3
Estabilidade dos Difeomorfismos Morse-Smale

No último capítulo foi apresentado o nosso objeto de estudo (os difeomorfismos Morse-Smale) e a propriedade que estamos interessados em observar (Estabilidade Estrutural). Neste capítulo começaremos a demonstrar que estes dois estão fortemente relacionados. Provaremos que todo difeomorfismo Morse-Smale é estruturalmente estável. No capítulo 4 será demonstrado que todo difeomorfismo C^1-estruturalmente estável de S^1 é Morse-Smale.

As duas próximas proposições dizem respeito à robustez dos pontos fixos hiperbólicos. Dizemos que uma propriedade de um sistema é *robusta* quando ela se mantém após qualquer perturbação suficientemente pequena do sistema.

Proposição 3.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um difeomorfismo com um ponto fixo hiperbólico p. Então existe $\epsilon > 0$ e uma vizinhança U de p tais que se g é um difeomorfismo C^1-ϵ-próximo de f, então g possui um único ponto fixo (hiperbólico) p_g em U.*

Prova. Vamos supor que $f'(p) > 1$. Pela continuidade de f', existe $U = (a,b) \ni p$ satisfazendo:

1. $f'(x) > 1$ para todo $x \in (a,b)$.
2. $f(a) - a < 0$ e $f(b) - b > 0$.

Seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno para, dado g C^1-ϵ-próxima de f, termos $g'(x) > 1$ para todo $x \in (a,b)$. Assuma ainda que $\epsilon < min\{|f(a) - a|, |f(b) - b|\}$, de forma a termos:

$$g(a) - a = (g(a) - f(a)) + (f(a) - a) < 0$$

$$g(b) - b = (g(b) - f(b)) + (f(b) - b) > 0$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário (aplicado à função $h(x) = g(x) - x$) existe $c \in (a,b)$ tal que $h(c) = 0$ (isto é, $g(c) = c$). Este c é o único ponto fixo em (a,b) pois se $g(d) = d$ com $c \neq d \in (a,b)$ teríamos, em decorrência do Teorema do Valor Médio, $g'(k) = 1$ para algum k entre c e d. Absurdo.

Para $f\,'(p) < 1$ a demonstração segue de forma análoga.

Agora vamos focar nossa atenção nos Morse-Smale que preservam orientação e possuem pontos fixos. Provaremos a estabilidade para este caso específico e estenderemos mais adiante para o caso de Morse-Smale com pontos periódicos de período arbitrário e o caso de inversão de orientação.

Proposição 3.2 *Seja f um difeomorfismo Morse-Smale de S^1 que preserva orientação e com pontos fixos. Existe $\epsilon > 0$ tal que se g é C^1- ϵ-próxima de f, então g é um difeomorfismo Morse-Smale com o mesmo número de pontos fixos que f. Além disso, a cada par de pontos fixos consecutivos p_i e p_{i+1} de F corresponde um par de pontos fixos consecutivos q_i e q_{i+1} de G tal que o sinal de $(F(x) - x)$ em (p_i, p_{i+1}) é igual ao sinal de $(G(x) - x)$ em (q_i, q_{i+1}) (onde F e G são os levantamentos de f e g que possuem pontos fixos).*

Prova. Seja k o número de pontos fixos de f. Considere o levantamento F de f tal que $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$ são pontos fixos consecutivos de F em ordem crescente. Então existem $U_i = (a_i, b_i) \ni p_i$, $i = 1, 2, ..., k$ (tomemos todos disjuntos, o que é possível pela arbitrariedade do tamanho de cada intervalo na demonstração da proposição 3.1) e $\epsilon_i > 0$, $i = 1, 2, ..., k$ tais que : Se g é C^1-ϵ'-próxima de f com $\epsilon' = min\{\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_k\}$, então existe um levantamento G de g que é C^1-ϵ'-próximo de F, e G possui um único ponto fixo q_i em cada U_i.

Como $f(x) - x \neq 0$ no compacto $S^1 \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$, podemos então escolher ϵ'' pequeno suficiente para termos $g(x) - x \neq 0$ em $S^1 \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$ para qualquer perturbação g ϵ''-próxima de f. Tomemos $\epsilon = min\{\epsilon', \epsilon''\}$ de forma que se g é C^1-ϵ-próxima de f então os únicos pontos fixos de g são os $q_i\,'s$ descritos acima.

Como todo ponto fixo de F é da forma $p_i + n$, $i = 1, ...k$ e $n \in \mathbb{N}$, segue que todo ponto fixo de G é da forma $q_i + n$, e portanto g tem k pontos fixos. Se $F\,'(p_i) > 1$, então o sinal de $F(x) - x$ em (p_i, p_{i+1}) é positivo numa vizinhança à direita de p_i e portanto positivo entre p_i e p_{i+1}, já que não existe nenhum ponto fixo neste intervalo. Como $q_i \in U_i$, temos $G\,'(q_i) > 1$. Segue que $G(x) - x$ em (q_i, q_{i+1}) tem também sinal positivo. Se $F\,'(p_i) < 1$ temos, por motivos análogos, que $F(x) - x$ em (p_i, p_{i+1}) e $G(x) - x$ em (q_i, q_{i+1}) têm ambos sinal negativo. Pela periodicidade da função $F(x) - x$ e $G(x) - x$, aos intervalos da forma $(p_i + n, p_{i+1} + n)$, $n \in \mathbb{N}$, correspondem os intervalos da forma $(q_i + n, q_{i+1} + n)$ onde respectivamente $F(x) - x$ e $G(x) - x$ possuem o mesmo sinal.

Observe que os pontos fixos dos difeormorfismos Morse-Smale particionam o cículo em intervalos invariantes por f. Para construírmos uma conjugação entre dois difeomorfismos Morse-Smale suficientemente próximos (na topologia C^1), é conveniente primeiro construirmos conjugações para as funções restritas a estes intervalos invariantes, conforme detalhado nas proposições 3.3 e 3.4 a seguir.

Proposição 3.3 *Sejam $f : [a,b] \to [a,b]$ e $g : [c,d] \to [c,d]$ homeomorfismos tais que $f(x) > x$ para $x \in (a,b)$ e $g(x) > x$ para $x \in (c,d)$. Então f e g são topologicamente conjugados.*

Prova. Tome $\alpha \in (a,b)$ e $\beta \in (c,d)$ arbitrariamente. Por hipótese temos $f(x) > x$, e portanto $f^n(x)$ é crescente com relação a $n \in \mathbb{Z}$. Além disso, essa condição nos garante que a e b são os únicos pontos fixos, já que f e g são bijeções. Como o contradomínio é compacto, $f^n(x)$ se acumula a esquerda de algum ponto para $n \to \infty$, e a direita em outro ponto para $n \to -\infty$. Por continuidade de f, estes pontos têm que ser pontos fixos, e portanto são respectivamente a e b. De forma análoga, o mesmo vale para a função g, sendo que a órbita de qualquer ponto converge para c no passado e para d no futuro.

Sendo assim podemos representar (a,b) e (c,d) como união de intervalos disjuntos:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [\ f^n(\alpha)\ ,\ f^{(n+1)}(\alpha)\ ) = (a,b) \qquad e \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [\ g^n(\beta)\ ,\ g^{(n+1)}(\beta)\ ) = (c,d)$$

A imagem de cada intervalo é um intervalo adjacente, e portanto para todo $x \in (a,b)$ temos que a órbita de x por f passa uma única vez em cada intervalo desta união disjunta. Isto é, dado $x \in (a,b)$ existe um único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(x) \in [\alpha, f(\alpha))$. Por motivos idênticos, o mesmo vale para $y \in (c,d)$, em relação a g e $[\beta, f(\beta))$. Conjuntos que satisfazem eta propriedade são chamados de *domínio fundamental*. Assim, $[\alpha, f(\alpha))$ e $[\beta, f(\beta))$ são os domínios fundamentais de f e g respectivamente.

Seja H um homeomorfismo entre os intervalos $[\alpha\ ,\ f(\alpha)]$ e $[\beta\ ,\ g(\beta)]$, com $H(\alpha) = \beta$. Definimos então $h : [a,b] \to [c,d]$ como: $h(x) = g^{-n} \circ H \circ f^n(x)$ para $f^n(x) \in [\alpha, f(\alpha))$, $h(a) = c$ e $h(b) = d$ (de forma a termos continuidade em a e b) . Claramente, h é contínua em $[f^n(\alpha)\ ,\ f^{(n+1)}(\alpha)\ )$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Queremos mostrar que h é contínua em todo $[a,b]$, e portanto basta verificar que h é contínua na fronteira de cada intervalo desta união disjunta.

Considere as seqüências $\{x_n\} \to f^k(\alpha)_+$ e $\{y_n\} \to f^k(\alpha)_-$. Assim, temos:

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = \lim_{n\to\infty} g^k \circ H \circ f^{-k}(x_n) =$$

$$g^k \circ H(\alpha) =$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610736/CA

$$g^{\,k}(\beta) =$$

$$g^{\,k-1}(g(\beta)) =$$

$$\lim_{n\to\infty} g^{\,k-1} \circ H \circ f^{\,-k+1}(y_n) =$$

$$\lim_{n\to\infty} h(y_n)$$

A função h é uma bijeção contínua entre os compactos $[a, b]$ e $[c, d]$, logo é um homeomorfismo.

Queremos verificar ainda que h conjuga f a g. De fato, dado x com $f^{\,k}(x) \in [\alpha\ ,\ f(\alpha)\ )$ temos:

$$h \circ f(x) = g^{\,-k+1} \circ\ H\ \circ f^{\,k-1}(f(x)) =$$

$$g \circ (\ g^{\,-k} \circ\ H\ \circ f^{\,k}\ )(x) = g \circ h(x)$$

Se tivermos $f : [a, b] \to [a, b]$ e $g : [c, d] \to [c, d]$ homeomorfismos com $f(x) < x$ e $g(y) < y$, então f^{-1} e g^{-1} são tais que $g^{-1}(y) > y$ e $f^{-1}(x) > x$. A proposição anterior nos dá que f^{-1} e g^{-1} são conjugadas e conseqüentemente f e g também o são. Assim, a proposição vale tanto para funções que estão acima da identidade como para as que estão abaixo.

Proposição 3.4 *Difeomorfismos Morse-Smale em* $Diff^1_+(S^1)$ *com número de rotação zero (isto é, com pontos fixos) são* C^1*-estruturalmente estáveis.*

Prova. Seja f um difeomorfismo de S^1 que preserva orientação. Seja $\{p_1, ..., p_k, p_{k+1}\}$ um conjunto de pontos fixos consecutivos de F (levantamento de f) com $p_{k+1} = 1 + p_1$. Chamemos $I_i = [p_i, p_{i+1}]$ para cada $i = 1, .., k$. Pela proposição 3.2, existe $\epsilon > 0$ tal que, se g é uma função C^1-ϵ-próxima de f, então existe um levantamento G de g que possui k pontos fixos consecutivos $\{q_1, ..., q_k, q_{k+1}\}$ com $q_{k+1} = 1 + q_k$ satisfazendo (em conseqüência da proposição 3.3): Se $L_i = [q_i, q_{i+1}]$, então F restrita a I_i é conjugada a G restrita a L_i para cada $i = 1, ..., k$.

Chamemos h_i a conjugação referente ao intervalo I_i. Definimos então $H : [p_1, p_{k+1}] \to [q_1, q_{k+1}]$ como $H(x) = h_i(x)$ se $x \in I_i$. Não existe ambiguidade nesta definição, pois se x estiver em mais de um intervalo (digamos I_i e I_{i+1}) então x é da forma p_i e teremos $h_i(p_i) = q_i = h_{i+1}(p_i)$ pela forma como foram construídas as conjugações (ver demonstração da proposição 3.3). Isso mostra também que H é contínua em sua fronteira. Claramente, H é uma bijeção e sua inversa, dada por $H^{-1}(y) = h_i^{-1}(y)$ para $y \in L_i$, é continua por argumento análogo ao feito para H.

Por construção, H é um homeomorfismo que conjuga F restrita a $[p_1, p_{k+1}]$ a G restrita a $[q_1, q_{k+1}]$. Seja $h : S^1 \to S^1$ definida por $h(\pi(x)) =$

$\pi \circ H(x)$. Assim, temos:

$$h \circ f(\pi(x)) = h \circ \pi \circ F(x) =$$

$$\pi \circ H \circ F(x) = \pi \circ G \circ H(x) =$$

$$g \circ \pi \circ H(x) = g \circ h(\pi(x))$$

Corolário 3.5 *Se f é um difeomorfismo Morse-Smale em $Diff^1_+(S^1)$ com t pontos periódicos de período n, e g é um difeomorfismo suficientemente próximo de f (na métrica C^1), então g possui t pontos periódicos de período n.*

Prova. Observe que f^n é uma função Morse-Smale com pontos fixos. Dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno para que toda função C^1-ϵ-próxima de f^n seja conjugada a f^n, tomemos ϵ' pequeno suficiente para que, dado uma função g C^1-ϵ'-próxima a f termos g^n C^1-ϵ-próxima de f^n (essa escolha é possível devido às continuidades de f, g e suas derivadas). Portanto f^n e g^n serão conjugadas. Podemos então afirmar que f e g possuem o mesmo número de pontos periódicos e que $\rho(g^n) = 0$. Pela proposição 2.12, se escolhermos ϵ suficientemente pequeno teremos também que $\rho(f) = \rho(g)$. Concluímos então que o período dos pontos periódicos de f e g é o mesmo.

Observação: A relevância deste corolário reside no fato de que se f^n e g^n são conjugados, não podemos garantir que f e g sejam conjugados. Por exemplo, se f tem dois pontos periódicos de período 2 e $g = f^2$, então f^2 e g^2 são conjugados, porém f e g não são. Mas esta inconveniência só acontece pois, apesar de f e g terem o mesmo número de pontos periódicos, seus períodos são diferentes. Este corolário impede este tipo de situação, tornando possível construir uma conjugação entre f e g, desde que g esteja suficientemente próxima de f, como veremos a seguir.

Agora vamos generalizar a proposição 3.4, que vale para Morse-Smale com pontos fixos, para o caso de Morse-Smale qualquer.

Proposição 3.6 *Difeomorfismos Morse-Smale C^1 de S^1 são C^1-estruturalmente estáveis.*

Prova. Seja f um difeomorfismo Morse-Smale que preserva orientação, onde o périodo dos pontos periódicos é $n > 1$. Tomemos ϵ suficientemente pequeno (tal como no corolário anterior) e g C^1-ϵ-próxima a f de forma a termos f^n e g^n conjugadas, e os pontos periódicos de f e g com o mesmo período.

Nas proposições anteriores mostramos como construir um homeomorfismo que conjuga f^n e g^n. Observe que nesta construção tínhamos a liberdade de escolher arbitrariamente para cada intervalo invariante um domínio fundamental. O que vamos fazer agora é reconstruir a conjugação entre f^n e g^n escolhendo esses domínios fundamentais de forma conveniente, com o propósito de obter um homeomorfismo que conjuga não apenas f^n e g^n, mas também f e g.

Seja t o número de pontos fixos de f^n e $\{p_1, p_2, ..., p_t, p_{t+1} = p_1\}$ os pontos fixos de f indexados de forma consecutiva. Pelo conjugação entre f^n e g^n, a cada intervalo $[p_i, p_{i+1})$ corresponde um intervalo $[q_i, q_{i+1})$ de g, onde $\{q_1, q_2, ..., q_t, q_{t+1} = q_1\}$ sao pontos fixos de g indexados de forma consecutiva. Sabemos que a imagem por f ou g de um ponto periódico é também um ponto periódico. Assim, para cada $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ temos que $f^k([p_i, p_{i+1})) = [p_j, p_j + 1)$ para algum $j \in \{1, ..., n\}$. Em virtude do corolário anterior, cada intervalo $[p_i, p_{i+1})$ ao ser iterado por f percorre exatamente o mesmo número de intervalos invariantes que a iteração de $[q_i, q_{i+1})$ por g. Assim, existe $A \subset \{1, 2, ..., t\}$ tal que a seqüência de intervalos $\{[p_i, p_{i+1})\}_{i \in A}$ e intervalos correspondentes $\{[q_i, q_{i+1})\}_{i \in A}$ são tais que:

1. $S^1 = \cup_{i=1}^{t} \cup_{k=0}^{n-1} f^k([p_i, p_{i+1})$.
2. $S^1 = \cup_{i=1}^{t} \cup_{k=0}^{n-1} g^k([q_i, q_{i+1})$.
3. Dados $i, j \in A$ com $i \neq j$, então os iterados por f de $[p_i, p_{i+1})$ não intersectam nenhum iterado de $[p_j, p_{j+1})$.
4. Dados $i, j \in A$ com $i \neq j$, então os iterados por g de $[q_i, q_{i+1})$ não intersectam nenhum iterado de $[q_j, q_{j+1})$.

Lembremos que nas proposições anteriores escolhemos arbitrariamente um domínio fundamental para cada intervalo de pontos fixos consecutivos $[p_i, p_{i+1})$ de f^n. Agora nossa escolha não será tão arbitrária. Primeiramente escolhamos um intervalo $[p_i, p_{i+1})$ ($i \in A$ fixado) e um domínio fundamental $[\alpha_i, f^n(\alpha_i))$. A escolha do domínio fundamental de $f^k([p_i, p_{i+1}))$ será $f^k([\alpha_i, f^n(\alpha_i))$, para $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Analogamente, ao intervalo $[q_i, q_{i+1})$ de g, escolhamos um domínio fundamental $[\beta_i, g^n(\beta_i))$ e escolha os domínios fundamentais de $g^k([q_i, q_{i+1}))$ como sendo $g^k([\beta_i, f^n(\beta_i))$, para $k \in \{0, ..., n-1\}$. Repetimos o mesmo procedimento para cada $i \in A$, de forma a termos uma escolha de domínio fundamental para cada intervalo invariante de f^n e g^n.

Antes, usávamos uma função linear H_i que levava cada $[\alpha_i, f^n(\alpha_i))$ em $[\beta_i, g^n(\beta_i))$ correspondente. Agora escolhemos uma função linear H_i para levar

$[\alpha_i, f^n(\alpha_i))$ em $[\beta_i, g^n(\beta_i))$ para $i \in A$, e defina $H_{k,i} = g^k \circ H_i \circ f^{-k}$ para levar $f^k([\alpha_i, f^n(\alpha_i))$ no intervalo correspondente $g^k([\beta_i, g^n(\beta_i)))$ $(i \in A)$. Graças ao corolário anterior, as funções $H_{k,i}$ ($i \in A$ e $k \in \{0, ..., n-1\}$) não pecam por omissão nem excesso. Isto é, para cada domínio fundamental escolhido em g, existe um único homeomorfismo dentre os $H_{k,i}$'s cuja imagem é este domínio fundamental.

Obtidos estes domínios fundamentais e seus homeomorfismos correspondentes $H_{k,i}$'s podemos construir o homeomorfismo h que conjuga f^n e g^n tal como feito nas proposições anteriores. Só nos resta verificar que h conjuga também f e g.

Dado $x \in f^k([p_i, p_{i+1}))$ $(i \in A)$, se m é tal que $f^{m.n}(x)$ pertence ao domínio fundamental de $f^k([p_i, p_{i+1}))$, então $f^{m.n}(f(x))$ pertence ao domínio fundamental de $f^{k+1}([p_i, p_{i+1}))$. Observe ainda que neste caso $H_{k+1,i} = g \circ H_{k,i} \circ f^{-1}$. Sendo $h(x) = g^{-m.n} \circ H_{k,i} \circ f^{m.n}(x)$, então:

$$h \circ f(x) = g^{-m.n} \circ H_{k+1,i} \circ f^{m.n}(f(x)) =$$

$$g^{-m.n} \circ (g \circ H_{k,i} \circ f^{-1}) \circ f^{m.n}(f(x)) =$$

$$g \circ (g^{-m.n} \circ H_{k,i} \circ f^{m.n})(x) = g \circ h(x)$$

Para um difeomorfismos Morse-Smale f que inverte orientação, considere a aplicação f^2, que é um difeomorfismo que preserva orientação. Dado $\epsilon > 0$, existe $\epsilon' > 0$ tal que se g é C^1-ϵ'-próximo de f, então g^2 é C^1-ϵ-próximo de f^2. Podemos então conjugar g^2 e f^2. Usando o mesmo artifício acima, podemos fazer com que o homeomorfismo também conjugue f e g.