

5

Modelos Econométricos

5.1

Fronteira Estocástica de Produção

Segundo Bauer [13], os primeiros modelos de fronteira estocástica (também conhecida na literatura como modelos de erro-composto) foram introduzidos por Meeusen & van den Broeck [63], Aigner et al [1] e Battese & Corra [12]. O modelo básico é dado por:

$$y_j = h(\mathbf{x}_j; \boldsymbol{\beta}) \exp(v_j - u_j) \quad (5.1.1)$$

Admitindo que $h(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\beta})$ seja linear nos logaritmos, pode-se obter, após a aplicação de uma transformação logarítmica em (5.1.1), a seguinte função de produção [21]:

$$\ln y_j = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i \ln x_{ji} + \sum_{i \leq k=1}^m \sum_{k=1}^m \beta_{ik} \ln x_{ji} \ln x_{jk} + v_j - u_j \quad (5.1.2)$$

A equação (5.1.2) é denominada na literatura por função Translog. Quando os produtos cruzados são nulos, tem-se um caso particular denominado função Cobb-Douglas. De posse dessas informações, pode-se definir a parte determinística da fronteira:

- $\ln y_j$ - logaritmo natural do *output* da j -ésima DMU ($j = 1, \dots, n$);
- $\ln x_{ji}$ - logaritmo natural do i -ésimo *input* da j -ésima DMU (incluindo o intercepto);
- $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_m]^T$ - um vetor de parâmetros desconhecidos a serem estimados.

Já o desvio entre o nível de produção observado e a parte determinística da fronteira de produção é dado pela combinação de duas componentes:

- u_j - um erro que assume apenas valores não negativos e que captura o efeito da ineficiência técnica;
- v_j - um erro simétrico que captura qualquer choque aleatório não gerenciável.

Fazendo $\varepsilon_j = v_j - u_j$, tem-se a seguinte equação de regressão:

$$\ln y_j = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i \ln x_{ji} + \sum_{i \leq k=1}^m \sum_{k=1}^m \beta_{ik} \ln x_{ji} \ln x_{jk} + \varepsilon_j \quad (5.1.3)$$

Em geral, admite-se que v_j seja uma variável aleatória *i.i.d.* (independente e identicamente distribuída) com distribuição simétrica, usualmente uma distribuição normal. A hipótese de simetria da distribuição de v_j está traduzida pelo fato de que as condições ambientais desfavoráveis e favoráveis são igualmente prováveis. Por sua vez, a distribuição de probabilidade para a componente u_j ($u_j \geq 0$) não é evidente, a priori, e por isso pode ser especificada segundo diferentes formas, por exemplo, Meeusen & van den Broeck [63] utilizaram a distribuição exponencial, Aigner et al [1] recomendaram a distribuição *Half-Normal*, Stevenson [84] propôs a Normal-Truncada e, finalmente, Greene [45] sugeriu a distribuição Gama. Mais recentemente Medrano & Migon [62] utilizaram a distribuição log Normal. É importante sublinhar que v_j é independente de u_j . Outra questão que merece ser registrada, refere-se ao fato da distribuição do erro composto, ε_j , ser assimétrica. Portanto, modelos de regressão com erros simetricamente distribuídos e com média zero não são apropriados para estimar a função fronteira estocástica em (5.1.3).

Para estimar a eficiência técnica de cada produtor é necessário extrair da estimativa de ε_j as estimativas de v_j e u_j . Conforme explicado, isto requer alguma suposição sobre as distribuições das duas componentes de erro. Estas suposições permitem a utilização do método de máxima verossimilhança na estimação dos parâmetros do modelo de regressão e também são importantes no procedimento de estimação da eficiência técnica dos produtores, baseado na distribuição condicional de u_j em ε_j .

Para ilustrar, seja a formulação básica dos modelos de fronteira estocástica, onde as seguintes hipóteses acerca dos termos aleatórios v_j e u_j são admitidas:

$$(H1) \quad v_j \sim iid N(0, \sigma_v^2) \Rightarrow f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right)$$

$$(H2) \quad u_j \sim iid N^+\left(\eta_j, \tau^2\right) \Rightarrow f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau\Phi\left(\frac{\eta}{\tau}\right)} \exp\left(-\frac{(u-\eta)^2}{2\tau^2}\right) \text{ (Normal-Truncada}$$

não negativa)

$$(H3) \quad u_j \text{ é independente de } v_j$$

$$(H4) \quad v_j \text{ e } u_j \text{ são independentes de } x_j.$$

Ressalta-se que, na hipótese **(H2)**, se $\eta_j = 0$, a distribuição de $f(u)$ é denominada *Half-Normal*. A partir da hipótese **(H3)** tem-se que a distribuição conjunta de v_j e u_j é o produto das densidades marginais em **(H1)** e **(H2)**. Esta formulação, Normal-truncada, foi inicialmente proposta por Stevenson [84], visando amenizar as críticas que envolviam as distribuições *Half Normal* e Exponencial. Afinal, conforme reportado em [84], estas distribuições têm a moda em zero tendo assim, uma alta probabilidade de que as ineficiências sejam nulas. A partir dessas considerações e dado que $\varepsilon_j = v_j - u_j$, tem-se a distribuição conjunta de u_j e ε_j :

$$f(u, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi\tau\sigma_v\Phi\left(\frac{\eta}{\tau}\right)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{(u-\eta)^2}{\tau^2} + \frac{(\varepsilon+u)^2}{\sigma_v^2}\right]\right) \quad (5.1.4)$$

Integrando a função densidade (5.1.4) em relação a u , obtém-se a distribuição marginal de ε , dada por:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_v^2 + \tau^2}} \cdot \phi\left(\frac{\varepsilon + \eta}{\sqrt{\sigma_v^2 + \tau^2}}\right) \cdot \Phi\left(\frac{-\tau(\varepsilon + \eta)}{\sigma_v\sqrt{\sigma_v^2 + \tau^2}} + \frac{\eta\sqrt{\sigma_v^2 + \tau^2}}{\sigma_v\tau}\right) \cdot \left[\Phi\left(\frac{\eta}{\tau}\right)\right]^{-1} \quad (5.1.5)$$

onde $\phi(\cdot)$ é a função de densidade da Normal-padrão e $\Phi(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada da Normal-padrão.

A função densidade (5.1.5) pode ser parametrizada como:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{\varepsilon + \eta}{\sigma}\right) \cdot \Phi\left(\frac{-\lambda(\varepsilon + \eta)}{\sigma} + \eta^*\right) \cdot \left[\Phi\left(\frac{\eta}{\tau}\right)\right]^{-1} \quad (5.1.6)$$

onde $\sigma = \sqrt{\sigma_v^2 + \tau^2}$, $\lambda = \tau/\sigma_v$ e $\eta^* = \frac{\eta\sqrt{\sigma_v^2 + \tau^2}}{\sigma_v\tau}$.

A distribuição, $f(\varepsilon)$, é negativamente assimétrica com média e variância dadas por:

$$\mathbf{E}(\varepsilon) = -\mathbf{E}(u) = \left[\Phi\left(\frac{\eta}{\tau}\right)\right]^{-1} \left(-\frac{\eta}{2} - \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^2\right)\right) \quad (5.1.7)$$

$$\mathbf{Var}(\varepsilon) = \eta^2 \frac{a}{2} \left(1 - \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2} \left(\frac{\pi - a}{2}\right) \tau^2 + \sigma_v^2 \quad (5.1.8)$$

onde $a = \left[\Phi\left(\frac{\eta}{\tau}\right)\right]^{-1}$

Dado que $\varepsilon_j = y_j - \left(\beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i \ln x_{ji} + \sum_{i \leq k=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_{ik} \ln x_{ji} \ln x_{jk}\right)$ e usando a

função densidade em (5.1.6), o logaritmo da função de verossimilhança para uma amostra com n DMU's é escrita como:

$$L = \text{constante} - n \ln \sigma - n \ln \left[\Phi\left(\frac{\eta}{\tau}\right)\right] + \sum_j \ln \left(\Phi\left(\frac{-\lambda(\varepsilon_j + \eta)}{\sigma} + \eta^*\right)\right) - \frac{1}{2} \sum_j \left(\frac{\varepsilon_j + \eta}{\sigma}\right)^2 \quad (5.1.9)$$

As estimativas de máxima verossimilhança, são os valores de τ , σ_v e β_i ($i=0, \dots, m$) que maximizam a equação (5.1.9). Estas estimativas são assintoticamente consistentes.

A parametrização do logaritmo da verossimilhança em termos de $\sigma^2 = \tau^2 + \sigma_v^2$ e $\gamma = \tau^2 / (\tau^2 + \sigma_v^2) \in [0, 1]$ ajuda na maximização da função de verossimilhança e facilita a interpretação do modelo.

Quando $\gamma=0$, a ineficiência é inexistente, pois σ_v^2 domina a variância do erro composto e os desvios em relação à fronteira devem-se unicamente a ruídos aleatórios. Por outro lado, quando $\gamma=1$, τ^2 domina a variância do erro composto e

o desvio em relação à fronteira deve-se inteiramente à ineficiência. Portanto, pode-se utilizar o teste da razão da verossimilhança (*LR test*) para testar a hipótese nula $H_0: \gamma=0$. Porém, como γ pode cair nos limites do intervalo $[0,1]$, a distribuição da razão de verossimilhança é uma mistura de qui-quadrados, i.e., aproximadamente uma χ_1^2 .

Para estimar a eficiência técnica de cada produtor é necessário ter uma estimativa de u_j , a componente do erro que captura o efeito da ineficiência técnica. Esta estimativa pode ser obtida a partir dos resíduos $\hat{\varepsilon}_j$, pois $\varepsilon_j = v_j - u_j$. Usando as funções densidade em (5.1.4) e (5.1.6), Jondrow et al [52] estimaram u_j como sendo a média ou a moda da distribuição condicionada, $f(u|\varepsilon) = f(u, \varepsilon)/f(\varepsilon)$. A equação (5.1.10) fornece os resultados encontrados:

$$f(u|\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_* \left[1 - \Phi\left(-\frac{\tilde{\eta}}{\sigma_*}\right)\right]} \exp\left\{-\frac{(u - \tilde{\eta})^2}{2\sigma_*^2}\right\} \Rightarrow u_i|\varepsilon_i \sim N^+(\tilde{\eta}, \sigma_*^2) \quad (5.1.10)$$

onde $\tilde{\eta}$ é função dos valores teóricos τ , σ^2 , ou seja: $\tilde{\eta} = (-\tau^2\varepsilon + \eta\sigma_v^2)/\sigma^2$ e $\sigma_*^2 = \tau^2\sigma_v^2/\sigma^2$.

Então, a estimativa pontual de u_j , também definida em função dos valores teóricos τ , σ^2 , é calculada pela média de $f(u|\varepsilon)$:

$$\hat{u}_j = E(u_j|\varepsilon_j) = \sigma_* \left[\frac{\tilde{\eta}_j}{\sigma_*} + \frac{\phi\left(\frac{\tilde{\eta}_j}{\sigma_*}\right)}{1 - \Phi\left(-\frac{\tilde{\eta}_j}{\sigma_*}\right)} \right] \quad (5.1.11)$$

ou pela moda de $f(u|\varepsilon)$

$$\hat{u}_i = M(u_i|\varepsilon_i) = \tilde{\eta}_j \quad , \text{ se } \tilde{\eta}_j \geq 0 \quad (5.1.12)$$

$\hat{u}_i = 0$, caso contrário

Finalmente, tem-se a estimativa da eficiência técnica da j -ésima DMU:

$$\mathbf{ET}_j = \exp(-\hat{u}_j) \quad (5.1.13)$$

5.2

Fronteira Estocástica de Custos

Da mesma forma que na fronteira de produção, v_j é irrestrita em sinal e captura choques aleatórios não gerenciáveis e u_j , uma variável não negativa que reflete o grau de ineficiência do produtor. Entretanto, diferentemente do modelo de fronteira estocástica de produção, na fronteira de custo o erro u_j captura o efeito da ineficiência econômica, i.e., reflete as parcelas alocativa e técnica da ineficiência.

A medida de eficiência econômica da j -ésima DMU é a razão entre o mínimo custo teórico especificado pela função fronteira estocástica ($C(y_j, \mathbf{w}_j, \boldsymbol{\beta})$) e o custo efetivamente observado na j -ésima DMU (\mathbf{E}_j):

$$\mathbf{CE}_j = \frac{\mathbf{E}_j}{C(y_j, \mathbf{w}_j, \boldsymbol{\beta}) \exp(v_j)} = \exp(u_j) \quad (5.2.1)$$

onde, $\mathbf{w}_j = [w_{j1} \ \dots \ w_{jm}]^T$ e os demais termos como definidos anteriormente;

$\mathbf{E}_j = \mathbf{x}_j \mathbf{w}_j$ é o custo total incorrido pela j -ésima DMU; $C(y_j, \mathbf{w}_j, \boldsymbol{\beta}) \exp(v_j)$ é o custo estabelecido pela fronteira estocástica.

Arranjando os termos da igualdade mostrada em (5.2.1) encontra-se a seguinte equação:

$$\mathbf{E}_j = C(y_j, \mathbf{w}_j, \boldsymbol{\beta}) \exp(v_j + u_j), \quad j=1, \dots, n \quad (5.2.2)$$

Nesta tese são considerados somente modelos de fronteira com equação única, baseados no custo total, na quantidade de *outputs* e nos preços dos *inputs*. Tais modelos não permitem decompor a medida de eficiência econômica nas componentes alocativa e técnica.

Vale sublinhar que só é possível obter a decomposição da medida de eficiência, por meio de modelos de equações simultâneas, que são mais

sofisticados e necessitam de dados acerca do custo total, quantidades de *outputs*, preços e quantidades dos *inputs* de cada produtor.

Assumindo a hipótese de eficiência alocativa, o erro u_j é relacionado com a ineficiência técnica e, portanto, os modelos de equação única estimam medidas de eficiência técnica, segundo uma orientação ao insumo (*input*). Porém, se esta suposição não é feita, a interpretação de u_j não é clara, pois ele representa uma mistura de ineficiência técnica e alocativa. Por esta razão, a medida de eficiência obtida a partir de uma fronteira de custo é denominada eficiência econômica.

Admitindo que a parcela determinística da fronteira estocástica de custo, $C(y_j, w_j, \beta)$, tenha apenas um *output*, pode-se adotar uma forma funcional, por exemplo Cobb-Douglas, resultando na seguinte equação:

$$\ln E_j = \beta_0 + \beta_j \ln y_j + \beta_1 \ln w_{j1} \dots + \beta_m \ln w_{jm} + v_j + u_j \quad (5.2.3)$$

onde $u_j = -\ln(\text{CE}_j) \geq 0$.

Comparando as equações (5.2.2) e (5.2.3) (à luz da função Cobb-Douglas), pode-se perceber que na fronteira de custo o termo relacionado à ineficiência, u_j , é adicionado à fronteira. A razão para tal deve-se ao fato de que a função custo representa o custo mínimo enquanto a função produção representa o máximo nível de produção. Apesar destas diferenças, a estimação dos parâmetros da equação (5.2.3) e dos índices de eficiência das DMU's são realizadas da mesma forma que na fronteira de produção.

A seguir, na Figura 5.1, são apresentadas três densidades de probabilidade resultantes da combinação $v_j + u_j$, onde $u_j \sim$ Normal Truncada e $v_j \sim$ Normal, geradas considerando $\sigma = \tau = 1$, em um contexto de fronteira de custos.

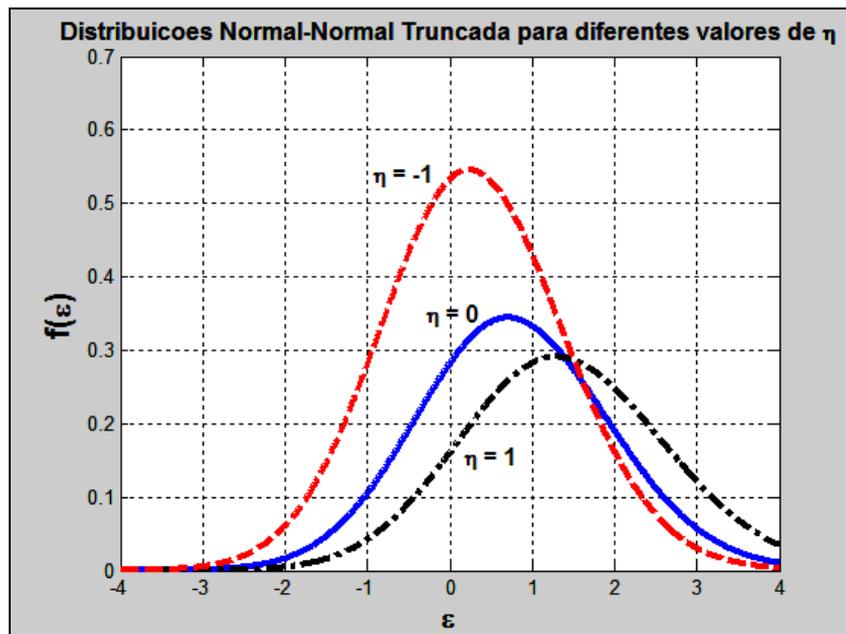


Figura 5.1: Densidades de probabilidade da combinação $v_j + u_j$.

Vale mencionar que a fronteira estocástica é alvo de várias críticas, principalmente, com relação ao termo aleatório u_j . Uma primeira crítica refere-se ao fato de que, geralmente, não há nenhuma justificativa a priori para a seleção de qualquer forma de distribuição deste termo. Outro ponto relevante abordado por Koop et al [55], baseia-se no fato de que u_j é muito sensível à escolha da forma funcional da fronteira. Neste contexto, é importante destacar que há na literatura outras formas funcionais mais flexíveis, conforme apresentado em [55, 62].

De qualquer modo, este trabalho calcula as ineficiências técnicas usando as funções Translog e Cobb-Douglas.

5.3

Fronteira Estocástica sob o paradigma Bayesiano

O modelo de fronteira estocástica sob o paradigma Bayesiano foi proposto no trabalho seminal de van den Broeck, Koop, Osiewalski e Steel – BKOS - [94]. Nesta mesma publicação, os autores citam, com bastante propriedade, duas razões para adotar a técnica Bayesiana em modelos de fronteira estocástica:

- i. a técnica Bayesiana pode ser considerada mais robusta por fornecer resultados mais acurados, mesmo para pequenas amostras;

- ii. os modelos Bayesianos permitem que o especialista incorpore alguma informação que ele detém, a priori, sobre os parâmetros do modelo.

Vale registrar que, na maioria das vezes, os modelos Bayesianos são bastante complexos. Portanto, é inevitável a aplicação de métodos baseados em simulação. Neste cenário, vale lembrar que van den Broeck et al et al [94] empregaram os métodos de Monte Carlo via função de importância. Em seguida, Koop, Osiewalski e Steel – KOS - [56] investigaram a utilização do Amostrador de Gibbs para fazer inferências na distribuição a posteriori. Griffin & Steel [46] comentam que este trabalho pode ser considerado o responsável por diversos outros estudos envolvendo fronteiras estocásticas e algoritmos MCMC. De fato, posteriormente Koot et al [57] apresentaram modelos Bayesianos com dados em painel, Fernández et al [32] examinaram uma questão fundamental em inferência Bayesiana que é a existência da distribuição a posteriori quando a distribuição a priori é imprópria. Em Osiewalski & Steel [69] pode-se encontrar uma descrição clara e objetiva sobre os métodos numéricos. Finalizando, Tsionas [93] propõe uma alternativa para modelos cuja ineficiência se distribui como uma distribuição Gama ($\Gamma(\cdot)$), não sendo necessário que o parâmetro da forma seja inteiro (distribuições da família Erlang). O uso de fronteiras estocásticas com ênfase Bayesiana também pode ser encontrado em, por exemplo, [17,61].

5.3.1

Modelos Bayesianos para Fronteira Estocástica

Conforme já registrado, em sua versão básica, o modelo econométrico com erro composto para estimação de uma fronteira estocástica de custos pode ser expressa matematicamente como:

$$\ln y_j = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i \ln x_{ji} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \beta_{ik} \ln x_{jk} + v_j + u_j \quad (5.3.1.1)$$

Em um contexto Bayesiano, inicialmente formula-se a distribuição amostral e então faz-se a especificação das distribuições de probabilidade assumidas a priori para os parâmetros do modelo. Neste estudo são considerados

os coeficientes β , da função fronteira, e os parâmetros das distribuições de probabilidade associadas com os termos aleatórios u e v . Também é assumido que o termo aleatório $v_j \sim iid N(0, \sigma^2)$, i.e. distribuição Normal com média 0 e variância constante σ^2 . É relevante mencionar que para u_j , adotou-se três distribuições muito utilizadas na literatura:

- i. $u_j \sim iid \Gamma(\alpha, \lambda^{-1})^7$ - Exponencial com média (desvio-padrão) λ ;
- ii. $u_j \sim iid N^+(0, \lambda^{-1})$ - *Half Normal*;
- iii. $u_j \sim iid N^+(\eta_j, \tau^2)$ - Normal-Truncada.

5.3.2

Varying Efficiency Distribution (VED) models

Em diversas situações, é razoável assumir que as eficiências das DMU's com características similares sejam relacionadas no modelo. Para tal, atribuiu a cada DMU um vetor constituído de variáveis exógenas s_{jl} ($l=2, \dots, k$), em geral representadas por *dummies*. Para estes casos, Osiewalski & Steel [69] propuseram, para a eficiência média, a seguinte parametrização:

$$\lambda_j = \prod_{l=1}^k \phi_l^{-s_{jl}} \quad (5.3.2.1)$$

Vale informar que $\phi_l > 0$ são os parâmetros desconhecidos e $s_{j1} \equiv 1$. Se $k > 1$, as distribuições de u_j podem diferir para diferentes j e então Koop et al [57] denominaram esta especificação como modelo *Varying Efficiency Distribution (VED)*. Se $k = 1$, então $\lambda_j = \phi_1^{-1}$ e todos os termos relacionados às ineficiências constituem amostras independentes da mesma distribuição. Segundo Osiewalski & Steel [69], este é um caso especial chamado *Common Efficiency Distribution (CED)*.

⁷ Para o caso da distribuição exponencial, considere $\alpha = 1$.

Aqui, é interessante apresentar uma outra parametrização, análoga à equação (5.3.2.1), proposta por Koop et al [57]:

$$\lambda_j = \mathbf{exp}(-s_j \gamma) \quad (5.3.2.2)$$

Igualando as expressões (5.3.2.1) e (5.3.2.2), não é difícil concluir que $\phi_l = \mathbf{exp}(\gamma_l)$.

Para elucidar esses conceitos, seja a distribuição conjunta de y_j e $u_j \sim iid \Gamma(1, \lambda^{-1})$ dado \mathbf{x}_j , $s_j = [1 \text{ dummy}_1 \dots \text{dummy}_k]$ e $\theta = [\boldsymbol{\beta}^T \ \sigma^{-2} \ \phi_1 \ \dots \ \phi_k]^T$:

$$p(y_j, u_j | s_j, \mathbf{x}_j, \theta) = f(y_j | h(\mathbf{x}_j; \boldsymbol{\beta}) + u_j, \sigma^2) \Gamma\left(u_j \mid 1, \prod_{l=1}^k \phi_l^{s_{jl}}\right) \quad (5.3.2.3)$$

A distribuição amostral é dada por:

$$p(y_j | s_j, \mathbf{x}_j, \theta) = \int_0^\infty f(y_j | h(\mathbf{x}_j; \boldsymbol{\beta}) + u_j, \sigma^2) \Gamma\left(u_j \mid 1, \prod_{l=1}^k \phi_l^{s_{jl}}\right) du_j \quad (5.3.2.4)$$

Esta distribuição também pode ser representada da seguinte forma:

$$p(y_j | s_j, \mathbf{x}_j, \theta) = \lambda_j^{-1} \cdot \mathbf{exp}\left[-\lambda_j^{-1} \left(m_j + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda_j^{-1}\right)\right] \Phi\left(\frac{m_j}{\sigma}\right) \quad (5.3.2.5)$$

onde:

$$m_j = y_j - h(\mathbf{x}_j; \boldsymbol{\beta}) - \sigma^2 \lambda_j^{-1}$$

A função de verossimilhança, $l(\theta; \text{dados})$, bastante complexa, é o produto das densidades mostradas em (5.3.2.5) em função do indexador j .

A abordagem Bayesiana requer a especificação das distribuições a priori para os parâmetros. A princípio, a distribuição a priori de θ pode ser qualquer, mas é usualmente não recomendável incorporar muita informação subjetiva sobre os mesmos. Dessa forma, tem-se as seguintes distribuições a priori:

$$\boldsymbol{\beta} \sim N^+(0, \sigma_{\boldsymbol{\beta}}^2); \quad (5.3.2.6)$$

$$\sigma^{-2} \sim \Gamma\left(\frac{n_0}{2}, \frac{c_0}{2}\right); \quad (5.3.2.7)$$

$$\phi_l \sim \Gamma(a_l, g_l) \quad (5.3.2.8)$$

$$\exp(-\gamma) \sim \Gamma\left(1, -\ln(r^*)\right)^8 \quad (5.3.2.9)$$

Segundo Fernández et al [32], é fundamental que as prioris de σ sejam informativas ($n_0 > 0$ e $c_0 > 0$) para assegurar a existência da distribuição a posteriori em modelos de fronteira estocástica com amostra *cross-section*. Com relação aos k parâmetros da distribuição da eficiência, Koop et al [57] sugerem utilizar $a_l = g_l = 1$ para $l = 2, \dots, k$, $a_1 = 1$ e $g_1 = -\ln(r^*)$, onde $r^* \in (0, 1)$ é o hiperparâmetro a ser determinado. De acordo com van den Broeck et al [94], no modelo CED, r^* pode ser interpretado como a eficiência mediana a priori, pois ele é exatamente a mediana da distribuição marginal do termo relacionado com a eficiência, $r_j = \exp(-u_j)$. Procedendo desta maneira, pode-se assegurar que o modelo VED é consistente com o modelo CED.

Até o momento, foi citado apenas o caso onde $u_j \sim iid \Gamma(1, \lambda^{-1})$ (item (i) retrocitado). Quando $u_j \sim iid N^+(0, \lambda^{-1})$, item (ii), tem-se um modelo parcimonioso. De acordo com van den Broeck et al [94], a distribuição a priori para o parâmetro λ é dado por

$$\lambda \sim \Gamma\left(1, -\ln(r^*)\right) \quad (5.3.2.10)$$

Com relação ao item (iii), Normal-Truncada, este será apresentado oportunamente.

5.4

Inferência Bayesiana usando Amostrador de Gibbs

Conforme já foi reportado, a técnica Bayesiana combina toda a informação sobre as quantidades de interesse em sua distribuição a posteriori. Vale citar que como o objetivo de uma análise envolvendo fronteira estocástica é fazer não somente inferências sobre os parâmetros da fronteira de tecnologia, mas também sobre as eficiências individuais de cada empresa, é interessante expressar a densidade a posteriori da seguinte forma:

⁸ Vide Griffin & Steel [46] para maiores detalhes a respeito desta parametrização.

$$\pi(\mathbf{u}, \theta | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{S}) = p(\mathbf{u} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{S}) p(\theta | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{S}) \quad (5.4.1)$$

ou

$$\pi(\mathbf{u}, \theta | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{S}) \propto p(\mathbf{u} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{S}) p(\theta) l(\theta; \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{S}) \quad (5.4.2)$$

Agora, ao invés de integrar a expressão (5.4.2) em função de \mathbf{u} (conforme foi feito em (5.3.2.4)), Osiewalski & Steel [69] apresentam uma forma mais fácil, que é considerar θ dado \mathbf{u} e os dados. Pode ser verificado que a inclusão do termo aleatório \mathbf{u} , no Amostrador de Gibbs, faz com que a dimensão do modelo seja $(n+m+k+1)$ e, conseqüentemente, maior que o número de unidades observadas. Apesar desta alta dimensionalidade, os passos necessários para implementar o Amostrador de Gibbs são relativamente fáceis conforme mostrado em Koop et al [56].

Neste ponto, é digno descrever as distribuições condicionais completas:

$$\pi(\sigma^{-2} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{S}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}, \phi) = \pi(\sigma^{-2} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) = \Gamma \left(\frac{n+n_0}{2}, \frac{c_0 + \sum_j (y_j - h(\mathbf{x}_j; \boldsymbol{\beta}) - u_j)^2}{2} \right) \quad (5.4.3)$$

$$\pi(\boldsymbol{\beta} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{S}, \mathbf{u}, \sigma^{-2}, \phi) = \pi(\boldsymbol{\beta} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{u}, \sigma^{-2}) \propto N^+ \left(\boldsymbol{\beta} | 0, \sigma_{\boldsymbol{\beta}}^2 \right) \times \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma^{-2} \sum_j (y_j - h(\mathbf{x}_j; \boldsymbol{\beta}) - u_j)^2 \right) \quad (5.4.4)$$

A distribuição condicional completa de ϕ_l ($l = 1, \dots, k$) apresenta a seguinte forma geral:

$$\pi(\phi_l | y, X, S, u, \beta, \sigma^{-2}, \phi_{(-l)}) = \pi(\phi_l | S, \phi_{(-l)}) \propto \exp\left(-\phi_l \sum_j u_j D_{jl}\right) \times \Gamma\left(\phi_l \left| 1 + \sum_j s_{jl}, g_l \right.\right) \quad (5.4.5)$$

onde:

$$D_{jl} = \prod_{j \neq l}^k \phi_j^{s_{jl}} \quad (5.4.6)$$

para $l=1, \dots, k$ ($D_{j1} = 1$ para $k=1$) e $\phi_{(-l)}$ denota ϕ sem o seu l -ésimo elemento.

Por fim, o vetor relacionado às ineficiências não-observadas condicionado aos parâmetros e dados tem uma densidade Normal-Truncada, ou seja:

$$\pi(u | y, X, S, \theta) = \prod_{j=1}^n \frac{f_N(u_j | \eta^*, \sigma_*^2)}{\Phi\left(\frac{\eta^*}{\sqrt{\sigma_*^2}}\right)} \quad (5.4.7)$$

sendo:

$$\eta^* = \frac{(\eta\sigma^2 + y_j \tau^2 - h(x_j; \beta))\tau^2}{(\sigma^2 + \tau^2)} \quad (5.4.8)$$

e

$$\sigma_*^2 = \frac{(\sigma^2 + \tau^2)}{\sigma^2 \tau^2} \quad (5.4.9)$$

De posse desses resultados, pode-se verificar que as amostras de u_j são geradas a partir de (5.4.7) e imediatamente convertidas em indicadores de eficiência definida como $r_j = \exp(-u_j)$.