2
Referencial Teórico

2.1.
Revisão de Literatura

A Teoria de Opções Reais, quando comparada com a Teoria de Finanças em geral, é uma teoria recente. Os primeiros trabalhos relevantes sobre o assunto (e que praticamente iniciaram o desenvolvimento de toda teoria posterior) foram o de TOURINHO (1979) e o de BRENNAN & SCHWARTZ (1985). O primeiro, de forma pioneira, introduziu a primeira aplicação da Teoria de Opções Reais, aplicada à valoração de investimentos em recursos naturais. Posteriormente, Brennan & Schwartz estudaram o instante ótimo para se investir em um projeto de exploração de uma mina de cobre, avaliando opções de investimento, parada temporária, reativação e abandono com a utilização de modelagem estocástica do preço do cobre. Outro trabalho relevante, também abordando aplicações em áreas envolvendo *commodities* e projetos de longa duração, foi o de TITMAN (1985), que empregou a Teoria de Opções Reais para estimar preços de áreas urbanas desocupadas, avaliando a opção de adiamento de sua ocupação. Já PADDOCK & SIEGEL (1988), apresentaram um dos primeiros e mais conhecidos trabalhos sobre avaliação de investimentos em reservas petrolíferas não-desenvolvidas, no qual utilizaram a Teoria de Opções Reais para determinar o valor justo para a concessão de uma reserva de petróleo, enfatizando as vantagens da nova abordagem proposta frente ao método tradicional do Fluxo de Caixa Descontado. Mais recentemente, CORTAZAR & SCHWARTZ (1998), aplicaram a Simulação de Monte Carlo na avaliação da opção real de desenvolvimento de um poço petrolífero.

DIXIT & PINDYCK (1994), no primeiro livro totalmente dedicado à Teoria de Opções Reais, enfatizam a abordagem teórica em tempo contínuo. Esta mesma obra já cita outras aplicações da Teoria, além de aplicações estritamente econômicas utilizadas até então, exemplificando o uso da Teoria de Opções Reais na análise de fatores sócio-econômicos, tais como matrimônio e suicídio. Já TRIGEORGIS (1996) enfatizou modelos em tempo discreto em primeira publicação. Ambos também analisaram modelos relacionados à indústria petrolífera e outros recursos naturais.

No que se refere às opções de conversão de *inputs* e *outputs* (que são as utilizadas nesta dissertação), KULATILAKA e MARCUS (1992) avaliam projetos de produção de eletricidade em termoelétricas analisando as flexibilidades existentes com o uso de gás ou carvão.

Analisando-se a produção brasileira para a Teoria de Opções Reais, observa-se uma forte concentração em estudos sobre a viabilidade econômica de projetos envolvendo *commodities*, em especial petróleo, gás e energia, destacando-se as contribuições de DIAS (1996, 2001 e 2005), voltadas a projetos petrolíferos.

Uma exceção a essa tendência sãoBRANDÃO (2002) e BLANK (2008), que aplicam a Teoria de Opções Reais a concessões rodoviárias. O primeiro considera que uma opção de expansão pode existir caso o volume de tráfego justifique um aumento de capacidade. Já BLANK (2008) aplica os conceitos de Opções Reais em projetos envolvendo *project finance* e Parcerias Público-Privadas (PPP), apresentando um projeto hipotético de concessão rodoviária com a identificação de três opções: garantia de tráfego mínimo, repasse de receita por tráfego máximo e possibilidade de abandono pelos acionistas.

DIAS (1996) analisa investimentos sob incerteza em projetos de exploração e produção de petróleo, apresentando um modelo flexível e adequado aos principais problemas de decisões de investimentos de uma empresa petrolífera. Este mesmo autor em estudo mais recente (DIAS, 2005), evolui sua aplicação na indústria petrolífera combinando a Teoria de Opções Reais com a Teoria dos Jogos (jogos de Opções Reais) e com métodos probabilísticos e de decisão estatística bayesianos (Opções Reais bayesianas).

Quem também utiliza a Teoria dos Jogos em conjunto com a Teoria de Opções Reais é TEIXEIRA (2007), aplicando um modelo de Opções Reais para determinar a decisão de investimento ótima de uma empresa, considerando um jogo de múltiplos estágios com duas empresas do setor de telecomunicações.

Outro trabalho brasileiro recente é o de BARAN (2005), que aplica a Teoria de Opções Reais ao Mercado de Créditos de Carbono. O referido trabalho estuda o momento ótimo do corte de árvores num empreendimento florestal (mais especificamente uma plantação de eucaliptos) onde, além da receita pela venda da madeira, há possibilidade de uma receita adicional por quantidade de CO_2 absorvida (proporcional ao número de árvores existentes). As opções envolvidas são: derrubar a floresta, esperar ou abandonar o negócio.

Focando-se nas opções de conversão (pilar principal desta dissertação), pode-se ressaltar o trabalho de BASTIAN PINTO, BRANDÃO & HAHN (2007), que analisaram as opções de conversão existentes no processo produtivo do açúcar e do etanol, com modelagem de preços através de dois processos estocásticos conhecidos (Movimento Geométrico Browniano e Modelo de Reversão à Média).

ALVES (2007) também analisa opções de conversão, mas aplicada à flexibilidade na escolha do combustível num carro *flex-fuel*, valorando a vantagem de um automóvel com tal tecnologia sobre outro exclusivamente movido à gasolina.

Uma das principais contribuições desta dissertação reside na avaliação das flexibilidades existentes no processo produtivo do Biodiesel com a utilização de preços estocásticos para as variáveis analisadas e modelagem através da Simulação de Monte Carlo. Como será mostrado mais adiante, existem flexibilidades quanto aos *inputs* (soja, mamona, algodão e muitos outros) e nos *outputs* (finalização do processo produtivo na produção dos óleos brutos em vez de sua continuidade até a produção final do Biodiesel na forma de combustível).

2.2.
Referencial Teórico

O Fluxo de Caixa Descontado (FCD), nas análises de investimentos em projetos, é a metodologia tradicionalmente utilizada como ferramenta de valoração econômica para a tomada de decisão de investimentos. Utilizando tal metodologia, um projeto terá valor quando a somatória de seus fluxos de caixa, descontados a valor presente a uma taxa julgada compatível ao risco do projeto, superam o investimento de capital previsto, ou seja, quando o Valor Presente Líquido (VPL) é positivo.

No entanto, essa Metodologia basicamente assume que um projeto é levado até o fim, mesmo em caso de insucesso, não considerando algumas opções que podem estar associadas à capacidade de interferência gerencial. COPELAND & ANTIKAROV (2001) concordam com tal argumento, reconhecendo que o VPL subestima o valor de projetos por não capturar possíveis flexibilidades a disposição dos tomadores de decisão. Projetos baseados previamente em atividades de Pesquisa e Desenvolvimento, por exemplo, diante de conclusões desfavoráveis, são cancelados antes que os produtos/tecnologias associados sejam sequer lançados no mercado. Analogamente, um gerente de projeto pode expandir um projeto que esteja se comportando melhor do que o previsto, opção que não é considerada na Metodologia tradicional de avaliação pelo FCD.

Além disso, essa Metodologia pode falhar quando aplicada a um ambiente sujeito a incertezas (exógenas e endógenas) que contribuam a uma variabilidade dos fluxos de caixa previstos. Do ponto de vista exógeno, para projeto que, por exemplo, tenha suas receitas fortemente atreladas às variações de preço de uma determinada *commodity*, dificilmente a premissa de simetria de seus fluxos de caixa é válida. De forma endógena, um projeto dependente de fatores técnicos e organizacionais pode também ter retornos diferentes dos previstos.

DIXIT & PINDICK (1994) também questionam a premissa de reversibilidade associada ao critério de decisão com base no VPL, pois se assume implicitamente que o investimento pode ser, a qualquer momento, recuperado. Quando a firma exerce sua opção de investir, elimina de forma irreversível a possibilidade de esperar por novas informações que afetam o resultado do investimento e o momento ótimo para o investimento (SCARTEZINI, 2006).

TRIGEORGIS (1996) sintetiza essa adição de valor definindo o VPL de um projeto (VPL expandido) como resultado da soma de uma parcela estática (advinda do VPL tradicional) e uma parcela resultante da valoração das opções associadas à incerteza e flexibilidade gerencial. Segundo DIAS (1996), o FCD subestima (ou subavalia) os investimentos. Esse mesmo autor cita como exemplo uma situação onde se considera apenas o valor da opção de espera (“timing” do investimento). Nessa situação, o valor da oportunidade de investimento é o somatório do VPL tradicional (se positivo ou, em caso contrário, zero) e o valor da opção de espera.

Diante de tais limitações, a Teoria de Opções Reais tem ganhado espaço como ferramenta de otimização das decisões de investimento diante de incertezas e flexibilidades, adicionando ao critério do VPL as opções e incertezas intrínsecas a diferentes tipos de projetos de investimento, buscando, dessa forma, evitar a rejeição de projetos potencialmente lucrativos.

Neste capítulo serão abordados os principais conceitos a respeito da Teoria de Opções Reais que servirão de fundamento para a análise desenvolvida neste trabalho.

2.3. Opções Financeiras

Há dois tipos básicos de opções: opções de compra (*call options*) e opções de venda (*put options*). Segundo DAMODARAN (1996), uma opção de compra dá ao detentor o direito de comprar um ativo subjacente (geralmente ações, *commodities* ou moedas) a um preço estabelecido (denominado preço de exercício ou *strike price*) e a um determinado instante até a data de vencimento da opção (sendo a qualquer momento, classifica-se como uma opção americana; na data do vencimento, como uma opção européia). Por esse direito, o comprador paga uma quantia (prêmio), definida no momento da compra. Na data de vencimento da opção o comprador exercerá a opção se o valor do ativo for menor do que o preço de exercício da opção. De forma análoga, uma opção de venda dá ao detentor o direito de vender um ativo subjacente a um preço estabelecido (também chamado de preço de exercício ou *strike price*) a um determinado instante até a data de vencimento da opção, também pagando um prêmio no momento da compra. O lucro líquido desse investimento, para ambos os tipos de opção, é a diferença entre o lucro obtido com o exercício da opção e o prêmio pago pela opção.

Para HULL (2003) os fatores que afetam o preço de uma opção são:

- O preço corrente do ativo (S_0);
- O preço de exercício (K);
- O prazo de vencimento (T);
- A volatilidade do preço do ativo (σ);
- A taxa livre de risco (r); e
- O dividendo esperado durante a "vida" da opção.

No início da década de 1970, Fischer Black, Myron Scholes e Robert Merton, em BLACK & SCHOLES (1973) e MERTON (1973), tiveram grandes avanços na precificação de opções, sendo os primeiros a formular um modelo para precificação de derivativos, o que resultou no Modelo Black-Scholes-Merton. As várias tentativas anteriores haviam falhado porque a precificação do ativo derivado ficava dependendo de um ou mais parâmetros arbitrários que tentavam traduzir as preferências do investidor em relação ao risco. Percebendo tal deficiência, Black e Scholes reconheceram, ao incorporarem o argumento de

Merton, que em equilíbrio o retorno de uma carteira sem risco ("*riskless hedge portfolio*") deveria corresponder à taxa livre de risco, para impedir a existência de oportunidades de arbitragem (MARTIN, 2004). Black e Scholes supuseram condições ideais de mercado, partindo das seguintes premissas simplificadoras, conforme cita HULL (2003):

- O preço do ativo subjacente segue um Movimento Geométrico Browniano, com valor esperado dos retornos (μ) e volatilidade de preços (σ) constantes. Portanto, a distribuição dos possíveis preços da ação ao final de qualquer intervalo é lognormal, com variância constante;
- Não existem restrições para vendas a descoberto;
- Os custos de transação são inexistentes e todos os títulos são perfeitamente divisíveis;
- O ativo subjacente não paga dividendos durante a vida do derivativo;
- Não há oportunidade de arbitragem;
- A negociação de títulos é contínua; e
- A taxa de juros livre de risco de curto prazo é constante ao longo do tempo.

Com a aplicação de tais premissas para opções européias de compra e venda que não pagam dividendos, Black e Scholes (BLACK & SCHOLES, 1973) deduziram as Equações (1) e (2) para o preço dessas opções, no instante zero:

$$c = S_0 \, N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \tag{1}$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \tag{2}$$

Onde:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

c = preço da opção de compra européia;

p = preço da opção de venda européia;

N = função distrib. de probabilidades de uma variável normal padronizada;

S_0 = preço da ação no instante zero;

K = preço de exercício;

r = taxa livre de risco;

σ = volatilidade do preço da ação.

T = prazo para o vencimento da opção;

2.4. A Análise Tradicional de investimentos versus Teoria de Opções Reais

A Análise Tradicional de Investimentos fundamenta-se em diversas técnicas norteadoras nas tomadas estratégicas de decisão. Dentre as mais conhecidas e aceitas estão a análise através do VPL (Valor Presente Líquido) e através TIR (Taxa Interna de Retorno, taxa que torna o VPL nulo). Tais análises se propõem a rejeitar ou aceitar um investimento utilizando critérios bem definidos.

O cálculo do VPL baseia-se em contabilizar os fluxos de caixa futuros (FC_t) de um investimento, trazendo-os ao presente através de uma taxa de desconto ajustada ao risco do investimento ou custo de capital (k) e subtraindo-se tais fluxos do investimento inicial (I_0) necessário para sua realização. Em termos teóricos, O VPL de um projeto com *n* fluxos previstos pode ser sintetizado na seguinte Equação:

$$VPL = \sum_{t=1}^{n} \frac{FC_t}{(1+k)^t} - I_0 \tag{3}$$

O critério de aceitação ou rejeição de um projeto baseia-se simplesmente no resultado da Equação (3). Se positivo o projeto é considerado economicamente viável. Caso contrário o projeto é rejeitado. Na comparação de dois projetos escolhe-se o de maior VPL.

A taxa de desconto ajustada ao risco do investimento geralmente é calculada com auxílio do CAPM (*Capital Asset Pricing Model*). Segundo ROSS, WESTERFIELD & JAFFE (2002), este modelo se propõe a determinar a taxa de retorno teórica de um determinado ativo relativamente a uma carteira de mercado perfeitamente diversificada. O CAPM, para um ativo *i*, pode ser escrito basicamente da seguinte forma:

$$k_i = r + \beta_{i,m}(R_m - r) \tag{4}$$

Onde:

r é a taxa de juros livre de risco.

$\beta_{i,m}$ é a sensibilidade de uma variação de retorno do ativo i à variação do retorno da carteira de mercado. É calculado pela covariância entre os retornos do ativo e os retornos do mercado, dividida pela variância dos retornos do mercado.
R_m é o valor esperado do retorno do mercado.

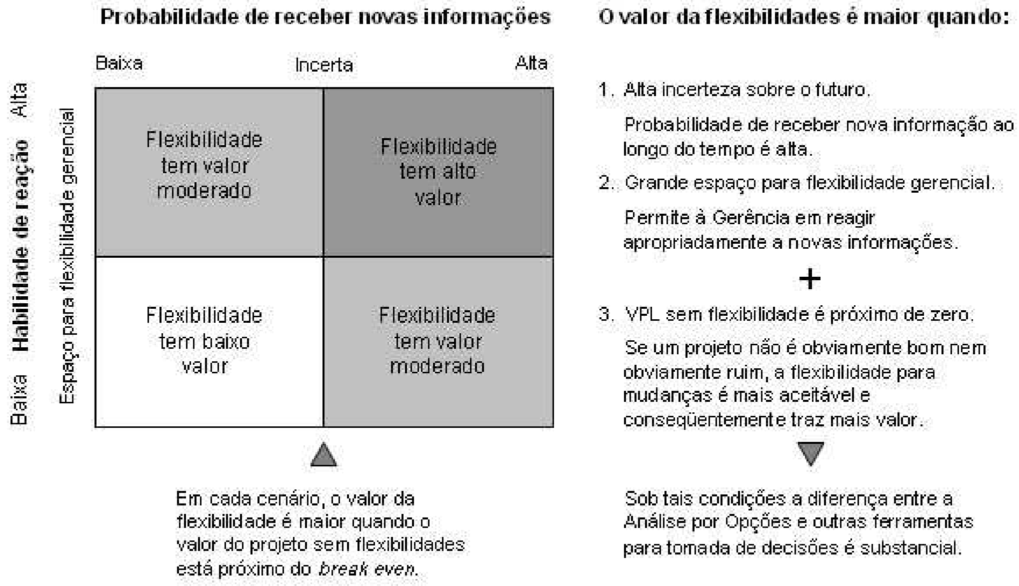
Alguns conceitos tradicionais, como o conceito básico de desconto de fluxos de caixa, não podem ser totalmente invalidados. No entanto, é possível identificar algumas flexibilidades não captadas pela Análise Tradicional. A captura destas flexibilidades tem impulsionado e dado destaque à Teoria de Opções Reais.

A Análise Tradicional de Investimentos quando aplicada como ferramenta de tomada de decisões (via VPL e outras métricas objetivas) não leva em conta que durante a implementação de um projeto, oportunidades ou externalidades podem ocorrer e influenciar positivamente ou negativamente os fluxos de caixa previstos. Nesse contexto, algumas flexibilidades (como expansão ou adiamento de um projeto) acabam sendo desconsideradas.

TRIGEORGIS (1996) enfatiza esta diferença quando diz que a falta de conhecimento das flexibilidades de gerenciamento e a falta de adaptação a diferentes condições de mercado são as falhas mais comuns dos métodos tradicionais que se utilizam apenas do fluxo de caixa descontado.

Segundo COPELAND, KOLLER & MURRIN (2000), o VPL influencia uma decisão baseada em expectativas do presente, enquanto que a análise por Opções Reais permite a flexibilidade de tomada de decisões na contingência futura de captura de novas informações. Segundo tais autores, o valor de um Projeto avaliado por Opções Reais é sempre maior do que quando analisando por meio do VPL e tal diferença fica mais evidente quando o VPL é próximo de zero. Na **Figura 1** pode-se visualizar um pouco desta discussão entre a diferença de valores entre o VPL e Opções Reais.

Figura 1 - Quando a Flexibilidade Gerencial tem valor?



Fonte: COPELAND, KOLLER & MURRIN (2000).

No subcapítulo a seguir serão abordadas com mais detalhes algumas flexibilidades comuns captadas pela Teoria de Opções Reais.

2.5.
Tipos de Opções Reais

COPELAND, KOLLER & MURRIN (2000), classificam as Opções Reais em alguns tipos, de acordo com as possíveis flexibilidades existentes. Dentre os tipos classificados por tais autores pode-se enfatizar os seguintes:

Opção de Abandonar: Opção de abandonar ou se desfazer de um investimento, diante de condições adversas e que inviabilizem a manutenção de custos fixos associados ao investimento. A Opção pode ser valiosa, pois limita inferiormente o valor do projeto, levando em consideração o valor residual do investimento, dada a existência de um mercado secundário para revenda dos equipamentos e outros ativos associados ao investimento. Esta opção pode ser comparada a uma opção americana de venda sobre o valor atual do projeto com preço de exercício igual ao valor residual.

Opção de adiar: O proprietário de um investimento pode adiar o processo de desenvolvimento de sua produção (associada ao investimento) até que os preços do produto produzido atinjam um patamar aceitável. Por exemplo, o detentor de uma reserva não-explorada de petróleo pode adiar a decisão de exploração até que os preços do petróleo subam. Segundo TRIGEORGIS (1996), esta opção é valiosa em indústrias associadas à extração de recursos e indústrias do ramo imobiliário, dados os prazos longos associados ao investimento. Essa opção é equivalente a uma opção americana de compra, com os custos de desenvolvimento como preço de exercício da opção.

Opção de expansão: O gerente de um projeto pode ampliar sua capacidade produtiva de modo a se adequar a uma possível demanda adicional não esperada associada ao produto produzido. Ou seja, a gerência tem a opção de incorrer com investimentos adicionais caso as condições de seu projeto mostrem-se favoráveis ao longo do processo produtivo. Essa opção é equivalente a uma opção americana de compra, conferindo direito a seus detentores de implementar investimentos adicionais caso as condições de mercado se tornem favoráveis.

Opção de conversão: A opção de mudar as operações de um projeto é um conjunto de opções de compra e de venda. Nesse contexto existe a possibilidade de reiniciar a operação de um projeto paralisado, resultando numa opção americana de compra com preço de exercício igual ao custo de reinício. Ou então paralisar as operações de um projeto em condições desfavoráveis, resultando numa opção americana de venda, com preço de exercício igual ao custo de paralisação. É evidente e intuitivo que projetos com tais flexibilidades (reinício e paralisação) valem mais que projetos sem tais flexibilidades.

2.6. Modelagem de Incertezas como Processos Estocásticos

Um processo estocástico é uma variável que se desenvolve no tempo de uma maneira que é pelo menos parcialmente aleatória e imprevisível. De maneira formal, um processo estocástico é definido por uma lei de probabilidade para a evolução de uma variável *x* durante um tempo *t* (DIXIT & PINDICK, 1994). Essa aleatoriedade é que habilita os processos estocásticos para a modelagem da incerteza sobre a evolução de uma variável como, por exemplo, o preço de um ativo (SCARTEZINI, 2006). Os processos estocásticos podem ser classificados, basicamente, em função do seu comportamento estacionário (média e variância da variável aleatória se mantêm constantes no tempo) ou não estacionário (valor esperado da variável aleatória tende ao infinito e variância proporcional ao tempo). Com relação à ocorrência da variável objeto, podem-se classificar os processos como de Estado Discreto (variável discreta) ou de Estados Contínuo (a variável contínua). Quanto à ocorrência da variável tempo, podem ser classificados como de Tempo Discreto (variável tempo é discreta) ou de Tempo Contínuo (variável tempo é contínua).

O processo estocástico mais simples é aquele onde o Tempo e o Estado são discretos. Esse processo é conhecido como *Random Walk*. Esse processo pode ser equacionado da seguinte forma:

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{5}$$

Onde ε_t é uma variável aleatória com a distribuição de probabilidade $prob(\varepsilon_t = 1) = prob(\varepsilon_t = -1) = \frac{1}{2} \quad (t = 1, 2, 3...)$.

Variando-se as características de Estacionariedade, Estado e Tempo é possível definir processos estocásticos que sejam capazes de modelar a evolução de variáveis mais complexas com o tempo.

O Processo de Wiener (também conhecido como Movimento Browniano) é um processo estocástico não-estacionário de tempo contínuo com valor esperado zero e variância $\sqrt{dt}$. Esse processo é utilizado na Física para descrever o movimento de partículas sujeitas a um grande número de choques moleculares (HULL, 2003). Considerando um intervalo $\Delta t \to 0$, o incremento do Processo de Wiener pode ser representado da seguinte forma:

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t} \Rightarrow \begin{array}{l} E(dz) = 0 \\ Var(dz) = dt \\ \sigma(dz) = \sqrt{dt} \end{array} \Rightarrow \quad dz \sim N(0, \sqrt{dt}) \tag{6}$$

É possível generalizar o Processo de Wiener, introduzindo um parâmetro de *drift* (a) e um parâmetro de variância (b), ambos constantes, formando o conhecido como Processo de Wiener Generalizado (ou Movimento Browniano Generalizado), Neste processo, uma variável *x* pode ser definida, em termos do incremento de Wiener (dz) como:

$$dx = adt + bdz \tag{7}$$

Onde $a = \mu, b = \sigma$ e $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ e $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Se considerarmos os parâmetros de *drift* (a) e variância (b) como funções do estado e do tempo, forma-se um processo estocástico mais complexo, conhecido como Processo de Itô, dado pela seguinte equação:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \qquad (8)$$

Um dos processos estocásticos mais utilizados no estudo da Teoria de Opções Reais é o Movimento Geométrico Browniano (MGB), um caso particular do Processo de Itô. Este processo será descrito com mais detalhes no sub-capítulo 2.6.1 a seguir.

2.6.1.
A Simulação de Monte Carlo

A Simulação de Monte Carlo é uma técnica que gera soluções aproximadas para diversos problemas matemáticos, envolvendo o uso de números aleatórios e funções de probabilidade, com o benefício de reduzir a incerteza na estimativa de resultados futuros de uma variável.

O mérito da criação deste método é do matemático polonês Stanislaw Ulam, muito conhecido por ser um dos criadores da bomba de hidrogênio, em 1951. O método foi criado diante de uma tentativa de calcular as probabilidades de sucesso em jogos de azar, na época muito populares no cassino de Monte Carlo, em Mônaco.

Segundo WITTWER (2004), a Simulação de Monte Carlo é um método de análise da propagação de incertezas, onde o objetivo é determinar de que forma variações aleatórias, falta de informações e erros afetam a sensibilidade, desempenho e confiabilidade do sistema objeto da modelagem. Essa análise avalia, de forma iterativa, um modelo determinístico utilizando números aleatórios como dados de entrada, sendo estes gerados através de funções distribuição de probabilidade (como por exemplo, normal, lognormal, exponencial, entre outras) que melhor se ajustem ao modelo proposto. Utilizando números aleatórios, o modelo deixa de ser determinístico e passa a ser estocástico.

Na Teoria Financeira, a Simulação de Monte Carlo é geralmente utilizada no cálculo do valor de empresas, na avaliação de projetos de investimentos e na avaliação de derivativos financeiros. Pode ser usada como um método numérico alternativo para cálculo do valor de uma opção, em conjunto com o método da equivalência de neutralidade ao risco (DIAS, 1996).

Neste Trabalho será aplicada a Simulação de Monte Carlo com o objetivo de modelar os preços de *commodities* de acordo com dois processos estocásticos muito utilizados na Teoria de Opções Reais: o Movimento Geométrico Browniano e o Processo de Reversão à Média.

2.6.2.
O Movimento Geométrico Browniano

O MGB é um processo de difusão log-normal, onde a variância cresce com o tempo. É um caso particular do Processo de Itô, onde os parâmetros de *drift* e variância são funções do estado:

$$dx(t) = \alpha x(t)dt + \sigma x(t)dz \tag{9}$$

Onde:

α é o parâmetro de *drift* (ou taxa de ganho de capital).

σ é a volatilidade de *x*.

dz é o incremento de Wiener , sendo que $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ e $\varepsilon \sim N(0,1)$.

O valor esperado e a variância da variável objeto que segue um MGB são demonstrados por DIXIT & PINDICK (1994) e apresentados nas seguintes equações:

$$E[x(t)] = x_0 e^{\alpha t} \tag{10}$$

$$Var[x(t)] = x_0^2 e^{2\alpha t}(e^{\sigma^2 t} - 1) \tag{11}$$

DIAS (2001) apresenta as equações discretizadas de modelagem de variáveis comportando-se de acordo com um MGB. Segundo este autor é possível modelar as variáveis através de um processo real (usando um *drift* real e uma taxa de desconto ajustada ao risco) ou através de um processo neutro ao risco (com *drift* neutro ao risco e a taxa livre risco como taxa de desconto).

A simulação real utiliza o *drift* real α e comporta-se de acordo com a Equação (12).

$$P(t+\Delta t) = P(t)\exp\left[(\alpha - 0,5\sigma^2)\Delta t + \sigma\,\Delta t^{1/2}\,\varepsilon\right] \tag{12}$$

A simulação neutra ao risco utiliza o *drift* neutro ao risco $\alpha' = \alpha - (\mu - r)$ e comporta-se de acordo com a Equação (13) a seguir.

$$P(t+\Delta t) = P(t)\exp\left[(\alpha - (\mu - r) - 0,5\sigma^2)\Delta t + \sigma \Delta t^{1/2}\varepsilon\right] \tag{13}$$

Onde:

$(\mu - r)$ é o prêmio de risco.

Para a modelagem de alguns preços, no entanto, existem críticas ao MGB, dada a sua propriedade de divergência. Esse fato abre espaço para o estudo e aplicação de modelos que levem em conta fatores mercadológicos relacionados à Oferta e Demanda. No subitem 2.6.3 a seguir será explorado um processo que leva em conta tais fatores.

2.6.3.
O Processo de Reversão à Média

Os Modelos de Reversão à Média (MRM) resumem-se na hipótese de o preço de um ativo, com o passar do tempo, tender para um preço de equilíbrio. Essa hipótese tenta preencher uma lacuna deixada pela modelagem de processos estocásticos que divergem ao longo do tempo (como é o caso do Movimento Geométrico Browniano), fato que, para algumas variáveis tais como o preço de *commodities*, pode não representar a realidade.

DIXIT & PINDICK (1994, p.74) ressaltam que os preços de algumas *commodities*, embora possam variar de forma aleatória no curto prazo, no longo prazo tendem a reverter seu comportamento na direção de seus custos marginais de produção. A própria hipótese de equilíbrio de mercado vem ao encontro da reafirmação deste raciocínio, pois, um aumento (decréscimo) de preços estimularia um aumento (redução) da oferta, o que, naturalmente, contribuiria para uma redução (aumento) dos preços. DIAS (1996, p.116) classifica os MRM's em dois grupos. O primeiro é mais usado em aplicações econômicas e produtivas e é baseado no processo de Ornstein-Uhlenbeck. O segundo grupo, usado em aplicações no mercado financeiro (taxas de juros, inflação, entre outras variáveis), usa a família de equações do tipo descrito em SHIMKO (1992, pg.11).

O processo de Ornstein-Uhlenbeck apresenta algumas variações na literatura acadêmica, diferindo na forma da equação estocástica, de acordo com as condições de contorno dos estudos específicos que utilizam tal processo. A forma mais simples desse processo é o Modelo Aritmético de Ornstein-Uhlenbeck. Sua equação estocástica é mostrada na Equação (14) a seguir:

$$dx(t) = \eta(\bar{x} - x)\,dt + \sigma\,dz(t) \qquad (14)$$

Onde:

η é a velocidade de reversão à média;

$\bar{x}$ é a média de longo prazo para qual a variável x tende a reverter;

σ é a volatilidade do processo; e

dz é o Processo de Weiner, sendo que $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ e $\varepsilon \sim N(0,1)$

DIXIT & PINDICK (1994, p.90-91), mostram que a variável *dx(t)* tem distribuição normal e demonstram as Equações (15) e (16), respectivamente, para a média e a variância:

$$E\left[x(t)\right] = x(0)e^{-\eta t} + \bar{x}(1 - e^{-\eta t}) \qquad (15)$$

$$Var\left[x(t)\right] = \frac{\sigma^2}{2\eta}\left(1 - e^{-2\eta t}\right) \qquad (16)$$

Na aplicação deste processo estocástico para a modelagem de preços, é comum se modelar o logaritmo natural dos preços ($x(t) = \ln P_t$) de forma a evitar a ocorrência de preços negativos na simulação. Isso faz com que os preços se comportem como distribuições log-normal, com média $E[P_t] = e^{\mathrm{E[x(t)]}}$.

Pode-se encontrar em DIAS (2001) a equação real de simulação discretizada de preços de uma variável que segue uma tendência de reversão à média:

$$P_t = \exp\left(\ln(P_{t-\Delta t})\,e^{-\eta\Delta t} + \ln\bar{P}(1 - e^{-\eta\Delta t}) - (1 - e^{-2\eta\Delta t})\frac{\sigma^2}{4\eta} + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}}\,\varepsilon \right) \qquad (17)$$

Uma proposta analítica para a modelagem de preços de *commodities* por reversão à média foi dada por SCHWARTZ (1997). Sua solução desconta o prêmio de risco de mercado normalizado$\left(\mu - r\right)/\eta$ do logaritmo da média de longo prazo, de modo a gerar um processo livre de risco.

Essa lógica é seguida por DIAS (2001, p.7) e apresentada aqui na Equação (18), que pode ser utilizada na simulação neutra ao risco de preços discretos que seguem uma tendência de reversão à média.

$$P_t = \exp\left(\ln(P_{t-\Delta t})\, e^{-\eta\Delta t} + [\ln \bar{P} - (\frac{\mu - r}{\eta})](1 - e^{-\eta\Delta t}) - (1 - e^{-2\eta\Delta t})\frac{\sigma^2}{4\eta} + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}}\,\varepsilon \right) \quad (18)$$

Onde:

η é a velocidade de reversão à média do insumo/subproduto.

σ é a volatilidade dos preços do insumo/subproduto.

$\bar{P}$ é o preço médio de longo prazo para qual os preços tendem a reverter.

$(\mu - r)/\eta$ é o prêmio de risco normalizado do insumo/subproduto.

ε ~N(0,1).