquet, é dada por

$$\epsilon = e^{\mu t} \phi(t) \quad (5-16)$$

onde μ é chamado expoente característico.

Substituindo (5-16) em (5-15), tem-se

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + (2\mu + 2\omega_0\zeta)\dot{\phi} + (\mu^2 + 2\omega_0\zeta\mu + \omega_0^2 + \frac{3}{2}\beta(a^2 + b^2) + \\ 3\beta ab \sin 2\Omega t + (\frac{3}{2}\beta(a^2 - b^2) \cos 2\Omega t)\phi = 0 \end{aligned} \quad (5-17)$$

Aplicando o HBM, substitui-se

$$\phi = c \cos \omega t + d \sin \omega t \quad (5-18)$$

em (5-17) e realiza-se o balanço dos harmônicos.

De acordo com Hayashi (1964) [85], fazendo $\omega = \Omega$, os expoentes característicos μ estarão associados à região da primeira ressonância. Para as regiões

de ressonância par é necessário considerar o termo constante em (5-18).

Para $\omega = \Omega$, o HBM conduz ao seguinte sistema de equações lineares,

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c \\ d \end{Bmatrix} = 0 \quad (5-19)$$

sendo

$$\begin{aligned} M_{11} &= 2\omega_0\zeta\mu + \mu^2 + \frac{3}{4}\beta b^2 + \omega_0^2 + \frac{9}{4}\beta a^2 - \Omega^2 \\ M_{12} &= 2\mu\Omega + \frac{3}{2}\beta ab + 2\omega_0\zeta\Omega \\ M_{21} &= -2\mu\Omega + \frac{3}{2}\beta ab - 2\omega_0\zeta\Omega \\ M_{22} &= \mu^2 + 2\omega_0\zeta\mu + \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta a^2 + \frac{9}{4}\beta b^2 - \Omega^2 \end{aligned}$$

Para que existam soluções não triviais, é necessário que o determinante da matriz do sistema linear (5-19) seja nulo. Igualando o determinante a zero, encontra-se uma equação que permite que o expoente característico μ seja determinado. Tem-se assim

$$\begin{aligned} &\mu^4 + 4\omega_0\zeta\mu^3 + (3\beta(a^2 + b^2) + 4\omega_0^2\zeta^2 + 2(\Omega^2 + \omega_0^2))\mu^2 + \\ &(4\omega_0\zeta\Omega^2 + 6\omega_0\zeta\beta(a^2 + b^2) + 4\omega_0^3\zeta)\mu + 3\omega_0^2\beta a^2 - 3\beta b^2\Omega^2 + \\ &\frac{27}{8}\beta^2 b^2 a^2 + 3\beta b^2\omega_0^2 + 4\omega_0^2\zeta^2\Omega^2 - 3\beta a^2\Omega^2 + \omega_0^4 + \frac{27}{16}\beta^2 a^4 - \\ &2\omega_0^2\Omega^2 + \frac{27}{16}\beta^2 b^4 + \Omega^4 = 0 \end{aligned} \quad (5-20)$$

Se μ for imaginário, a solução (5-16) é estável, se μ for real a solução é instável, pois $e^{-\mu t}\phi(-t)$ também é uma solução independente que atende (5-15). μ só será real se o termo independente de (5-20) for menor que zero. Portanto, o que ocorre na prática, ao se avaliar a estabilidade de uma solução periódica é fazer $\mu = 0$ e calcular o determinante. Determinante positivo corresponde a um μ imaginário e conseqüentemente a solução será estável, e determinante negativo, a uma solução instável.

Fazendo $\mu = 0$ em (5-20), tem-se

$$\begin{aligned} &4\omega_0^2\zeta^2\Omega^2 - 3\beta a^2\Omega^2 + \omega_0^4 + \frac{27}{16}\beta^2 a^4 + 3\omega_0^2\beta a^2 - 3\beta b^2\Omega^2 + \\ &\frac{27}{8}\beta^2 b^2 a^2 + 3\beta b^2\omega_0^2 + \Omega^4 - 2\omega_0^2\Omega^2 + \frac{27}{16}\beta^2 b^4 = 0 \end{aligned} \quad (5-21)$$

Conseqüentemente, as soluções obtidas com o HBM (tal como (5-14)) para o problema (5-13) são estáveis quando (5-21) for maior que zero.