2 O Problema do Fluxo de Custo Mínimo

2.1. O Problema de Transbordo

Os Problemas de Fluxo de Custo Mínimo, doravante referenciados pela sigla PFCM, encerram uma classe de problemas de programação linear amplamente estudada devido à extensa gama de aplicações práticas que apresenta. O transporte de mercadorias, design de redes de comunicação ou de dutos, atribuição de tarefas a trabalhadores e planejamento da produção (Bradley *et al.* 1997), são apenas alguns exemplos.

O Problema de Transbordo, que pode ser formulado como um PFCM, consiste no problema de transportar certa quantidade de bens através de uma rede desde uma ou mais origens, ou fontes, até um ou mais destinos, ou sumidouros, obtendo o menor custo possível. Seja, portanto, $G(N, A)$ um grafo, como já definido anteriormente, conectado e direcionado, seja o conjunto B, $|B|$ = n, composto pela dotação inicial dos nós pertencentes a N de tal maneira que $b_x \in Z$ e que, se $b_x > 0$, $b_x < 0$ ou $b_x = 0$, o nó correspondente, x, será um nó ofertante, demandante ou de transbordo. Suponha-se, por hora, que $\sum_{x=1}^{n} b_x = 0$, ou seja, que há equilíbrio entre oferta e demanda. Seja ainda, associado aos elementos de A, o conjunto C, $|C|$ = m, referente aos custos associados ao transporte de uma unidade do bem em questão ao longo de cada arco. Desta maneira, sendo (i, j) um arco qualquer que tenha origem em um nó i e destino em um nó j, o valor $c_{i,j}$ será o custo associado a este arco.

Representando-se por $x_{i,j}$ o fluxo no arco (i, j), o Problema de Transbordo pode ser formulado como um problema de programação linear da seguinte maneira:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{i,j} x_{i,j} \tag{2.1}$$

Sujeito a

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{i,j} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{j,i} = b_i \quad \forall i \in N \tag{2.2}$$

$$0 \le x_{i,j} \quad \forall \ (i,j) \in A \tag{2.3}$$

As restrições representadas por (2.2) são restrições de conservação de fluxo e garantem que as demandas dos nós sejam atendidas, já as representadas por (2.3) referem-se às restrições de não negatividade dos fluxos.

Observe que o problema, da maneira como formulado, não prevê limites máximos de fluxo nos arcos configurando um problema do tipo não capacitado. Para transformá-lo em um problema do tipo capacitado basta alterar (2.3) incluindo as restrições de capacidade dos arcos. Existe também a possibilidade de se definirem limites inferiores positivos para o fluxo nos arcos. Desta maneira, a versão mais completa de (2.3) seria:

$$0 \le l_{i,j} \le x_{i,j} \le u_{i,j} \quad \forall \ (i,j) \in A \tag{2.4}$$

Onde $l_{i,j}$ e $u_{i,j}$ representam respectivamente os fluxos mínimo e máximo do arco (i,j).

Outros modelos mais específicos, pertencentes à mesma classe de problemas de fluxo de custo mínimo, apresentam grande relevância teórica e prática, como o Problema do Caminho Mais Curto, o Problema de Atribuição e o Problema de Transporte (Kelly e O'Neill, 1991).

2.2. O Problema do Caminho Mais Curto

O Problema do Caminho Mais Curto, PCMC, entre dois nós, s e t, pode ser enxergado como um Problema de Transbordo onde existam $n-2$ nós de transbordo, um nó ofertante, $\{s | s \in N, b_s = 1\}$, e um nó demandante, $\{t | t \in N, b_t = -1\}$. Desta maneira, ao se resolver o PFCM para este caso particular, se está minimizando o custo do transporte de uma unidade de fluxo entre dois nós predeterminados. A formulação do problema é idêntica à do problema de transbordo sem a necessidade da adoção de limites máximos de fluxo nos arcos.

2.3. O Problema de Atribuição

O Problema de Atribuição em um grafo bipartido consiste em associar, a um custo mínimo, elementos de um primeiro conjunto, *K*, a elementos de um segundo, *L*, respeitando um custo $c_{i,j}$ que representa a associação do elemento $\{i \mid i \in K\}$ ao elemento $\{j \mid j \in L\}$. Desta maneira, consiste em exemplo de Problema de Atribuição a alocação de tarefas a trabalhadores. A formulação para este problema fica:

$$\min \sum_{i \in K, j \in L} c_{i,j} x_{i,j} \tag{2.5}$$

Sujeito a

$$\sum_{i \in K} x_{i,j} = 1 \quad \forall j \in L \tag{2.6}$$

$$\sum_{j \in L} x_{i,j} = 1 \quad \forall i \in K \tag{2.7}$$

$$x_{i,j} \in \{0;1\} \tag{2.8}$$

Utilizando o exemplo da alocação de tarefas (conjunto *K*) a trabalhadores (conjunto I), as restrições presentes em (2.6) e (2.7) garantem, respectivamente, que nenhum trabalhador ficará desocupado e que cada tarefa será atribuída a um, e somente um, trabalhador. Já as restrições em (2.8) garantem que a solução seja inteira.

Para enxergar o Problema de Atribuição como um caso particular do Problema de Transbordo, basta, neste último, atribuir 1 a todo $\{b_i | i \in K\}$ e -1 a todo $\{b_j | j \in L\}$. Observe que, para que a condição de equilíbrio entre oferta e demanda seja satisfeita, os conjuntos K e L deverão ter a mesma cardinalidade, ou seja, $|K| = |L| = n/2$. Observe também que o Problema de Atribuição foi definido sobre um grafo bipartido, que, pela definição apresentada neste trabalho, se trata de um grafo não direcionado, enquanto o Problema de Transbordo foi definido sobre um grafo direcionado. Tal fato não apresenta empecilho algum visto que basta se transformar cada arco não direcionado (i, j) em dois arcos direcionados (i, j), e (j, i) para se obter um grafo direcionado equivalente.

2.4. O Problema de Transporte

Outra modelagem de grande importância pertencente à classe dos PFCM é a dos Problemas de Transporte. Formulado pela primeira vez por Hitchcock (1941) e mais tarde abordado de forma independente por Koopmans e Reiter (1951), este problema é freqüentemente lembrado como o Problema de Transporte de Hitchcock-Koopmans.

O problema de Hitchcock-Koopmans apresenta um conjunto de nós ofertantes K, $|K|$ = k, e um conjunto de nós demandantes, L, $|L|$ = l e uma matriz de custos onde $c_{i,j}$ representa o custo de transportar uma unidade do bem em questão desde o nó $\{i \mid i \in K\}$ até o nó $\{j \mid j \in L\}$ através do arco (i, j) e consiste em satisfazer a demanda com os bens ofertados ao menor custo possível.

De modo a manter a coerência com a formulação apresentada para o Problema de Transbordo sejam que os conjuntos K e L subconjuntos do conjunto B contendo as dotações iniciais dos nós, e que $|B| = k + l = n$. Sendo assim, os conjuntos oferta e demanda podem ser respectivamente representados por $\{b_1, b_2, ..., b_k\}$ e por $\{b_{k+1}, b_{k+2}, ..., b_{k+l}\}$, a formulação do problema fica então:

$$\min \sum_{i \in K, j \in L} c_{i,j} x_{i,j} \qquad (2.9)$$

Sujeito a

$$-\sum_{i \in K} x_{i,j} = b_j \quad \forall j \in L \tag{2.10}$$

$$\sum_{j \in L} x_{i,j} = b_i \quad \forall i \in K \tag{2.11}$$

$$x_{i,j} \geq 0 \tag{2.12}$$

As restrições (2.10) e (2.11) garantem que respectivamente que toda a demanda seja atendida (lembrando que um nó *j* é demandante se $b_j < 0$) e que toda a oferta seja enviada. Pressupõe-se aqui o equilíbrio entre oferta e demanda, ou seja, $\sum_{i \in K} b_i + \sum_{j \in L} b_l = 0$.

As inequações em (2.12) representam as restrições de não negatividade no caso de um problema não capacitado. Analogamente ao que foi feito com o Problema de Transbordo pode-se transformar este problema em capacitado acrescentando-se as restrições de capacidade dos arcos. Para um problema ainda mais geral, com restrições de fluxo mínimo, (2.12) ficaria:

$$0 \leq l_{i,j} \leq x_{i,j} \leq u_{i,j} \tag{2.13}$$

Este é um problema muito similar ao Problema de Transbordo, divergindo apenas no fato de não existirem nós de transbordo, $\{i \mid b_i = 0\}$. Observe ainda que, para se transformar o Problema de Transporte em Problema de Atribuição basta que:

$$b_i = -b_j = 1 \quad \forall i \in K, j \in L \tag{2.14}$$

$$|K| = |L| = n/2 \tag{2.15}$$

Além da modelagem do problema, Hitchcock (1941) e Koopmans e Reiter (1951) apresentaram um método computacional para a solução do problema. No mesmo ano Dantzig (1951) mostrou como o problema poderia ser resolvido pelo método simplex e alguns anos mais tarde Orden (1956) mostrou que este algoritmo poderia ser aplicado ao Problema de Transbordo.