1
Introdução

Neste capítulo vamos abordar os principais conceitos que envolvem as dinâmicas no círculo e enunciar os principais resultados que serão usados em seqüência. Começaremos introduzindo algumas definições básicas no estudo de dinâmica.

1.1
Noções básicas

O contexto em que estamos trabalhando é o de sistemas dinâmicos discretos. Dada uma aplicação contínua de um espaço topológico X nele mesmo, digamos $f : X \to X$, e um ponto $x \in X$, podemos nos perguntar quem é a imagem do ponto $f(x) \in X$. Analogamente, podemos nos perguntar quem é a imagem de $f(f(x)) \in X$, e assim sucessivamente. Este processo é chamado de iteração da função f no ponto x.

Ao iterarmos uma função, é usual atribuirmos a este processo a idéia de tempo, como se cada iteração de f correspondesse à passagem de uma unidade de tempo. Sendo assim, temos um sistema em que o tempo evolui de forma discreta. Estamos interessados em entender o comportamento "futuro" do sistema, isto é, quando o tempo tende a infinito. Veremos logo a seguir um exemplo de como isso funciona na prática.

Por simplicidade, denotaremos $f^{\,n}(x) = \overbrace{(f \circ f \circ f \ldots \circ f)}^{n \text{ vezes}}(x)$. No caso de f ser invertível, podemos iterar x por f^{-1}, e denotaremos $f^{-n}(x) = \overbrace{(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f \ldots \circ f^{-1})}^{n \text{ vezes}}(x)$. Denotaremos $f^{(n)}$ a n-ésima derivada de f, e portanto o uso dos parênteses deve ser bem observado de modo a não criar confusões.

Como exemplo de dinâmica, vamos considerar as iterações da função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Tomemos o ponto $x_0 = 0,5$ e $x_1 = 1,5$. Assim, teremos:

$$f(x_0) = 0,707... \; ; \; f^2(x_0) = 0,840... \; ; \; f^3(x_0) = 0,917... \; ; \; f^4(x_0) = 0,957...$$

$$f(x_1) = 1,224... \; ; \; f^2(x_1) = 1,106... \; ; \; f^3(x_1) = 1,051... \; ; \; f^4(x_1) = 1,025...$$

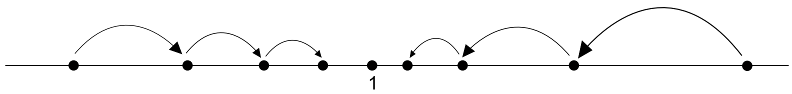

Figura 1.1: Iterações da função $\sqrt{x}$ para um ponto a direita e a esquerda de 1 em $\mathbb{R}^+$

Um estudo mais cuidadoso nos mostra que $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} f^n(x_1) = 1$. Se escolhermos o ponto inicial $x = 0$ teremos $f^n(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escolhendo $x = 1$, teremos $f^n(x) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

De forma geral, pode-se dizer que se $0 < x < 1$ ou $x > 1$ teremos uma convergência para 1. Esta breve análise feita aqui caracteriza o comportamento de todos os pontos do domínio sob iterações da função f. Em geral, é isso que entendemos como estudar a dinâmica de uma função. Porém, estaremos interessados não apenas em convergências, mas também em diversas outras propriedades topológicas que serão especificadas ao longo do nosso estudo.

Definição 1.1 *Dizemos que um ponto $x \in X$ é um* ponto fixo *de $f : X \to X$ se $f(x) = x$. Se $x \in X$ é um ponto fixo de f^n (isto é, se $f^n(x) = x$) para algum $n \in \mathbb{N}$, então dizemos que x é um* ponto periódico. *Ao menor valor natural de n satisfazendo esta propriedade chamamos* período *do ponto x. Denotamos $Fix(f)$ o conjunto de pontos fixos da função f e denotamos $Per(f)$ o conjunto de pontos periódicos de f.*

Para difeomorfismos crescentes da reta, é de fácil verificação que não existem pontos periódicos de período maior que 1 (pontos fixos). Para difeomorfismos decrescentes o maior período possível é 2 (por exemplo $f(x) = -x$, onde todos os pontos são periódicos de período 2). No entanto essa patologia não acontece para as dinâmicas no círculo, onde é possível termos qualquer tipo de periodicidade, mesmo para difeomorfismos.

Definição 1.2 *Dado $f : X \to X$ e $x \in X$, a* órbita positiva *de x é o conjunto $O^+(x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Se f for invertível, chamaremos de* órbita negativa *o conjunto $O^-(x) = \{f^{-n}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$, e simplesmente* órbita *de x o conjunto $O(x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.*

Em muitos casos $O^+(x)$ é, por abuso de notação, entendido não como um conjunto, e sim como uma seqüência : $O^+(x) = \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Analogamente para $O^-(x) = \{f^{-n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. No entanto, na grande maioria das vezes fica bem claro qual das duas idéias estamos usando pelo contexto em que ela aparece.

Definição 1.3 *Seja* (X,d) *um espaço métrico. Dada uma aplicação* $f : X \to X$ *, dizemos que um ponto* $x \in X$ converge no futuro *para* $a \in X$ *com respeito a função* f *se* $\lim_{n\to\infty} f^{\,n}(x) = a$. *A convergência é dita exponencial se existe* $0 < \lambda < 1$ *tal que* $d(f^{\,n}(x), a) \le \lambda\, d(f^{\,n-1}(x), a)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(conseqüentemente teremos* $d(f^{\,n}(x), a) \le \lambda^n\, d(x,a)$ *). Dizemos que um ponto* x converge (exponencialmente) no passado *para* $a \in X$ *se, com respeito a aplicação* $f^{\,-1}$, x *converge (exponencialmente) para* a *no futuro.*

Aqui as expressões "no futuro" e "no passado" reforçam a idéia de que as iterações podem ser vistas como a passagem discreta do tempo. Essa analogia é emprestada de outras disciplinas (física, biologia, meteorologia e etc), onde os sistemas dinâmicos modelam fenômenos que evoluem com o tempo.

Definição 1.4 *O* ω-limite *de um ponto* $x \in X$ *é o conjunto* $\omega(x) = \{y \in X \mid f^{n_i}(x) \to y$ *para alguma seqüência crescente de naturais* $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}\}$. *Isto é,* $\omega(x)$ *é o conjunto dos pontos de acumulação da seqüência* $\{f^{\,n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Se* f *for invertível, podemos definir* α-limite *de um ponto* x *como* $\alpha(x) = \{y \in X \mid f^{-n_i}(x) \to y$ *para alguma seqüência crescente de naturais* $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}\}$.

Esta definição já aponta as primeiras intenções de estudarmos a topologia das órbitas. Em seguida, queremos saber que "tipos" de ω-limite (do ponto de vista topológico) uma determinada função pode ter.

Definição 1.5 *Dizemos que uma função* $f : X \to X$ *é* topologicamente transitiva *se existe* $x \in X$ *com* $\overline{O^+(x)} = X$ *(Isto é, existe um ponto cuja órbita é densa em X). Se para todo* $x \in X$ *tivermos* $\overline{O^+(x)} = X$, *então dizemos que* f *é* minimal.

Se os espaço X não possui pontos isolados, então podemos concluir que a definição de transitividade topológica é equivalente a existência de um ponto cujo $\omega - limite$ é todo o contradomínio. Com os resultados apresentados nas próximas seções veremos que o $\omega - limite$ de uma transformação do círculo ou admite uma estrutura muito simples (uma órbita periódica ou o circulo todo) ou uma estrutura bastante rica (veja proposição 1.23 e a definição 1.22 sobre conjunto de Cantor).

Veremos na próxima seção os principais conceitos envolvidos quando a dinâmica ocorre no círculo.

1.2 O círculo

Nos referimos ao círculo unitário como o conjunto $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 = 1\}$. No entanto, é conveniente ao nosso estudo trabalharmos com outra representação de S^1 dada por:

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad \text{(os Reais modulo 1)}$$

Uma maneira bastante prática de trabalharmos com este conjunto é pensá-lo como sendo o intervalo $[0,1]$, mas com os pontos 0 e 1 identificados. Isso nos leva a uma representação bem simples para o gráfico de funções de $S^1 \to S^1$.

Graficamente, as funções de S^1 em S^1 são representadas em um quadrado de lado 1 $(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$, onde identificamos, em cada coordenada, os valores 0 e 1 (isto é, eles representam o mesmo ponto). Portanto, para que tenhamos continuidade, o gráfico da função deve intersectar o eixo vertical $x = 0$ na mesma coordenada horizontal na qual intersecta o eixo vertical $x = 1$, e intersectar o eixo horizontal $y = 0$ na mesma coordenada vertical na qual intersecta o eixo vertical $y = 1$. Veja alguns exemplos na figura 1.2. Nestes exemplos as linhas sólidas são os gráficos das funções e as tracejadas são linhas auxiliares que indicam a continuidade nos pontos.

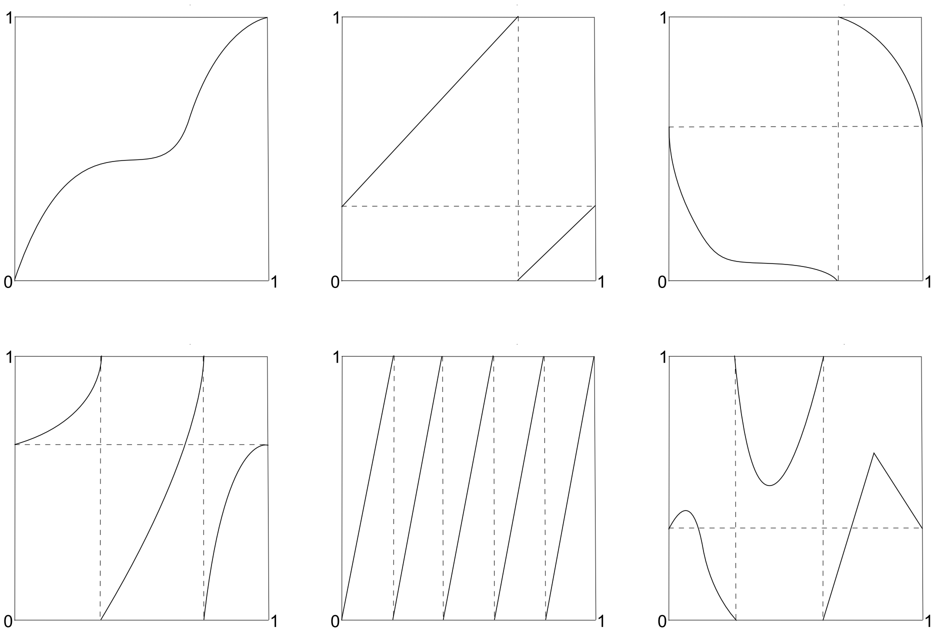

Figura 1.2: Exemplos de funções contínuas do círculo

Um dos fatores que torna interessante trabalhar com dinâmicas no círculo é a possibilidade de introduzir de forma simples e intuitiva diversos conceitos de dinâmica que aparecem em contextos bem mais complicados (tais como minimalidade, transitividade, hiperbolicidade, estabilidade etc). Neste trabalho estaremos focados em caracterizar a dinâmica dos difeomorfismos estáveis de S^1 (num certo sentido de estabilidade que veremos mais adiante no texto).

Queremos atribuir a S^1 uma estrutura de espaço métrico. Para isso, temos que definir uma distância em S^1. Definimos $d_0 : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^+$ dada por:

$$d_0(x,y) = min\{[x-y+1],[y-x+1]\}$$

Onde $[a]$ significa a parte fracionária de a (por exemplo $[1,123] = 0,123$). Considerando S^1 como o intervalo $[0,1]$, com os pontos 0 e 1 identificados, a função d_0 induz uma aplicação $d : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^+$. Esta aplicação está bem definida já que $d_0(0,y) = d_0(1,y)$ e $d_0(x,0) = d_0(x,1)$ para todo $x,y \in [0,1]$.

É de fácil verificação que, para todo $x,y \in S^1$, a aplicação d obedece as seguintes propriedades:

1. $d(x,y) \geq 0$, valendo a igualdade $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.

2. $d(x,y) = d(y,x)$.

3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para todo $z \in S^1$.

Esta última desigualdade segue dos seguintes fatos: $[a+1] = [a+2]$ e $[a+b] \leq [a]+[b]$. Um conjunto X quando munido de uma aplicação $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ satisfazemdo as 3 propriedades acima é chamado *espaço métrico*, e a aplicação d é chamada *métrica*. Assim, S^1 com a métrica d definida acima é um espaço métrico.

Se pensarmos em S^1 como o conjunto $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = r^2\}$ de circunferência 1 (isto é, $2\pi r = 1$) , resgatamos a intuição geométrica e teremos que d representa o comprimento do menor arco que liga dois pontos.

Definição 1.6 *Um conjunto $I \subset S^1$ será chamada de* intervalo *do círculo se I for um conjunto conexo de S^1. Este intervalo será dito* próprio *se $I \neq S^1$.*

Pela identificação que fizemos de S^1 com o intervalo $[0,1]$ (com os pontos 0 e 1 identificados), é facil perceber que os únicos intervalos de S^1 são da forma: $[a,b],(a,b),[a,b)$ ou $(a,b]$ se não contém o zero, e $[0,a]\cup[b,1],[0,a)\cup(b,1],[0,a]\cup(b,1]$ ou $[0,a]\cup[b,1]$ se contém o zero, onde $0 < a \leq b < 1$. Para simplificar a notação, se $b > a$ representaremos estes últimos casos respectivamente como: $[b,a],(b,a),[b,a)$ ou $(b,a]$.

Chamamos *comprimento* de um intervalo (a, b) (analogamente para $[a, b)$,$(a, b]$ ou $[a, b]$) o número dado por $b - a$ (se $b > a$) ou $1 - (a - b)$ (se $a > b$). Se A é uma união disjunta (finita ou não) de intervalos de S^1, chamamos de *medida* de A a soma de todos os comprimentos dos intervalos que constituem A. Pode-se verificar facilmente que se B é uma união disjunta de intervalos tal que $B \subset A$, então a medida de B é menor ou igual a medida de A. Assim, a medida de um conjunto do círculo não pode exceder o valor 1 (que é a medida de S^1). Podemos ainda definir a medida de A^c (o complementar de A) como sendo 1 menos a medida de A, que será um valor não negativo menor que 1. Vale observar ainda que o conceito de medida pode ser estendido para conjuntos que não são uniões disjuntas de intervalos nem complementares destes conjuntos, mas não trataremos desse assunto neste texto. Para maiores detalhes a respeito de teoria de medidas veja a referência (5).

O resultado a seguir vale em contextos mais gerais (aplicações em espaços métricos localmente compactos e separáveis) com apenas pequenos ajustes na demonstração. Porém consideraremos o domínio como sendo S^1, o que torna a demonstração mais acessível.

Proposição 1.7 *$f : S^1 \to S^1$ é topologicamente transitiva se, e somente se, para todo par de abertos não vazios $U, V \subset S^1$ existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Prova. Primeiramente vamos supor f transitiva. Sendo assim, existe um ponto $x \in S^1$ com órbita densa. Dados dois abertos não vazios $U, V \subset S^1$, pela densidade da órbita de x existem $n, m \in \mathbb{N}$ com $f^n(x) \in U$ e $f^m(x) \in V$. Podemos supor $m > n$, pois em cada aberto existe uma infinidade de pontos da órbita de x. Logo, temos que $f^{m-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.

Reciprocamente, vamos admitir que todo par de abertos não vazios $U, V \subset S^1$ satisfaz a condição do enunciado. Vamos considerar a seguinte cobertura de S^1: $\mathcal{B}= \{(x - y, x + y) \subset S^1 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$. Uma vez que esta cobertura é enumerável, podemos escrevê-la como $\mathcal{B}= \{B_1, B_2, B_3, ...\}$.

A seguir, será usada a notação $f^{-n}(A)$ significando a n-ésima pré-imagem do conjunto A (f não é necessariamente invertível). Se A for aberto, temos que $f^{-n}(A)$ será aberto (pela continuidade de f). Além disso, é bom lembrar que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Daí segue que se $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$ então $A \cap f^{-n}(B) \neq \emptyset$.

Pela hipótese, sendo B_1 e B_2 dois abertos de S^1, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_1}(B_1) \cap B_2 \neq \emptyset$. Defina $U_1 = B_1 \cap f^{-n_1}(B_2)$, que é um aberto não vazio. Tomemos um aberto $V_1 \subset U_1$ satisfazendo $\overline{V_1} \subset U_1$.

Sendo V_1 e B_3 dois abertos de S^1, existe (pela hipótese) $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_2}(V_1) \cap B_3 \neq \emptyset$. Defina $U_2 = V_1 \cap f^{-n_2}(B_3)$, que é um aberto não vazio e $U_2 \subset V_1$. Tomemos um aberto $V_2 \subset U_2$ satisfazendo $\overline{V_2} \subset U_2$. Observe que $\overline{V_2} \subset \overline{V_1}$.

Novamente, para os abertos V_2 e B_4, existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_3}(V_2) \cap B_4 \neq \emptyset$. Defina $U_3 = V_2 \cap f^{-n_3}(B_4)$, que é um aberto não vazio e $U_3 \subset V_2$. Tomemos um aberto $V_3 \subset U_3$ satisfazendo $\overline{V_3} \subset U_3$. Observe que $\overline{V_3} \subset \overline{V_2}$.

Seguimos o mesmo raciocínio repetidas vezes obtendo uma seqüência de compactos não vazios: $\overline{V_1} \supset \overline{V_2} \supset \overline{V_3} \supset \ldots$. Então o conjunto $M = \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{V_i}$ é um compacto não vazio. Basta agora verificar que um ponto $x \in M$ tem órbita densa. Por construção, a órbita de tal x intersecta todos os B_i's, que constituem uma base de abertos de S^1. Em particular, dado qualquer aberto $A \subset S^1$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $B_j \subset A$. Portanto $O^+(x) \cap A \supset O^+(x) \cap B_j \neq \emptyset$.

Corolário 1.8 *Se $f : S^1 \to S^1$ é topologicamente transitiva e invertível, então f^{-1} é topologicamente transitiva.*

Prova. Dados $U, V \in S^1$ temos que mostrar que existe um $n \in \mathbb{N}$ com $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$. Mas considerando V, U e a transitividade de f, existe $n \in \mathbb{N}$ com $f^n(V) \cap U \neq \emptyset$ e consequentemente $V \cap f^{-n}(U) \neq \emptyset$.

Assim, a definição de transitividade pode ser tomada com $O(x)$ no lugar de $O^+(x)$ quando estamos falando de aplicações invertíveis, sem perdas conceituais.

Definição 1.9 *Dada uma aplicação do círculo f, um conjunto $A \subset S^1$ é dito* invariante *por f se $f(A) = A$.*

Exemplos simples de dinâmicas no circulo são as rotações. Uma rotação é uma aplicação $R_\alpha : S^1 \to S^1$ dada por $R_\alpha(x) = x + \alpha \ (mod 1)$. Assim, a n-ésima iteração de uma rotação será a aplicação $R_\alpha^n(x) = x + n.\alpha \ (mod 1)$. Se α é racional (digamos $\alpha = p/q$) então $R_\alpha^q(x) = x$, e portanto todo ponto de S^1 será um ponto periódico. Algo mais interessante ocorre quando temos α irracional.

Proposição 1.10 *Dado $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, $O^+(x) = \{R_\alpha^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ é denso em S^1 para todo $x \in S^1$. Em outras palavras, rotações irracionais são minimais.*

Prova. Primeiramente observe que uma rotação irracional não pode ter pontos periódicos, pois do contrário teríamos: $R_\alpha^n(x) = x + n.\alpha (mod\, 1) = x$. Logo $n.\alpha = 0 (mod\, 1)$ e portanto $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Por contradição, vamos supor que $O^+(x)$ não é denso em S^1. Sendo assim o conjunto $K = S^1 \backslash \overline{O^+(x)}$ é um aberto não vazio. Observe que $\overline{O^+(x)}$ é um conjunto invariante por R_α (e portanto por R_α^{-1}). Segue então que $R_\alpha(K) = K$.

Vamos escolher uma componente conexa I de $K \subset S^1$. Isto é, $I \subset K$ é um aberto (relativo a K) e conexo que não pode estar contido propriamente em nenhum outro aberto conexo de K. Podemos afirmar que $R_\alpha^n(I) \cap I = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois do contrário teríamos duas possibilidades:

1. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R_\alpha^n(I) = I$. Colocando $I = (a, b)$, temos $R_\alpha^n(I) = (a + n.\alpha\,(mod\,1)\,,\, b + n.\alpha\,(mod\,1)) = (a, b)$. Logo $a = a + n.\alpha\,(mod\,1)$, e portanto a é periódico. Absurdo.

2. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R_\alpha^n(I) \neq I$ e $R_\alpha^n(I) \cap I \neq \emptyset$. Portanto $R_\alpha^n(I) \cup I$ é um aberto conexo de K que contém propriamente I. Absurdo.

Se $R_\alpha^m(I) \cap R_\alpha^n(I) \neq \emptyset$, digamos com $m > n$, então teremos $R_\alpha^{m-n}(I) \cap I \neq \emptyset$. Segue então que $R_\alpha^m(I) \cap R_\alpha^n(I) = \emptyset$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Rotações não alteram o comprimento da componente conexa. Sendo as iterações $R_\alpha^n(I)$ mutuamente disjuntas, chegamos a um absurdo, já que a soma dos comprimentos destes conjuntos disjuntos excede (tende a infinito) o comprimento de S^1, que é igual a 1 (veja os comentários a respeito de medidas e comprimentos de conjuntos do círculo que antecedem a proposição 1.7).

Para entendermos melhor a dinâmica do círculo, um artifício muito comum é usarmos uma função correspondente à aplicação do círculo, porém definida em $\mathbb{R}$. Intuitivamente, essa função é a representação de f em cada intervalo de $\mathbb{R}$, colocada de forma contínua, tal como esboçado na figura 1.4. Rigorosamente, temos a seguinte definição.

Definição 1.11 *Dada uma aplicação contínua* $f : S^1 \to S^1$, *um* levantamento *de* f *é uma função contínua* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfazendo* $\pi \circ F = f \circ \pi$, *onde* $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ *é a projeção de* $\mathbb{R}$ *em* S^1 *dada por* $\pi(x) = x\,(mod 1)$.

Proposição 1.12 *Principais propriedades do levantamento:*

1. *Dados dois levantamentos* F_1 *e* F_2 *de uma aplicação contínua* f, *existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tal que* $(F_1 - F_2)(x) = k$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

2. *Se* F *é um levantamento da aplicação contínua* f, *então existe* $d \in \mathbb{N}$ *tal que* $F(x+1) = F(x) + d$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *O número* d *é chamado* grau *de* f *e denotado por* $deg\, f$.

3. *Se* F *e* G *são levantamentos de* f *e* g *respectivamente , então* $F \circ G$ *é um levantamento de* $f \circ g$. *Consequentemente* F^n *é um levantamento de* f^n *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

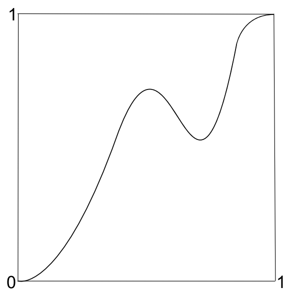

Figura 1.3: $f : S^1 \to S^1$.

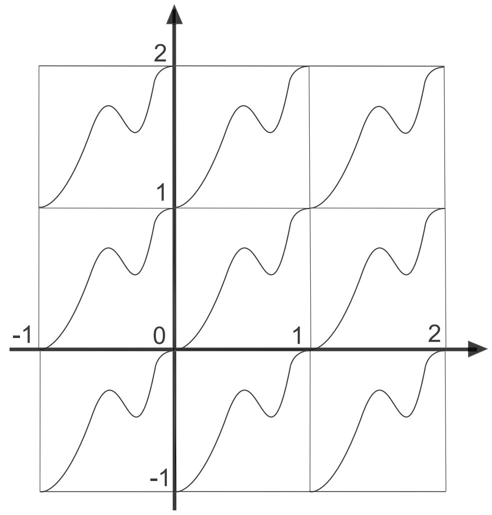

Figura 1.4: Possíveis levantamentos para f.

4. *$deg(f \circ g) = (deg\, f).(deg\, g)$. Consequentemente $deg\, f^n = (deg\, f)^n$.*

5. *Se f é invertível então $deg\, f^{-1} = deg\, f = \pm 1$.*

Prova.

1. $\pi \circ F_1 = f \circ \pi = \pi \circ F_2$. Logo $\pi \circ F_1 - \pi \circ F_2 = 0$ e portanto $(F_1 - F_2)(x) \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in S^1$. Como $(F_1 - F_2)$ é contínua, a imagem de $\mathbb{R}$ (que é conexo) possui apenas uma componente conexa, e portanto $(F_1 - F_2)(x) = k \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in S^1$.

2. $\pi \circ F(x+1) - \pi \circ F(x) = f \circ \pi(x+1) - f \circ \pi(x) = f \circ \pi(x) - f \circ \pi(x) = 0$. Logo a imagem de $F(x + 1) - F(x)$ pertence a $\mathbb{Z}$. Pelos mesmos argumentos do ítem 1, temos que $F(x + 1) - F(x) = d \in \mathbb{Z}$. Este valor não depende do levantamento escolhido, pois $F_1(x+1) - F_2(x+1) = k$ e $F_1(x) - F_2(x) = k$. Portanto $(F_1(x+1) - F_1(x)) - (F_2(x+1) - F_2(x)) = 0$.

3. $\pi \circ F \circ G = f \circ \pi \circ G = f \circ g \circ \pi$.

4. Primeiramente vamos provar que $F(x + n) = F(x) + n.(deg\, f)$. De fato, isso vale para $n = 1$. Vamos supor que vale para m, então: $F(x+m+1) = F(x+m) + (deg\, f) = F(x) + m.(deg\, f) + (deg\, f) = F(x) + (m+1)d$. Por indução, vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $(F \circ G)(x+1) = F(G(x+1)) = F(G(x) + (deg\, g)) = (F \circ G)(x) + (deg\, g).(deg\, f)$. Pelo item anterior $F \circ G$ é um levantamento de $f \circ g$, e portanto o resultado segue da definição de grau.

5. Considere a função identidade $Id : S^1 \to S^1$ ($Id(x) = x$). Claramente temos $degId = 1$. Pelo item 3 segue que $1 = degId = deg(f^{-1} \circ f) = (deg\, f^{-1}).(deg\, f)$, e portanto $deg\, f^{-1} = (deg\, f) = \pm 1$.

Definição 1.13 *Uma aplicação do círculo f é dita derivável no ponto a se algum (e portanto todo) levantamento F de f é derivável em algum ponto (e portanto todos) do conjunto $\pi^{-1}(a)$. Definimos a derivada de f no ponto a como $f'(a) = F'(b)$, onde $\pi(b) = a$. Observe que f' está bem definida, pois F é uma função periódica, e portanto tal definição independe da escolha de b satisfazendo $\pi(b) = a$. Além disso a escolha do levantamento não interfere no resultado, já que todo levantamento difere por uma constante. Se f possui derivada em todos os pontos do círculo, dizemos que f é uma aplicação diferenciável. Se F é uma função de classe C^r da reta, então dizemos que f é uma aplicação de classe C^r do círculo.*

Definição 1.14 *Um* homeomorfismo *do círculo é uma bijeção (de S^1 em S^1) contínua e com inversa contínua. Um homeomorfismo diferenciável com inversa diferenciável é denominado* difeomorfismo.

O grau de uma função contínua nos diz quantas "voltas líquidas" a imagem desta função dá ao redor do círculo. Sendo assim, no caso de termos um homeomorfismo f, teremos $degf = \pm 1$ (por ser invertível). Da proposição anterior, segue que para toda função contínua de grau 1, sendo F um levantamento de f, vale:

1. $F(x + 1) = F(x) + 1$.
2. $F^n(x + 1) = F^n(x) + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (por indução sobre o ítem 1).
3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ a função $F^n(x) - x$ é periódica de período 1 (o que se verifica facilmente diminuindo $(x + 1)$ na igualdade do item 2).

Definição 1.15 *Dizemos que um homeomorfismo $f : S^1 \to S^1$* preserva orientação *se os levantamentos de f são funções não decrescentes. No caso de serem não crescentes, dizemos que o homeomorfismo* inverte orientação.

Estes nomes sugerem como a imagem da função se comporta ao percorrermos o círculo. Para funções que preservam orientação é fácil percebermos que a imagem é percorrida no mesmo sentido (horário ou anti-horário) em que percorremos o domínio (o que justifica o nome dado).

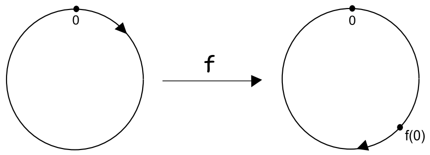

Figura 1.5: f preserva orientação

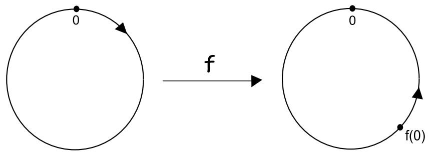

Figura 1.6: f inverte orientação

Definição 1.16 *Denotamos o conjunto de difeomorfismos de classe C^r de S^1 por $Diff^r(S^1)$. Usamos $Diff^r_+(S^1)$ para denotar o subconjunto de $Diff^r(S^1)$ que preserva orientação e $Diff^r_-(S^1)$ para o que inverte orientação.*

Observe que todo intervalo da reta da forma $(a-2,a]$ possui exatamente dois inteiros. Se f é um homeomorfismo que inverte orientação e F um levantamento de f, então a função $F(x)-x$ é uma função não crescente que leva o intervalo $[0,1)$ em $(F(1)-1,F(0)] = [F(0)-2,F(0))$. Logo, $F(x)-x$ possui exatamente dois pontos no intervalo $[0,1)$ cujas imagens são valores inteiros, e consequentemente f possui exatamente dois pontos fixos. Além disso, se $a<b$ então $F(b)<F(a)$ e portanto $F(F(a))<F(F(b))$. Assim, F^2 é uma função não decrescente e f^2 preserva orientação.

A principal motivação para a definição de levantamento é o conceito de número de rotação. Este conceito é extremamente importante no estudo de dinâmica do círculo e, como veremos, diz muito a respeito da dinâmica da aplicação estudada. Serão omitidas as demonstrações das proposições à respeito do número de rotação, que podem ser encontradas em (2) ou (3).

Definição 1.17 *Dado um ponto $x \in S^1$ e f um homeomorfismo que preserva orientação, chamamos o número $\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)-x}{n}$, caso exista, de* número de rotação *do ponto x com relação a F e denotamos por $\overline{\rho}(F,x)$.*

A idéia por trás desta definição é comparar a trajetória que um ponto sofre ao percorrer sua órbita com a trajetória dada por uma rotação. Isto é, queremos saber qual a rotação média que está sendo atribuída ao iterarmos a função no ponto x. A proposição a seguir nos permite redefinir o conceito de número de rotação de forma a torná-lo intrínseco à aplicação f (isto é, independente da escolha do levantamento F e do ponto x).

Proposição 1.18 *Dado um homeomorfismo $f: S^1 \to S^1$ que preserva orientação, vale:*

1. *O limite $\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)-x}{n}$ existe para todo $x \in S^1$.*
2. *Este limite independe do valor x, e portanto podemos denotar apenas $\overline{\rho}(F)$.*

3. *Se* F_1 *e* F_2 *são dois levantamentos de* f*, então* $\overline{\rho}(F_1) - \overline{\rho}(F_2) = k$ *para algum* $k \in \mathbb{Z}$*. Sendo assim, definimos* $\rho(f) = \overline{\rho}(F)(mod 1)$*, que independe da escolha do levantamento* F*, e é chamado* número de rotação *de* f*.*

4. $\rho(f)$ *depende continuamente de* f*.*

Pela definição, é fácil perceber que o número de rotação de uma rotação R_α nada mais é que o valor α. Em geral, o número de rotação de um homeomorfismo tem uma relação muito forte com o comportamento das órbitas. Ele diz, entre outras coisas, sobre a existência de pontos periódicos e seus períodos.

Proposição 1.19 $\rho(f) = 0$ *se, e somente se,* f *possui algum ponto fixo.*

Proposição 1.20 $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ *se, e somente se,* f *possui algum ponto periódico. Além disso, todo ponto de* S^1 *converge assintoticamente (tanto no passado quanto no futuro) para a órbita de algum ponto periódico de* f*. Se* $\rho(f) = p/q$ *com* $p, q \in \mathbb{N}$ *e* p/q *irredutível, então todo ponto periódico de* f *possui o mesmo período, e este vale* q*.*

Apesar do número de rotação estar definido somente para homeomorfismos que preservam orientação, se tivermos um homeomorfismo f que inverte orientação podemos aplicar esta última proposição à f^2 (lembrando que f^2 é um homeomorfismo que preserva orientação e possui pontos fixos) e concluímos que os pontos periódicos de f tem período no máximo 2.

Assim, a dinâmica dos homeomorfismos do círculo com número de rotação racional é bem simples. O ω-limite de qualquer ponto será uma órbita de um ponto periódico. Para homeomorfismos com número de rotação irracional a dinâmica se torna bem mais complicada, e o ω-limite pode assumir características bem mais interessantes.

Definição 1.21 *Dizemos que um ponto* $x \in S^1$ *de* $f : S^1 \to S^1$ *é* recorrente *se, para toda vizinhança* V *de* x*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^n(x) \in V$*.*

É fácil perceber que todo ponto periódico é recorrente. O interessante, e não tão intuitivo, é que a existência de pontos recorrentes também é uma característica inerente às aplicações com número de rotação irracional.

Definição 1.22 *Dizemos que um conjunto* $K \subset S^1$ *é um* conjunto de Cantor *se satisfaz:*

1. K *é compacto.*

2. *K não possui pontos isolados.*

3. *K tem interior vazio.*

Proposição 1.23 *Dado um homeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ que preserva orientação, se $\rho(f) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, vale:*

1. *$\omega(x) = \omega(y)$ para todo $x, y \in S^1$. E portanto podemos definir $\omega(f) = \omega(x)$.*

2. *$\omega(f)$ é minimal.*

3. *$\omega(f)$ é S^1 ou é um conjunto de Cantor.*

Corolário 1.24 *Se f é tal que $\rho(f) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, então f possui ponto recorrente.*

Prova. Segundo a proposição 1.23 acima, todo ponto em $\omega(f)$ é acumulado pela órbita de qualquer ponto. Assim, escolhendo $x \in \omega(f)$ temos em particular que x é acumulado por sua própria órbita.

Sejam f e g duas aplicações contínuas tais que existem levantamentos F e G, respectivamente de f e g, e um intervalo $I \subset S^1$ satisfazendo $|F(w) - G(w)| < 1/2$ para todo $w \in \pi^{-1}(I)$. Dado um ponto $x \in I$, faremos as seguintes convenções:

Seja $x_0 \in \pi^{-1}(x)$. Diremos que $f(x) - g(x) > 0$ se $F(x_0) - G(x_0) > 0$. O mesmo valendo para $<, \leq, =$ ou $\geq$. Assim, na maioria das demonstrações trabalharemos com as aplicações, e não com seus levantamentos, evitando sobrecarregar as notações. As aplicações f e g podem ser a identidade, uma função constante ou qualquer outra aplicação contínua do circulo, desde que estejam suficientemente próximas. Assim, faz sentido falar em $f(x) - a > 0$, $a - b < 0$, $|x - a| < b$, $f(a) \geq b$ etc. Usualmente falaremos sobre pequenas perturbações de um difeomorfismo em um intervalo pequeno de S^1 (definiremos mais adiante formalmente o que isso significa). Podemos pensar em f sendo localmente seu levantamento, e esta notação se tornará muito útil, evitando ter que falar toda hora da função π , π^{-1}, tomar levantamentos apropriados etc. No que se segue, sempre que falarmos em difeomorfismos do círculo assumiremos sem mencionar que o difeomorfismo é de classe C^1.