

2

Aleatorização em experimentos fatoriais

Neste capítulo serão vistos conceitos fundamentais para a execução de planejamentos experimentais, a relação entre alguns desses conceitos e exemplificações. O foco também consiste em estabelecer uma orientação inicial para os casos em que ocorrem restrições quanto à aleatorização experimental, introduzindo o ponto de vista de alguns estudiosos sobre o assunto.

2.1

Princípios Básicos em Planejamento de Experimentos

Em determinadas áreas de estudo, pesquisadores sempre estão interessados em saber quais variáveis são importantes em algum estudo que se esteja realizando, se ocorre ou não interação entre elas, e quais são os limites superior e inferior de valores dessas variáveis. Técnicas estatísticas são importantes para a análise dos dados e obtenção de conclusões consistentes sobre a pesquisa. É nesse contexto que se consolida o planejamento experimental por ser um conjunto de técnicas estatísticas que auxiliam na obtenção e análise dos resultados experimentais. Esse conjunto de passos, juntamente com outras importantes etapas em um estudo científico, conduz a um roteiro fornecido resumidamente por Montgomery (2001) para o planejamento e análise de experimentos. São eles:

1. Reconhecer e definir o problema;
2. Escolher os fatores, níveis e faixas de variação desses fatores;
3. Selecionar a variável de resposta;
4. Escolher o experimento;
5. Realizar o experimento;
6. Analisar estatisticamente os dados;
7. Concluir e estabelecer recomendações.

Contudo, como em todo projeto experimental, além da necessidade de seguir um roteiro de execução e diagnose, existem princípios básicos que regem

sua elaboração, implementação e análise. Segundo Montgomery (2001) os três princípios básicos de um projeto experimental são: replicação, aleatorização e blocagem. Para melhor compreensão serão fornecidas, a seguir, as definições desses três princípios:

- **Replicação:** é a repetição do experimento básico. Existem duas propriedades importantes desse princípio que são: permitir ao experimentalista obter estimativas do erro experimental; e se a média da amostra é usada para estimar o efeito de um fator no experimento, a replicação também permite ao experimentalista obter uma estimativa mais precisa desse efeito (Montgomery, 2001).
- **Blocagem:** consiste em conter e avaliar a variabilidade produzida pelos fatores perturbadores (controláveis ou não-controláveis) do experimento. Esta técnica permite criar um experimento (grupos ou unidades experimentais balanceadas) mais homogêneo e aumentar a precisão das respostas que são analisadas (Galdámez, 2002).
- **Aleatorização:** é o processo de definir a ordem dos tratamentos da matriz experimental, através de sorteios ou por limitações específicas dos testes. Refere-se também ao processo de alocação do material e equipamento às diferentes condições de experimentação (Galdámez, 2002).

Entre os três princípios expostos, a aleatorização terá maior ênfase neste trabalho. Entretanto, como será visto conceitualmente, blocagem e aleatorização estão diretamente relacionados, tendo em vista que a primeira é também considerada uma restrição no processo de aleatorização do experimento.

A decisão em executar na prática estes três princípios está restrita às condições reais em que será desenvolvido o experimento, às limitações de custo e ao que se pretende priorizar na análise experimental. Sendo assim, neste capítulo serão apresentadas algumas diretrizes conceituais que darão suporte à compreensão da relação entre blocagem e aleatorização, e dos pontos-chaves diretamente vinculados a estes princípios.

2.2

Blocos

Há muitas situações nas quais existem grandes dificuldades para se executar todas as corridas em um experimento fatorial 2^k , sob condições homogêneas. Em outros casos deve ser desejável variar deliberadamente as condições experimentais para assegurar que os tratamentos sejam igualmente eficazes em algumas situações encontradas na prática (Montgomery, 2001). Nessas circunstâncias é utilizada uma técnica de projeto experimental conhecida como blocos ou blocagem.

Considere um exemplo em que um equipamento é usado para localizar entalhes no corte de uma placa de circuito impresso. O nível de vibração na superfície da placa no momento do corte é considerado a maior fonte de variação dimensional. Dois fatores são considerados influentes na vibração: a espessura do corte (fator A) e velocidade de corte (fator B). Duas espessuras ($\frac{1}{16}$ e $\frac{1}{8}$ polegadas) e duas velocidades (40 e 90 rpm) foram selecionadas, sendo estes considerados os seus níveis baixo (-1) e alto (+1), respectivamente. Quatro replicações foram estabelecidas para o experimento, conforme as condições apresentadas a seguir (Tabela 2.1). A variável de resposta é a vibração medida em cada placa de teste. As placas foram trabalhadas com base em cada uma das condições apresentadas a seguir:

Tabela 2.1 – Experimento 2^2 com quatro réplicas.

A	B	Combinação dos tratamentos	Réplica			
			I	II	III	IV
-1	-1	A baixo, B baixo	18,2	18,9	12,9	14,4
1	-1	A alto, B baixo	27,2	24	22,4	22,5
-1	1	A baixo, B alto	15,9	14,5	15,1	14,2
1	1	A alto, B alto	41	43,9	36,3	39,9

Fonte: Montgomery (2001).

Supõe-se ainda que apenas quatro tentativas experimentais possam ser feitas em uma única placa. Sabendo-se que para executar todas as quatro replicações serão necessárias quatro placas, o novo arranjo dos dados para esta

condição experimental é apresentado no Quadro 2.1, no qual se configura o critério de atribuir condições não-homogêneas ao experimento.

Quadro 2.1 – Experimento com quatro blocos.

Fonte: Montgomery (2001).

	Bloco 1	Bloco 2	Bloco 3	Bloco 4
	(1) = 18,2 $a = 27,2$ $b = 15,9$ $ab = 41$	(1) = 18,9 $a = 24$ $b = 14,5$ $ab = 43,9$	(1) = 12,9 $a = 22,4$ $b = 15,1$ $ab = 36,3$	(1) = 14,4 $a = 22,5$ $b = 14,2$ $ab = 39,9$
Total dos blocos :	$B_1 = 102,3$	$B_2 = 82,4$	$B_3 = 86,7$	$B_4 = 91$

Lembrando que as observações são os valores da variável de resposta obtidos através de todas as interações possíveis entre os valores assumidos pelas variáveis independentes, outro meio de apresentação dos dados para o exemplo da placa de circuito impresso é o apresentado na Tabela 2.2, onde são especificadas as combinações de tratamentos e seus respectivos efeitos fatoriais no experimento.

Tabela 2.2 – Apresentação dos dados do experimento com quatro blocos.

Blocos	Combinação de tratamentos	Efeito Fatorial			Observações
		A	B	AB	
Bloco 1	-1	-1	-1	1	18,2
	a	1	-1	-1	27,2
	b	-1	1	-1	15,9
	ab	1	1	1	41
Bloco 2	-1	-1	-1	1	18,9
	a	1	-1	-1	24
	b	-1	1	-1	14,5
	ab	1	1	1	43,9
Bloco 3	-1	-1	-1	1	12,9
	a	1	-1	-1	22,4
	b	-1	1	-1	15,1
	ab	1	1	1	36,3
Bloco 4	-1	-1	-1	1	14,4
	a	1	-1	-1	22,5
	b	-1	1	-1	14,2
	ab	1	1	1	39,9

As combinações dos tratamentos são marcadas, em geral, por uma série de letras minúsculas. Quando a combinação for representada pela letra minúscula a significa que o fator A está no seu nível alto, o mesmo ocorre para os demais

fatores. Quando todos os fatores, em uma determinada combinação de tratamentos, estiverem no nível baixo esta combinação é denotada por (1).

Através deste arranjo é possível identificar que, se em um dado experimento houver n replicações, então para um dado experimento, cada conjunto de condições não-homogêneas define um bloco e cada réplica é executada em um dos blocos (Montgomery, 2001).

O modelo matemático para representar esse planejamento experimental é dado por:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \delta_k + \epsilon_{ijk} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (2.1)$$

Onde:

μ é a média global dos resultados;

τ_i é o efeito do i -ésimo tratamento do fator principal A;

β_j é o efeito do j -ésimo tratamento do fator principal B;

$(\tau\beta)_{ij}$ é o efeito relacionado à interação AB;

δ_k é o efeito do k -ésimo bloco;

ϵ_{ijk} é o erro experimental aleatório que segue distribuição normal padrão.

Há apenas uma observação por combinação de tratamento em cada bloco e há uma aleatoriedade na ordem de realização das combinações de tratamentos dentro de cada bloco. Logo, os blocos representam uma restrição quanto à aleatorização experimental. Considera-se também que não há interação entre tratamentos e blocos. Isto é, o efeito do tratamento i é o mesmo, independente de qual bloco (ou blocos) ele seja testado.

Neste experimento, está-se interessado em testar a igualdade dos efeitos dos tratamentos, assim como das combinações de tratamentos, ou seja,

$$\begin{aligned} 1. H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_i = 0 \\ H_1 : \tau_i \neq 0 \text{ para no mínimo um } i. \\ 2. H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_j = 0 \\ H_1 : \beta_i \neq 0 \text{ para no mínimo um } j. \\ 3. H_0 : (\tau\beta)_{11} = (\tau\beta)_{12} = \dots = (\tau\beta)_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$H_1 : (\tau\beta)_{ij} \neq 0 \text{ para no m\u00ednimo uma intera\u00e7\u00e3o.}$$

Se as hip\u00f3teses nulas forem verdadeiras cada observa\u00e7\u00e3o consistir\u00e1 na m\u00e9dia global μ mais um componente de erro aleat\u00f3rio ϵ_{ijk} , ou seja, a mudan\u00e7a nos n\u00edveis dos fatores n\u00e3o tem efeito sobre a resposta m\u00e9dia. Estendendo-se, ent\u00e3o \u00e0 An\u00e1lise de Vari\u00e2ncia (ANOVA) para testar estas hip\u00f3teses neste tipo de planejamento experimental, tem-se a identidade da soma quadr\u00e1tica para um experimento fatorial, acrescida da soma quadr\u00e1tica para o efeito dos blocos, conforme representado simbolicamente a seguir:

$$SQ_T = SQ_A + SQ_B + SQ_{AB} + SQ_{BLOCOS} + SQ_E \quad (2.3)$$

onde SQ_T \u00e9 a soma quadr\u00e1tica total; SQ_A \u00e9 a soma quadr\u00e1tica devido ao fator A ; SQ_B \u00e9 a soma quadr\u00e1tica devido ao fator B ; SQ_{AB} \u00e9 a soma quadr\u00e1tica devido \u00e0 intera\u00e7\u00e3o AB ; SQ_{BLOCOS} \u00e9 a soma quadr\u00e1tica devido aos blocos; e SQ_E \u00e9 a soma quadr\u00e1tica referente ao erro experimental. H\u00e1 um total de $abn - 1$ graus de liberdade que est\u00e3o distribuídos entre os efeitos principais, a intera\u00e7\u00e3o, os blocos e o erro experimental. Lembrando que as replica\u00e7\u00f5es foram consideradas blocos, ent\u00e3o em cada combina\u00e7\u00e3o de tratamentos ab , h\u00e1 $n - 1$ graus de liberdade para n r\u00e9plicas. Associando os graus de liberdade \u00e0 identidade da soma quadr\u00e1tica, tem-se:

$$abn - 1 = (a - 1) + (b - 1) + (a - 1)(b - 1) + (n - 1) + (ab - 1)(n - 1) \quad (2.4)$$

Obtendo-se a m\u00e9dia quadr\u00e1tica atrav\u00e9s da divis\u00e3o da soma quadr\u00e1tica pelo grau de liberdade, para validar as hip\u00f3teses nulas e, conseq\u00fcentemente, se as m\u00e9dias quadr\u00e1ticas s\u00e3o estimativas n\u00e3o tendenciosas de σ^2 , faz-se uso da estat\u00edstica F . Como alguns pesquisadores ressaltam que o teste F s\u00f3 pode ser utilizado em experimentos completamente aleat\u00f3rios, o que n\u00e3o \u00e9 o caso, uma vez que a aleatoriza\u00e7\u00e3o s\u00f3 existe dentro dos blocos, este teste n\u00e3o deve ser utilizado no aspecto quantitativo (Calado e Montgomery, 2003).

Todas as informa\u00e7\u00f5es est\u00e3o resumidas na Tabela 2.3.

Tabela 2.3 – Tabela de Análise de Variância para um experimento com blocos.

Fonte de variação	Soma quadrática	Graus de liberdade (d.f.)	Média quadrática	F
Blocos	$\frac{1}{ab} \sum_k y_{..k}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$	$n - 1$	MQ_{BLOCOS}	
A	$\frac{1}{bn} \sum_i y_{i..}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$	$a - 1$	MQ_A	$\frac{MQ_A}{MQ_E}$
B	$\frac{1}{an} \sum_j y_{.j.}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$	$b - 1$	MQ_B	$\frac{MQ_B}{MQ_E}$
AB	$\frac{1}{n} \sum_i \sum_j y_{ij.}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn} - SQ_A - SQ_B$	$(a - 1)(b - 1)$	MQ_{AB}	$\frac{MQ_{AB}}{MQ_E}$
Erro	Subtração	$(ab - 1)(n - 1)$	MQ_E	
Total	$\sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$	$abn - 1$	MQ_T	

Fonte: Montgomery (2001).

Onde,

$y_{i..}$ é o total das observações sujeitas ao i -ésimo tratamento do fator A;

$y_{.j.}$ é o total das observações sujeitas ao j -ésimo tratamento do fator B;

$y_{ij.}$ é o total das observações sujeitas aos tratamentos da interação AB;

$y_{..k}$ é o total das observações sujeitas ao k -ésimo bloco;

$y_{...}$ é o total global de todas as observações.

Utilizando o *software* estatístico *Design-Expert*, obtiveram-se os valores numéricos para a Análise de Variância do modelo do exemplo do nível de vibração (resposta) no processo de corte de uma placa de circuito impresso. Este *software* ajusta um modelo de regressão e gera gráficos que possibilitam a análise de adequação do modelo, além de permitir ao usuário obter uma resposta ótima dentre inúmeras possíveis. A Tabela 2.4 apresenta os valores numéricos obtidos.

Tabela 2.4 – Análise de variância para o exemplo das placas de circuito impresso.

Response: Nível de vibração
ANOVA for Selected Factorial Model
Analysis of variance table [Partial sum of squares]

Source	Sum of Squares	DF	Mean Square	F Value	Prob > F
Block	44,3619	3	14,7873		
Model	1638,1119	3	546,0373	179,6134	< 0.0001 significant
A	1107,2256	1	1107,2256	364,2106	< 0.0001
B	227,2556	1	227,2556	74,7534	< 0.0001
AB	303,6306	1	303,6306	99,8762	< 0.0001
Residual	27,3606	9	3,0401		
Cor Total	1709,8344	15			

No exemplo, como característica específica do experimento objetivou-se inicialmente analisar todas as *abn* combinações a partir de uma mesma placa de circuito impresso. Contudo, como restrição do experimento se apenas uma placa permite que *ab* observações sejam feitas, então um projeto alternativo é rodar cada uma das *n* replicações utilizando uma placa distinta. Conseqüentemente, as placas de circuito impresso representam uma restrição na aleatorização ou um bloco, e uma única réplica do experimento fatorial é executada dentro de cada bloco.

2.2.1

Confundimento de um projeto fatorial 2^k em dois blocos

Há muitos casos em experimentos envolvendo blocagem nos quais é impossível executar uma replicação completa do projeto fatorial em um bloco. Desse modo, confundimento ou superposição é uma técnica para organizar um experimento fatorial completo em blocos, onde o tamanho do bloco é menor do que o número de combinações de tratamento em uma réplica (Montgomery, 2001). Ressalta-se que esta técnica torna indistinguíveis informações acerca de certos efeitos de tratamentos (geralmente interações de ordens altas), ou confundidos com blocos. A referência para a superposição aqui exposta será um projeto fatorial 2^k com uma estrutura de 2^p blocos incompletos, onde $p < k$.

Considera-se inicialmente um projeto 2^3 , adaptado de Montgomery e Runger (2003), no qual cada uma das $2^3 = 8$ combinações de tratamentos requeira 2 horas de análises no laboratório. Supõe-se que dois dias sejam necessários para

realizar o experimento. Se para este projeto, dias forem considerados como blocos, tem-se de atribuir quatro das oito combinações de tratamento em cada dia.

A ordem na qual as combinações dos tratamentos são executadas dentro de um bloco é aleatoriamente determinada. A decisão de qual bloco executar primeiro também é aleatória. A visão geométrica na Figura 2.1 indica quais combinações de tratamentos em diagonais opostas estão atribuídas a diferentes blocos.

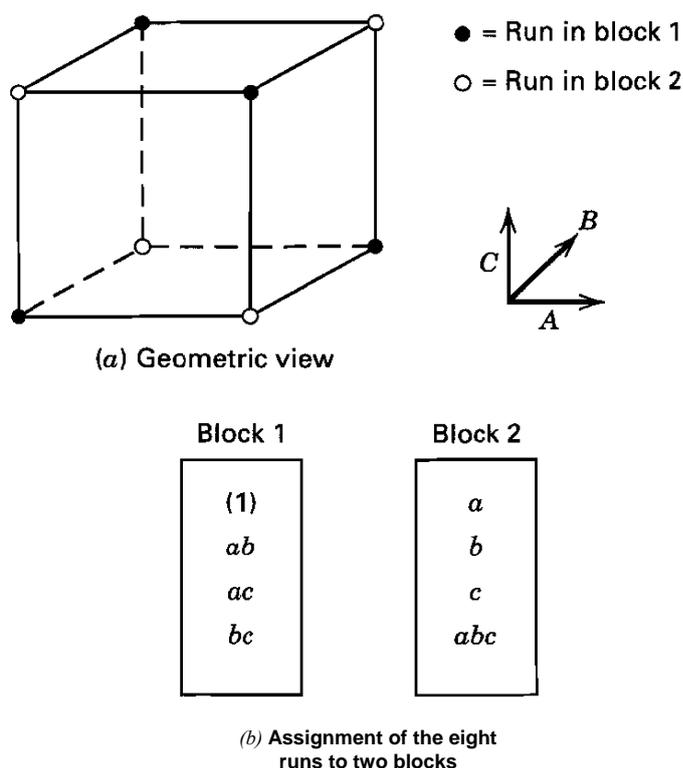


Figura 2.1 – Blocos e visão geométrica do experimento 2^3 .
Fonte: Montgomery (2001).

Estimando os efeitos principais de A , B e C como se nenhum evento de blocagem tivesse ocorrido, têm-se as seguintes equações:

$$A = \frac{1}{2}[a - b - c + ab + ac - bc + abc - (1)]$$

$$B = \frac{1}{2}[-a + b - c + ab - ac + bc + abc - (1)] \quad (2.5)$$

$$C = \frac{1}{2}[-a - b + c - ab + ac + bc + abc - (1)]$$

Nota-se que A , B e C não são afetados pela blocagem, porque em cada estimativa há um sinal de adição e um de subtração na combinação de tratamentos de cada bloco. Já na interação de maior grau (Equação 2.6) é possível identificar a quais blocos pertence cada combinação, ou seja, ABC está superposta com os blocos. Logo, (1) , ab , ac e bc estão no bloco 1 e a , b , c e abc estão no bloco 2. A Tabela 2.6 permite a visualização da formação dos blocos através dos sinais.

$$ABC = \frac{1}{2}[a + b + c - ab - ac - bc + abc - (1)] \quad (2.6)$$

Tabela 2.5 – Experimento 23 com dois blocos.

Combinação de tratamentos	Efeito Fatorial							
	I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
(1)	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
a	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
b	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
ab	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
c	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
ac	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
bc	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
abc	1	1	1	1	1	1	1	1

Fonte: Montgomery (2001).

Existem outros métodos que podem ser utilizados para construir esse tipo de projeto. Para uma visão mais restrita sobre blocagem e superposição de experimentos com blocos ver Montgomery (2001), Capítulo 7.

2.3

Aleatorização de um experimento

Para Box (1990) a compreensão inicial sobre a aleatorização de um experimento está diretamente relacionada com o problema de executar experimentos no mundo real, ou seja, as condições de estacionaridade ou estado de controle estatístico do sistema experimental (se o processo sofre algum distúrbio estacionário ou não-estacionário).

Apesar da estacionaridade dos distúrbios que afetam um sistema experimental ser considerado por esse autor como uma idéia puramente conceitual, haja vista que a constante influência de fatores externos torna o mundo

real não-estacionário, ainda assim, Box (1990) usa como base aproximações da estacionaridade dos distúrbios para a decisão de aleatorização dos experimentos. Vale ressaltar que estacionaridade refere-se ao estado de “constância” dos distúrbios, ou seja, se essa influência é controlável, variando aleatoriamente em torno de uma média. Como um meio de orientar na tomada de decisão para aleatorizar ou não um experimento, Box (1990) oferece as seguintes alternativas:

- Nos casos em que a aleatorização apenas dificulta ligeiramente o experimento, sempre se deve aleatorizar.
- Nos casos em que a aleatorização tornaria o experimento impossível ou extremamente difícil de ser executado, mas ainda assim pode-se fazer um julgamento acerca da aproximação da estacionaridade, executa-se o experimento sem aleatorização.
- Se o experimentalista acredita que o processo é tão instável que sem aleatorização os resultados seriam inúteis e enganadores, e que a aleatorização tornaria o experimento impossível ou extremamente difícil de ser executado, neste caso não deverá executar o experimento. Deve-se trabalhar primeiramente na estabilização do processo ou utilizar-se de outro meio para obter informação.
- Um projeto que em muitos casos auxilia na superação de algumas destas dificuldades é o arranjo *split-plot*, que será melhor detalhado mais adiante.

Para Montgomery (2001), a aleatorização é um ponto fundamental ao uso dos métodos estatísticos em qualquer projeto experimental. Por aleatorização se quer dizer que tanto a alocação do material experimental quanto a ordem na qual são realizadas as corridas ou tentativas individuais do experimento são determinadas aleatoriamente. De um modo geral, os métodos estatísticos requerem que as observações (ou erros) sejam variáveis aleatórias independentemente distribuídas. Comumente a aleatorização torna esta hipótese válida.

Situações práticas enfrentadas por experimentalistas limitam em muitos casos a aleatorização do experimento seja na alocação de materiais, quanto na

determinação da ordem das corridas experimentais. Com base nessas limitações surgem conceitos importantes no que tange a classificação dos fatores quanto à facilidade em executar a mudança dos respectivos níveis, uma vez que estes níveis foram pré-definidos no experimento.

Segundo Ju & Lucas (2002) um **fator fácil de mudar** (*easy-to-change factor*) é definido como um fator cujo nível é independentemente estabelecido em cada corrida experimental ou como um fator que não precisa ser reinicializado.

Já um **fator difícil de mudar** (*hard-to-change factor*) é definido como um fator cujo nível não será reinicializado durante sucessivas rodadas que têm a necessidade de utilização do mesmo nível. Um fator *difícil de mudar* geralmente levará mais tempo e custo para se estabelecer do que um fator *fácil de mudar*. Por exemplo, tem-se o estudo de caso que será visto no Capítulo 3, no qual o diâmetro do cilindro de laminação é considerado um fator difícil de mudar, uma vez que o tempo de *set up* para a troca do cilindro é grande e gera custo para a empresa. Dessa forma, utilizaram-se dois cilindros para executar sucessivas corridas, sendo estes considerados os dois níveis atribuídos para o fator.

Segundo Ju e Lucas (2002), espera-se que quanto mais difícil for a mudança de nível de um determinado fator, é mais provável ter um componente de variância significativo associado a esta mudança. Ainda com base nesses autores, a seguir, são ilustrados os dois tipos de fatores.

Seja X_1 o fator cuja mudança do nível é difícil de ocorrer. Os demais fatores são então considerados fáceis de mudar. Dessa forma, X_1 é reinicializado nas corridas experimentais 1, 3, 6, e 8, enquanto os fatores X_2 e X_3 são reinicializados independentemente em todas as corridas experimentais ou serão fatores que não terão que ser reinicializados. Neste experimento as corridas 1 e 2 usam o mesmo nível de X_1 , enquanto as corridas 3, 4 e 5 usam outro nível de X_1 e assim por diante, como apresentado na Tabela 2.6.

Tabela 2.6 – Experimento 23 com um fator difícil de mudar.

Corrida	X_1	X_2	X_3	Bloco
1	-	+	-	1
2	-	-	+	1
3	+	-	-	2
4	+	+	+	2
5	+	+	-	2
6	-	-	-	3
7	-	+	+	3
8	+	-	+	4

Fonte: Ju & Lucas (2002).

Neste exemplo, pôde-se perceber a relação entre o conceito de superposição visto em blocagem e a restrição em aleatorizar os níveis dos respectivos fatores. Para o caso em questão fica fácil visualizar que o fator X_1 está superposto com os blocos e a aleatorização estará restrita a ocorrer dentro de cada bloco.

Segundo Ganju & Lucas (2004), muitos autores pouco mencionam ou na maioria dos casos não mencionam a necessidade de reinicialização dos níveis dos fatores envolvidos no projeto, quando o assunto é aleatorização completa. Aleatorizar a ordem das corridas e reinicializar independentemente os níveis dos fatores são dois pontos cruciais que devem estar inclusos no conceito de aleatorização.

Segundo Webb, Lucas & Borkowski (2004), é comum experimentos industriais conterem fatores que não são reinicializados em virtude do custo ou tempo envolvidos em executar esta ação. Estes autores afirmam que uma grande fração de experimentos industriais contém pelo menos um fator que não é reinicializado, enquanto muitos são compostos inteiramente por fatores que não são reinicializados.

A classificação dos fatores com base na mudança dos níveis permite ainda outras classificações que direcionam a atuação do experimentalista no que tange a correta análise dos experimentos. Vale ressaltar que o critério para tais classificações está direcionado às restrições na aleatorização dos experimentos.

2.3.1

Classificação dos Experimentos Quanto à Aleatorização

Quando se estabeleceu conceitualmente que a aleatorização de um experimento ocorre tanto na alocação do material experimental quanto na ordem com a qual são executadas as corridas ou tentativas individuais do experimento é possível entender a importância em aleatorizar um ensaio experimental. Contudo, em alguns casos, por restrições de custo na experimentação e pela existência de fatores cuja mudança dos níveis é limitada ou difícil de realizar, é necessária a identificação das características de tal experimento para que um cenário de ordem de corrida seja melhor aplicado. Segundo Ju e Lucas (2002) os cenários distintos de ordem de corrida experimental que podem ser encontrados são:

- **Aleatorização completa:** ocorre quando um experimento é rodado usando uma ordem aleatória para todas as corridas experimentais e cada fator é independentemente reinicializado em cada corrida do experimento.
- **Executar na Ordem Aleatória (EOA):** um experimento é rodado usando uma ordem aleatória para todas as corridas experimentais, mas os fatores difíceis de mudar não são reinicializados quando sucessivas corridas têm o mesmo nível. Executar um experimento usando a opção EOA, sem reinicializar algum ou todos os fatores, significa que o experimento é dividido em blocos, e que os tamanhos dos blocos são determinados aleatoriamente pela não reinicialização dos fatores difíceis de mudar.
- **Completamente restrita:** ocorre quando a aleatorização é restrita a ser dentro de cada nível do fator difícil de mudar. Em outras palavras, para um experimento 2^k , cada nível do fator difícil de mudar é estabelecido apenas uma vez.
- **Parcialmente restrita:** para este cenário de ordem de corrida, as corridas de cada nível do fator difícil de mudar são aleatoriamente divididas em dois grupos de igual tamanho ou de tamanhos que diferem por uma corrida experimental. A aleatorização é restrita a

ocorrer dentro de cada grupo. Isso segue uma prática muito vista na indústria. Considerações de custo é a maior razão para executar os experimentos dessa maneira.

- **Blocagem *Split Plot***: devido a sua popularidade, será abordado a seguir este tipo de projeto experimental.

2.4

Blocagem *Split-plot* clássica

Segundo Montgomery (2001), em alguns experimentos fatoriais com vários fatores, experimentalistas encontram-se impossibilitados de aleatorizar completamente a ordem das corridas experimentais. Isso freqüentemente resulta em uma generalização de projeto fatorial chamado de projeto *split-plot*.

O projeto *split-plot* possui uma herança agrícola, e faz uso de terminologias diretamente relacionadas a esta herança. Por exemplo, grandes áreas de terra são denominadas *whole plots*, e os *subplots* são pequenas áreas de terra que compõem estas áreas maiores, sendo que ambas as áreas poderiam ser tratadas separadamente. Ambas as terminologias são usadas para definir fatores conforme o critério de restrição em aleatorização dos seus respectivos níveis. Apesar da base agrícola, o projeto *split-plot* é útil em muitos experimentos industriais e científicos. Nesses cenários experimentais, em alguns casos a aleatorização completa não é viável porque é mais difícil mudar os níveis de alguns fatores do que de outros. Os fatores difíceis de variar formam então os *whole plots*, enquanto aqueles cujos níveis sejam fáceis de variar são executados como *subplots* (Montgomery, 2001).

Dessa forma, Montgomery (2001) analisa os projetos *split-plot* no contexto científico ou industrial como experimentos “combinados” ou superpostos. Ou seja, tem-se um “experimento” contendo o(s) fator(es) denominado(s) *whole plot* aplicado a grandes unidades experimentais (ou um fator cujos níveis são difíceis de mudar) e o outro “experimento” composto pelo(s) fator(es) denominado(s) *subplot* que se aplica a unidades experimentais menores (ou é um fator cujos níveis são fáceis de mudar). Uma característica importante desse tipo de experimento é a presença de dois termos de erro associados aos efeitos desses respectivos fatores na variável de resposta. Para

ilustrar este tipo de projeto, apresenta-se a seguir um exemplo típico de como um projeto *split-plot* é usado em um cenário industrial. Nota-se que os dois fatores são “utilizados” em diferentes momentos. Conseqüentemente, o respectivo projeto pode ser visto como dois experimentos combinados ou superpostos.

Tem-se um experimento de análise da influência de determinados fatores (variáveis independentes) na força de tensão do papel. Os fatores, conforme a Tabela 2.7, são os três tipos de método de preparação da polpa de papel (Fator *B*) e quatro níveis de Temperatura (Fator *C*). As observações estão distribuídas conforme a necessidade de utilização de três tipos de lotes diferentes de papel, o que configura condições não-homogêneas para executar o experimento, logo se tem três replicações ou blocos (Montgomery, 2001).

Tabela 2.7 – Experimento da força de tensão do papel.

Método de preparação da polpa	Replicação (ou Bloco 1)			Replicação (ou Bloco 2)			Replicação (ou Bloco 3)		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Temperatura									
200	30	34	29	28	31	31	31	35	32
225	35	41	26	32	36	30	37	40	34
250	37	38	33	40	42	32	41	39	39
275	36	42	36	41	40	40	40	44	45

Fonte: Montgomery (2001).

O modelo matemático utilizado para este projeto *split-plot* é um modelo resumido, dado por (Montgomery, 2001):

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \gamma_k + (\beta\gamma)_{jk} + \epsilon_{ijk} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, r \\ j = 1, 2, \dots, a \\ k = 1, 2, \dots, b \end{cases} \quad (2.9)$$

Onde:

μ é a média global dos resultados;

τ_i é o efeito dos blocos ou replicações (*whole plot*);

β_j é o efeito principal do fator B (*whole plot*);

$(\tau\beta)_{ij}$ é o erro *whole plot* relacionado à interação (blocos ou replicação x fator B);

γ_k é o efeito *subplot* do fator C;

$(\beta\gamma)_{jk}$ é o efeito das interações (fator B x fator C);

ϵ_{ijk} é o erro experimental.

A mudança em relação ao modelo original ocorre ao se considerar que os efeitos das interações Bloco x fator B e Bloco x interação BC não são relevantes para o modelo. O que ocorre essencialmente é que tais efeitos são reunidos a ϵ_{ijk} para formar o erro *subplot*. Segundo Montgomery (2001), ao se denotar a variância do termo de erro *whole plot* ϵ_{ijk} por σ_{ϵ}^2 , os valores esperados das médias quadráticas são mostrados na Tabela 2.8.

Tabela 2.8 – Médias quadráticas esperadas para o modelo sugerido.

Factor	$E(MS)$
τ_i (Replicates or Blocks)	$\sigma_{\epsilon}^2 + ab\sigma_{\tau}^2$
β_j (A)	$\sigma_{\epsilon}^2 + b\sigma_{\tau\beta}^2 + \frac{rb \sum \beta_j^2}{a - 1}$
$(\tau\beta)_{ij}$	$\sigma_{\epsilon}^2 + b\sigma_{\tau\beta}^2$ (whole plot error)
γ_k (B)	$\sigma_{\epsilon}^2 + \frac{ra \sum \gamma_k^2}{ab - 1}$
$(\beta\gamma)_{jk}$ (AB)	$\sigma_{\epsilon}^2 + \frac{r \sum \sum (\beta\gamma)_{jk}^2}{(a - 1)(b - 1)}$
ϵ_{ijk}	σ_{ϵ}^2 (subplot error)

Fonte: Montgomery (2001).

Com o software *Design Expert*, versão 7.1.4, é possível obter os valores previstos para o experimento com base no modelo onde as interações do fator B x Blocos e interação BC x Blocos são negligenciáveis. A análise de variância (ANOVA) possibilita obter informações acerca dos efeitos considerados influentes sobre a resposta, conforme apresentado na Tabela 2.9.

Tabela 2.9 – ANOVA para o experimento da força de tensão do papel.

Response: Interação
ANOVA for selected factorial model
Block term includes A
Analysis of variance table [Classical sum of squares - Type II]

Source	Sum of Squares	df	Mean Square	F Value	p-value Prob > F	
Block	77,5556	2	38,7778			
Model	673,9167	15	44,9278	11,3105	< 0.0001	significant
B-Prep polpa	128,3889	2	64,1944	16,1608	< 0.0001	
C-Temp	434,0833	3	144,6944	36,4266	< 0.0001	
AB	36,2778	4	9,0694	2,2832	0.1003	
BC	75,1667	6	12,5278	3,1538	0.0271	
Residual	71,5000	18	3,9722			
Cor Total	822,9722	35				

Para ilustrar como a versão 7.1.4 do *software Design Expert* pode ser manipulada para executar um projeto *split-plot*, serão apresentadas no Apêndice 1 as análises para o exemplo de Montgomery (2001) da força de tensão do papel com base no tutorial desta versão.

Pela definição do exemplo, em termos estatísticos, o experimento *split-plot* pode ser estruturado como: os três lotes de polpa sendo *whole plots*; as quatro amostras aquecidas nas quatro diferentes temperaturas sendo *subplots*.

2.4.1

Projeto *split-plot* fatorial de dois níveis

Para Bisgaard (2000) um projeto *split-plot* é também denominado projeto de séries interna e externa (*inner and outer arrays design*). A abordagem refere-se à associação dos fatores de controle ou fatores de projeto a séries internas e por generalidade chamadas de séries *whole plot*, e os respectivos fatores relacionados, chamados de fatores *whole plot*. O mesmo ocorre para o segundo projeto fatorial denominado série externa, que é composto por um segundo grupo de combinações fatoriais que agem sobre os fatores de projeto conhecidos como fatores ambientais ou fatores de ruído. Esse segundo grupo é também conhecido como série *subplot* e os fatores a eles associados são conhecidos como fatores *subplots*. Contudo, Bisgaard (2000) faz uso apenas dos termos série *whole plot* e série *subplot* pelo fato de tais terminologias não se adequarem a situações nas quais é melhor

associar fatores ambientais com a série *whole plot*, e fatores de projeto com a série *subplot*. Ainda segundo o autor, um importante aspecto da análise de projetos *split-plot*, executados com restrição na aleatorização, é estudar a estrutura de erro dos efeitos associados a cada fator.

Como será visto a seguir, fazendo uso inicialmente de um exemplo de um projeto fatorial para justificar a utilização de um projeto *split-plot* para casos de experimentos fatoriais de dois níveis, Bisgaard (2000) possibilita o entendimento de que existem várias maneiras de executar determinados projetos, no entanto, são as circunstâncias práticas e econômicas do experimento que determinarão qual a abordagem será mais adequada.

Segundo a exemplificação de Bisgaard et al (1996), um plasma é uma mistura de prótons e elétrons que pode ser usada para alterar as características da superfície de materiais tais como o papel, para assim torná-lo mais suscetível à tinta. Os plasmas são geralmente criados em uma câmara de baixo vácuo. Cada vez que o reator é aberto para inserir uma nova amostra, leva uma quantidade de tempo considerável para atingir novamente o nível apropriado de vácuo. Em um experimento para investigar o efeito da umidade (estimada pelo ângulo de contato) os seguintes fatores variaram: baixa e alta pressão (*A*), baixa e alta força (*B*), baixa e alta proporção do fluxo de gás (*C*), (*D*) o tipo de gás (oxigênio ou CF_4) e (*E*) o tipo de papel (E_1 e E_2). Para economizar trabalho duas amostras, uma de cada tipo de papel, foram inseridas no reator ao mesmo tempo. A matriz de projeto é a apresentada na Tabela 2.10. Se as amostras fossem obtidas por dois *set up* com as mesmas combinações fatoriais para os fatores *whole plot*, o resultado obtido não seria o mais adequado, quando o mais coerente seria que as duas amostras para cada corrida *whole plot* fossem tratadas simultaneamente no reator. Dessa forma, este experimento é tipicamente um experimento *splitplot*.

Tabela 2.10 – Matriz de projeto e resposta para o experimento *split-plot* na produção de plasma.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	
				-	+
-1	-1	-1	-1	48,6	57
1	-1	-1	-1	41,2	38,2
-1	1	-1	-1	55,8	62,9
1	1	-1	-1	53,5	51,3
-1	-1	1	-1	37,6	43,5
1	-1	1	-1	47,2	44,8
-1	1	1	-1	47,2	54,6
1	1	1	-1	48,7	44,4
-1	-1	-1	1	5,0	18,1
1	-1	-1	1	56,8	56,2
-1	1	-1	1	25,6	33
1	1	-1	1	41,8	37,8
-1	-1	1	1	13,3	23,7
1	-1	1	1	47,5	43,2
-1	1	1	1	11,3	23,9
1	1	1	1	49,5	48,2

Fonte: Bisgaard (2000).

Para analisar este caso experimental, dividem-se (Tabela 2.11) os 31 contrastes (efeitos), obtidos através de um experimento completo 2^5 , em dois grupos, aqueles com variância de erro *whole plot* e aqueles com variância de erro *subplot*, e deve-se plotá-los em dois gráficos separados de probabilidade normal, conforme as Figuras 2.22 e 2.23.

Tabela 2.11 – Efeitos estimados para o experimento do plasma e agrupados por variância de erro *whole plot* e *subplot*.

Whole-plot		Sub-plot	
Term	Effect	Term	Effect
<i>A</i>	11,8	<i>E</i>	3,1
<i>B</i>	4,2	<i>AE</i>	-5,9
<i>C</i>	-3,4	<i>BE</i>	-0,3
<i>D</i>	-15,1	<i>CE</i>	-0,1
<i>AB</i>	-4,2	<i>DE</i>	1,0
<i>AC</i>	3,0	<i>ABE</i>	0,1
<i>AD</i>	16,6	<i>ACE</i>	-0,2
<i>BC</i>	-0,9	<i>ADE</i>	-0,8
<i>BD</i>	-3,3	<i>BCE</i>	0,9
<i>CD</i>	1,7	<i>BDE</i>	-0,2
<i>ABC</i>	2,9	<i>CDE</i>	0,3
<i>ABD</i>	-3,3	<i>ABCE</i>	-0,4
<i>ACD</i>	-2,3	<i>ABDE</i>	0,3
<i>BCD</i>	1,2	<i>ACDE</i>	-0,3
<i>ABCD</i>	6,9	<i>BCDE</i>	0,9
		<i>ABCDE</i>	0,3

Fonte: Bisgaard (2000).

O motivo para esta separação é que, no geral, a análise de variância (ANOVA) de projetos *split-plot* recai em duas partes separadas onde há dois erros, o erro *whole plot* ε_w associado com o *set up* do reator, com variância σ_w^2 , e o erro *subplot* ε_s entre as amostras de papel, dentro de cada *set up*, e com uma variância menor, σ_s^2 . Em projetos de dois níveis é preferível usar gráficos normais nos quais tudo que é necessário é uma regra para separar os contrastes naqueles que têm variância de erro *subplot* e naqueles que têm variância de erro *whole plot*, e então traçar tais contrastes em dois gráficos separados (Bisgaard, 2000).

Através do gráfico de probabilidade normal dos efeitos (Figura 2.2), obtido inicialmente do conjunto de todos os efeitos, executado no software *Design-Expert*, foi possível identificar a estrutura de erro dos contrastes. Observa-se que o gráfico dá indícios de que apenas os efeitos dos fatores principais *A* e *D*, e da interação *AD* são significativos, ou seja, têm influência sobre a resposta.

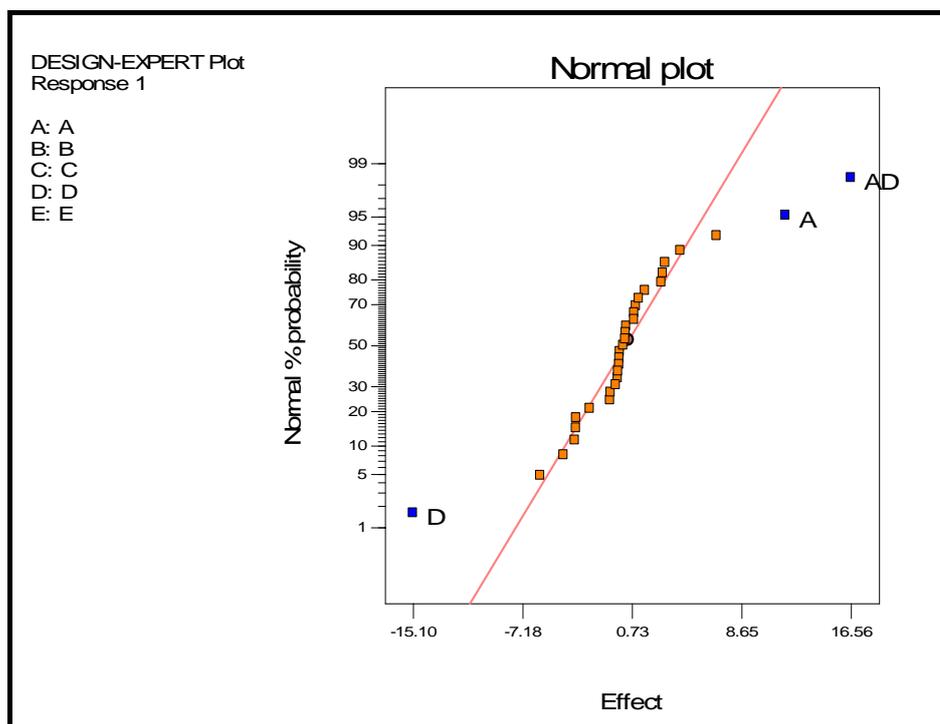


Figura 2.2 – Gráfico de probabilidade normal com todos os efeitos.

Contudo, após a separação dos efeitos (Tabela 2.11) e da plotagem dos gráficos de probabilidade normal (Figuras 2.3 e 2.4) para os efeitos *whole plot* e

subplot através do software Excel, é possível observar que os efeitos do fator principal *E* e da interação *AE* são influentes sobre a variável de resposta. Isso demonstra quão equivocada seria a análise se fosse utilizado um gráfico de probabilidade normal para todos os efeitos. É importante frisar que o valor do desvio-padrão *subplot* é consideravelmente menor ($\hat{\sigma}_s \approx 1$) que o valor *whole plot* ($\hat{\sigma}_w \approx 7$), ou seja, analisando a razão $\hat{\sigma}_w / \hat{\sigma}_s \approx 7$, confirma-se que a variância entre *setups* do reator é maior do que a variância entre amostras tratadas simultaneamente.

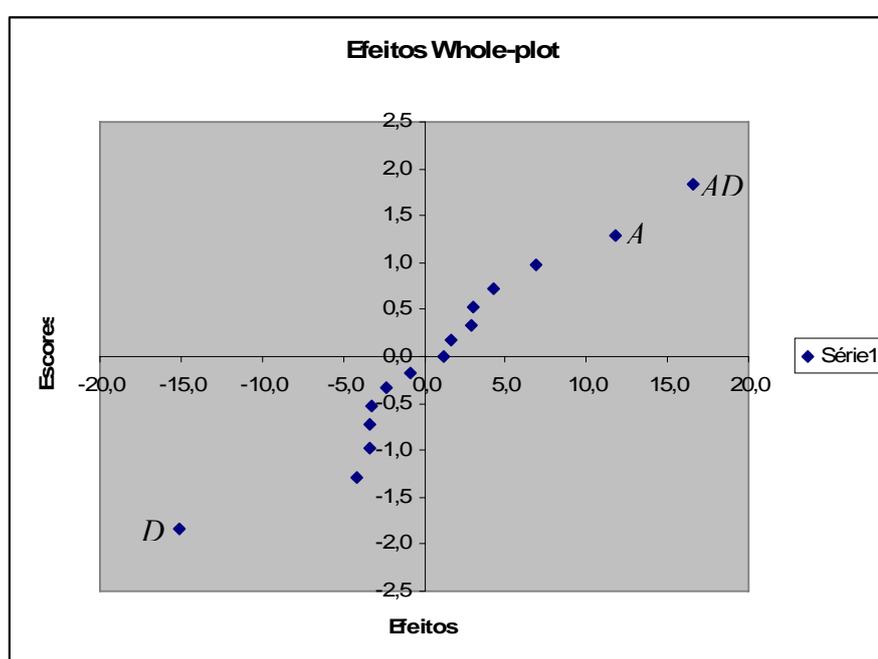


Figura 2.3 – Gráfico de probabilidade normal para os efeitos *whole plot*.

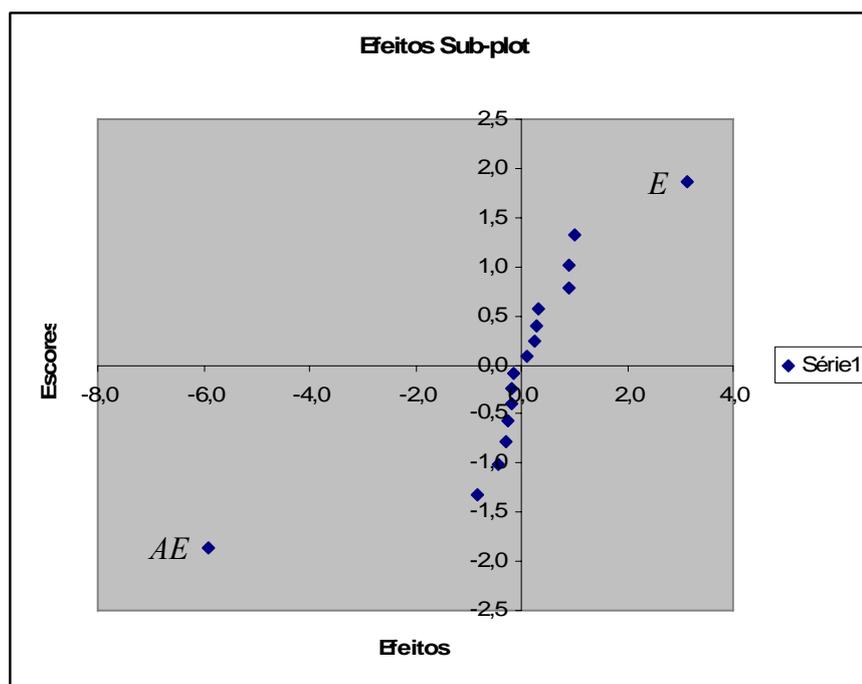


Figura 2.4 – Gráfico de probabilidade normal para os efeitos *subplot*.

Dessa forma, esta regra de separação possibilita identificar quais contrastes considerados influentes seriam ignorados se um projeto de 32 corridas completamente aleatorizado fosse realizado no lugar de um experimento *split-plot*. Segundo Bisgaard (2000), isso ocorre porque ao realizar um experimento completamente aleatorizado quando não é o caso, o experimentalista acaba mesclando a distribuição do erro *whole plot* com a distribuição do erro *subplot*, e essa distribuição mista se sobrepõe a alguns efeitos verdadeiramente significativos.

2.5

Revisão bibliográfica

Para que fosse possível uma visão geral do que alguns autores abordam sobre a temática em questão, apresentou-se resumidamente nesta seção os principais pontos de alguns trabalhos cujo assunto principal é a restrição em aleatorizar experimentos.

Bisgaard et al (1996) deram continuidade à idéia inicialmente defendida por Box (1996), no que diz respeito ao método de separação dos efeitos *whole plot* e *subplot* em função de variâncias distintas. Contudo, esta abordagem foi feita com a execução de um experimento fatorial de dois níveis no modo *split-plot* e

com o auxílio de gráficos de probabilidade normal para analisar a significância dos efeitos.

Segundo Letsinger, Myers & Lentner (1996), controle de custos, disponibilidade de recursos, e/ou dificuldade no desempenho de aleatorizações completas podem ditar a necessidade de executar experimentos de superfície de resposta em um formato de controle de bi-aleatorização do erro do qual o projeto *split-plot* é um caso especial. Os conceitos das análises e de eficiência de projeto devem ser redefinidos dentro da área de aleatorizações restritas. No seu trabalho, os autores visaram determinar as deficiências das técnicas de superfície de resposta tradicionais e a influência da estrutura de bi-aleatorização, na esperança de obter alguma compreensão de onde se inicia a modificação da metodologia de superfície de resposta.

Bisgaard (2000) centraliza seu trabalho em um caso especial de projeto *split-plot*, composto de fatoriais fracionados de dois níveis. Expressões gerais para encontrar as relações de definição para tais projetos foram discutidas além da economia experimental obtida. A aplicação desses conceitos foi com o objetivo de expor como economias em termos de corrida ou aumento de informação sobre o experimento podem ser alcançadas. Conseqüentemente, o autor descobriu que projetos fatoriais fracionados de dois níveis são úteis para a melhoria da qualidade de produtos no estágio de projeto. Verificou também que, freqüentemente, há restrições em aleatorizar ou pelo menos economias consideráveis no desempenho de projetos *split-plot*.

Orientações de como planejar um projeto *split-plot* fracionado são fornecidas por Bingham e Sitter (2001). Neste trabalho, discutem também o impacto das restrições de aleatorização no projeto. Mostram como a estrutura *split-plot* afeta a estimação, a precisão e o uso dos recursos, além de demonstrar como essas questões afetam a seleção do projeto em um experimento industrial real.

Para Loeppky e Sitter (2002), em muitos cenários, a replicação experimental é sacrificada pelo tamanho da corrida experimental. Isso pode representar sérias dificuldades na análise. Freqüentemente, mais restrições são inseridas no experimento devido à incapacidade, ou ao custo de aleatorizar completamente a ordem da corrida experimental. Com base nessa visão, os autores ainda afirmam que as duas situações onde isso aumenta é nos

experimentos fatoriais fracionados blocados e projetos *split-plot* fatoriais fracionados. Apresentam também dois métodos existentes de análise para experimentos completamente aleatorizados que são estendidos ao caso de aleatorização restrita.

Ju e Lucas (2002) examinam as propriedades dos experimentos fatoriais com apenas um fator difícil de mudar. Usam dois termos para o erro experimental: um termo associado ao fator difícil de mudar e outro para o erro associado aos demais fatores; classificam os experimentos quanto à restrição em aleatorizá-los e desenvolvem a matriz de covariância dos estimadores dos coeficientes para experimentos dos tipos EOA, completamente restritos e parcialmente restritos. Comparam ainda a precisão dos estimadores dos coeficientes de regressão para os vários cenários de aleatorização. Afirmam também que experimentos restritos são mais econômicos de executar porque uma grande fração do custo pode estar associada à mudança dos níveis dos fatores difíceis de mudar. A desvantagem de uma ordem de corrida completamente restrita é que há uma grande variância para os efeitos dos fatores difíceis de mudar e não há estimativa da variância do erro *whole plot*. A significância dos fatores difíceis de mudar não pode ser testada, então outro julgamento científico tem que ser usado.

Webb, Lucas e Borkowski (2004) estendem os resultados obtidos por Ju e Lucas (2002), uma vez que apresentam a variância de previsão esperada para experimentos que contém múltiplos fatores que não são reinicializados. Mostram também os efeitos de não-reinicializar esses fatores na estimação dos parâmetros, na variância da resposta, e na previsão da variância para o modelo em questão. Segundo os autores, reinicializar é essencial se uma questão científica está sendo analisada. Entretanto, para o processo de melhoria, algumas imprecisões nas análises podem ser aceitas por causa do baixo custo de se executar o experimento quando não reinicializado, o que complementa a idéia defendida por Ju e Lucas (2002). Ressaltam que a maioria dos experimentos industriais hoje são experimentos com ordem de corrida não-aleatorizada e que há vantagens de custo para executar experimentos deste modo. Essas vantagens podem exceder as desvantagens, que ocorrem quando experimentos não são completamente aleatorizados. Algumas vezes, experimentalistas projetam um experimento *split-plot* ou usam blocagem para levar em consideração fatores que não são reinicializados.

Para Vining et al (2005), um projeto *split-plot* é o resultado de uma estratégia experimental, em que o experimentalista – para os casos em que o experimento contenha apenas um fator difícil de mudar – fixará os níveis desse fator e então executará todas as combinações ou uma fração de todas as combinações dos outros fatores. No projeto *split-plot* a unidade experimental para os fatores difíceis de mudar é subdividida em unidades experimentais para os fatores fáceis de mudar. Frequentemente, a primeira unidade experimental é também chamada de *whole plot*, e a segunda, de *subplot*. Os autores ainda reforçam uma importante questão enfrentada por muitos experimentalistas: como conduzir experimentos de superfície de resposta apropriadamente quando há restrições de aleatorização? A proposta de solução defendida consiste em modificar famílias de segunda ordem de projetos-padrão de superfície de resposta. Essas modificações permitem estimar o erro puro das variâncias do erro *whole plot* e *subplot*.