

3 Modelamento Matemático

A abordagem do escoamento no interior da BCP iniciou-se com a análise de sua geometria e funcionamento, visando avaliar o grau de complexidade envolvido no problema. Esta análise foi guiada pelo pressuposto de que em muitas situações é possível identificar-se simplificações adequadas ao escoamento analisado, na busca de soluções que tenham aplicabilidade atraente e que evitem esforço desproporcional aos benefícios desejados.

Em alguns artigos sobre BCP encontram-se referências que relacionam o desempenho da bomba com o fluxo de retorno entre cavidades consecutivas, denominado escorregamento. Esta passagem de fluidos ocorre numa região caracterizada por uma relação de escala de comprimento tal que sugere a aplicação de um modelo assintótico para descrever o escoamento.

Neste sentido, enxergou-se na teoria da lubrificação uma forte base teórica para descrever o escoamento em questão. Na literatura encontram-se numerosas aplicações desta teoria em situações onde existe um selo hidráulico associado ao movimento relativo de peças cujas dimensões e disposição espacial caracterizam o escoamento através pequenos canais. No escoamento através de pequenas folgas, onde a dimensão característica na direção perpendicular é bem menor do que a dimensão característica na direção do escoamento, vários termos das equações diferenciais que descrevem o movimento de um fluido podem ser desprezados, simplificando bastante sua solução. A figura 3.1 ilustra a passagem de fluido na BCP, evidenciando o refluxo que ocorre longitudinalmente e transversalmente entre as cavidades.

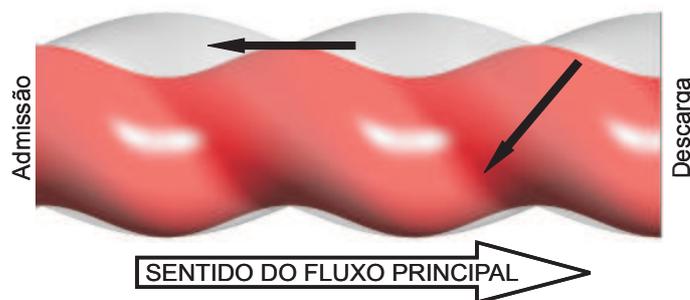


Figura 3.1: Escorregamento entre cavidades da BCP

No presente trabalho, que é focado em BCP monolobular metálica, as equações diferenciais que descrevem o escoamento são simplificadas utilizando-se a teoria de lubrificação, tomando como base Schlichting [13] e Panton [14], a partir de uma análise dimensional de todos os termos da equação de Navier-Stokes.

Considerando-se a complexidade do sistema de equações diferenciais parciais envolvido, a análise dimensional das equações do movimento, realizada à luz das características dimensionais da BCP, apresentada no Apêndice A, permitiu avaliar a importância relativa dos termos destas equações, o que levou à simplificação que corresponde à teoria da lubrificação.

Neste modelo, além das simplificações decorrentes da análise dimensional, considerou-se o escoamento de fluido com propriedades constantes (fluido Newtoniano) e utilizou-se um sistema de coordenadas cilíndricas caracterizado por z , θ e r . O escoamento tridimensional é descrito pelas equações de Navier-Stokes e da continuidade, apresentadas a seguir, nas quais os componentes da velocidade nas três direções do sistema de coordenadas são representados por u , v e w , respectivamente.

Considerando-se a hipótese de fluido incompressível com viscosidade constante, a expansão da equação de conservação da quantidade de movimento, em coordenadas cilíndricas, resulta nas três equações apresentadas a seguir.

Direção axial, z :

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (3-1)$$

Direção radial, r :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w^2}{r} \right) = \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\} \quad (3-2)$$

Direção tangencial, θ :

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial r} + u \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{vw}{r} \right) = \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rw)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\} \quad (3-3)$$

Em coordenadas cilíndricas, a equação da continuidade para fluido incompressível é dada por:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (3-4)$$

No sistema tridimensional em questão, o comprimento da bomba é da mesma ordem de grandeza dos raios do estator e do rotor, porém estas dimensões são muito superiores à folga entre os dois componentes da bomba.

Analisando-se a figura 3.2, que representa uma simplificação da geometria real, observa-se que:

$$R_o, R_r, R_s \sim L$$

onde R_o representa o raio do tubo externo, R_s e R_r representam o maior e o menor raio do tubo interno senoidal, respectivamente, L equivale ao comprimento de onda da senóide, e L_b corresponde ao comprimento total da "bomba":

$$R_o - R_s \ll L$$

sendo esta diferença de raios é denominada "folga", definida por $F = R_o - R_s$.

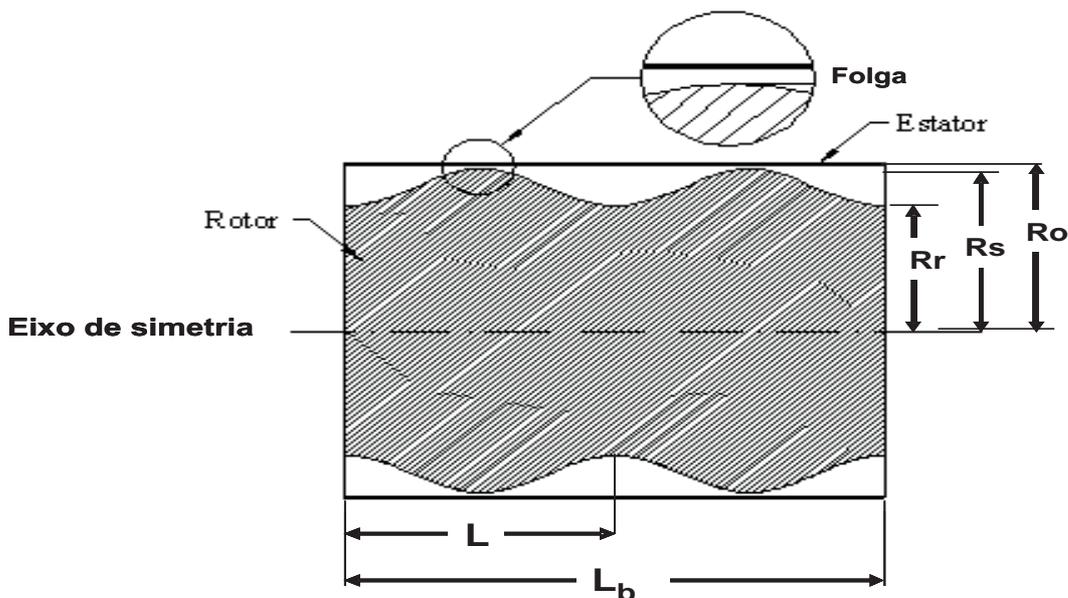


Figura 3.2: Geometria simplificada: tubos concêntricos, sendo o externo de perfil reto e o interno de perfil senoidal

Estas observações geométricas, detalhadas na análise dimensional do Apêndice A, reduziram as três equações do movimento a:

Direção z:

$$0 = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \quad (3-5)$$

Direção r :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (3-6)$$

Direção θ :

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rw)}{\partial r} \right] \right\} \quad (3-7)$$

Ressalta-se desta simplificação as seguintes conclusões:

- A velocidade radial é desprezível em relação às demais :

$$v \ll u, w$$

- O gradiente de pressão na direção radial é nulo:

$$\partial p / \partial r = 0$$

- As derivadas de segunda ordem têm a seguinte relação dimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \gg \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

Considerando-se que a pressão não depende do raio, ou seja, $p = p(z, \theta)$, as equações do movimento nas direções axial e tangencial podem ser integradas para gerar os perfis das velocidades axial e tangencial. Integrando-se as equações 3-5 e 3-7 na direção radial, obtém-se as expressões das velocidades axial e tangencial:

$$u = \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \right) \frac{1}{4\mu} r^2 + c_1 \ln r + c_2 \quad (3-8)$$

$$w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} r \left[\ln \left(\frac{r}{c_3} \right) - \frac{1}{2} \right] + \frac{c_4}{r} \quad (3-9)$$

Neste trabalho as soluções das equações são apresentadas em etapas de crescente complexidade geométrica, porém o conjunto de equações a serem resolvidas é o mesmo, uma vez as geometrias trabalhadas possuem as mesmas relações dimensionais. Em todos os casos, para o estabelecimento das condições de contorno necessárias à solução das equações 3-8 e 3-9, considera-se que não existe deslizamento nem permeabilidade nas paredes do estator e do rotor.

3.1

Modelo para Estator e Rotor com Simetria Axial

Nesta primeira etapa estuda-se o escoamento numa geometria simplificada, com simetria axial, cujo desenho em perspectiva pode ser visto na figura 3.3. O estator é representado por um tubo rígido, de seção transversal constante, e o rotor constitui-se num sólido de revolução com superfície descrita por uma senóide.

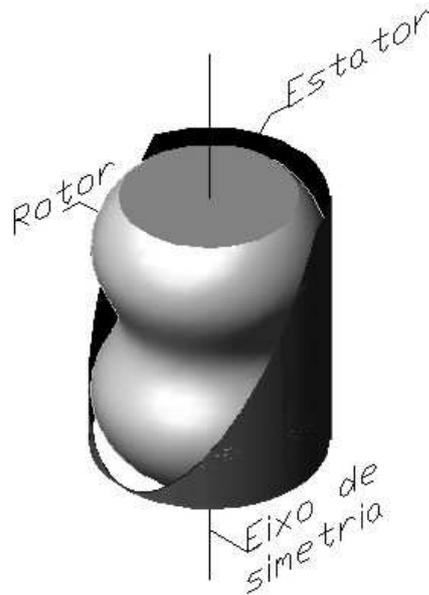


Figura 3.3: Geometria axisimétrica: perspectiva dos cilindros concêntricos

A superfície senoidal do corpo interno, equivalente ao rotor da BCP, é descrita pela equação 3-10, onde R_s e R_r representam respectivamente os raios referentes à crista e ao vale da senóide em relação à linha de centro do rotor.

$$R_i(z, t) = \frac{(R_s + R_r)}{2} + \frac{(R_s - R_r)}{2} \sin \left[\frac{2\pi}{L}(z - Ut) + \frac{\pi}{2} \right] \quad (3-10)$$

A análise simplificada da bomba é feita considerando que o rotor gira em torno de seu eixo e translada axialmente. Apesar de se tratar de uma geometria muito simplificada, diferente do caso real, esta análise permite estudar o vazamento através da folga entre cavidades vizinhas, em função das diferentes variáveis de operação. Contribuem para o escoamento o diferencial de pressão imposto e o movimento relativo entre rotor e estator. A depender do referencial adotado, o movimento entre os dois componentes configura um escoamento em regime permanente ou transiente, detalhados nas sub-seções a seguir.

3.1.1 Regime Permanente

O referencial do problema é solidário ao rotor. Desta forma, o estator, representado pelo tubo externo, move-se axialmente com velocidade constante, e o rotor é estacionário, conforme ilustrado na figura 3.4. Neste sistema de coordenadas o escoamento dá-se em regime permanente, o que simplifica as equações que representam os fenômenos envolvidos.

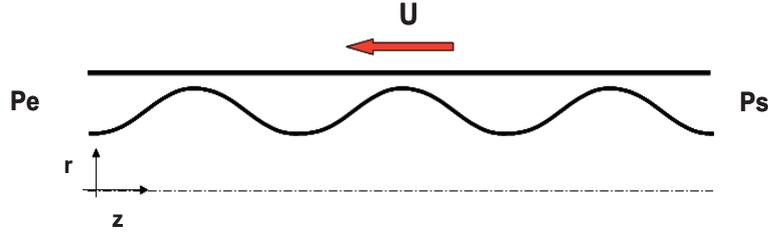


Figura 3.4: Geometria simplificada, com movimento axial do estator

As condições de contorno para a componente u são:

- o estator move-se com velocidade axial constante: $u = U$ em $r = R_o$,
- o rotor não tem movimento axial: $u = 0$ em $r = R_i$.

Para a componente w , as condições de contorno são:

- na parede do estator a velocidade tangencial é nula: $w = 0$ em $r = R_o$,
- na parede do rotor tem-se a rotação dada pelo produto da velocidade angular pelo raio do rotor: $w = W = \omega R_i$ em $r = R_i$.

Com as condições acima, integram-se as expressões de u (3-8) e w (3-9) que resultam em:

$$u = \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \right) \frac{R_i^2}{4\mu} \left\{ \left(\frac{r}{R_i} \right)^2 - \frac{(R_o^2 - R_i^2)}{R_i^2 \ln(R_o/R_i)} \ln \left(\frac{r}{R_i} \right) - 1 \right\} + \frac{U}{\ln(R_o/R_i)} \ln \left(\frac{r}{R_i} \right) \quad (3-11)$$

$$w = \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{R_i}{2\mu} \left\{ \frac{r}{R_i} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + K \frac{r}{R_i} - \frac{R_i}{r} \left(\ln R_i - \frac{1}{2} + K \right) \right\} + WR_i \left\{ \frac{1}{r} \left(1 + \frac{R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \right) - \frac{r}{R_o^2 - R_i^2} \right\} \quad (3-12)$$

onde

$$K = \frac{-R_o^2 (\ln R_o - 1/2) + R_i^2 (\ln R_i - 1/2)}{R_o^2 - R_i^2} \quad (3-13)$$

Dados os perfis de velocidade, integra-se a equação da continuidade 3-4 para determinar o campo de pressão:

$$\int_{R_i}^{R_o} \left\{ \frac{\partial rv}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial ru}{\partial z} \right\} dr = 0 \quad (3-14)$$

A integral da soma pode ser escrita como a soma das três integrais.

$$\underbrace{\int_{R_i}^{R_o} \frac{\partial rv}{\partial r} dr}_I + \underbrace{\int_{R_i}^{R_o} \frac{\partial w}{\partial \theta} dr}_II + \underbrace{\int_{R_i}^{R_o} \frac{\partial ru}{\partial z} dr}_III = 0 \quad (3-15)$$

Analisando-se a equação 3-15, observa-se que no termo (I) pode-se aplicar o teorema fundamental do cálculo e nos termos (II) e (III) aplica-se a regra de Leibnitz. Assim, detalhando-se cada integral, tem-se:

I)

$$\int_{R_i}^{R_o} \frac{\partial rv}{\partial r} dr = R_o v(R_o) - R_i v(R_i) \quad (3-16)$$

II)

$$\int_{R_i}^{R_o} \frac{\partial w}{\partial \theta} dr = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{R_i}^{R_o} w dr - \left[w(R_o) \frac{\partial R_o}{\partial \theta} - w(R_i) \frac{\partial R_i}{\partial \theta} \right] \quad (3-17)$$

III)

$$\int_{R_i}^{R_o} \frac{\partial ru}{\partial z} dr = \frac{\partial}{\partial z} \int_{R_i}^{R_o} ru dr - \left[u(R_o) \frac{\partial R_o}{\partial z} - u(R_i) \frac{\partial R_i}{\partial z} \right] \quad (3-18)$$

Observando-se as expressões (I), (II) e (III) acima, faz-se as seguintes considerações:

- (I) Como não existe velocidade radial em nenhuma das duas fronteiras, este termo é nulo: $v(R_o) = v(R_i) = 0$;
- (II) R_o e R_i não variam em relação a θ , logo $\partial R_o / \partial \theta = \partial R_i / \partial \theta = 0$;
- (III) R_o não varia em relação a z , logo $\partial R_o / \partial z = 0$, e não há velocidade na parede interna, logo $u(R_i) = 0$.

A partir destas premissas, a equação 3-15 reduz-se a:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{R_i}^{R_o} w dr + \frac{\partial}{\partial z} \int_{R_i}^{R_o} ru dr = 0 \quad (3-19)$$

Resolvendo-se as integrais de w e u obtém-se:

$$\int_{R_i}^{R_o} ru \, dr = \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \right) \left(\frac{-R_i^2}{8\mu} \right) \left\{ (R_o^2 - R_i^2) \left[1 - \frac{(R_o^2 - R_i^2)}{2R_i^2} + \left(\frac{1}{R_r^2 \ln(R_o/R_i)} \right) \left(R_o^2 \ln \left(\frac{R_o}{R_i} \right) - \frac{(R_o^2 - R_i^2)}{2} \right) \right] \right\} + \frac{U}{2 \ln(R_o/R_i)} \left[R_o^2 \ln \left(\frac{R_o}{R_i} \right) - \frac{(R_o^2 - R_i^2)}{2} \right] \quad (3-20)$$

$$\int_{R_i}^{R_o} w \, dr = \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{R_i}{2\mu} \left\{ \frac{1}{2R_i} [R_o^2 \ln(R_o) - R_i^2 \ln(R_i) - (R_o^2 - R_i^2)(1 + K)] - R_i \left[\left(\ln(R_i) - \frac{1}{2} + K \right) \ln \left(\frac{R_o}{R_i} \right) \right] \right\} + WR_i \left\{ \ln \left(\frac{R_o}{R_i} \right) \left[1 + \frac{R_i^2}{(R_o^2 - R_i^2)} \right] - \frac{1}{2} \right\} \quad (3-21)$$

sendo K dado pela equação 3-13.

Substituindo-se as equações 3-21 e 3-20 na equação da continuidade 3-19 e separando-se os termos que dependem da pressão para o lado esquerdo, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(C_1 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(C_2 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} (C_{0w}) + \frac{\partial}{\partial z} (C_{0U} + C_2 \rho g) \quad (3-22)$$

onde:

$$C_{0U} = \frac{U}{2 \ln(R_o/R_i)} \left[R_o^2 \ln \left(\frac{R_o}{R_i} \right) - \frac{(R_o^2 - R_i^2)}{2} \right] \quad (3-23)$$

$$C_{0w} = -WR_i \left\{ \ln \left(\frac{R_o}{R_i} \right) \left[1 + \frac{R_i^2}{(R_o^2 - R_i^2)} \right] - \frac{1}{2} \right\} \quad (3-24)$$

$$C_1 = \frac{R_i}{2\mu} \left\{ \frac{1}{2R_i} [R_o^2 \ln(R_o) - R_i^2 \ln(R_i) - (R_o^2 - R_i^2)(1 + K)] - R_i \left[\left(\ln(R_i) - \frac{1}{2} + K \right) \ln \left(\frac{R_o}{R_i} \right) \right] \right\} \quad (3-25)$$

$$C_2 = \left(\frac{-R_i^2}{8\mu} \right) \left\{ (R_o^2 - R_i^2) \left[1 - \frac{(R_o^2 - R_i^2)}{2R_i^2} + \left(\frac{1}{R_r^2 \ln(R_o/R_i)} \right) \left(R_o^2 \ln \left(\frac{R_o}{R_i} \right) - \frac{(R_o^2 - R_i^2)}{2} \right) \right] \right\} \quad (3-26)$$

As expressões de C_{0U} e C_{0W} correspondem às parcelas da equação da continuidade que não dependem da pressão.

A equação diferencial 3-22, que corresponde a uma equação de Poisson, descreve a variação de pressão ao longo da bomba e não tem solução analítica, portanto será resolvida numericamente. Uma vez conhecido o campo de pressão, o campo de velocidade é determinado pelas equações 3-11 e 3-12.

Para resolver a equação 3-22 impõe-se as seguintes condições de contorno para a pressão:

- em z : valores de pressão na entrada e na saída da bomba;

$$p(z = 0) = P_e$$

$$p(z = L_b) = P_s$$

- em θ : condição de periodicidade.

$$p(\theta = 0) = p(\theta = 2\pi)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta = 0) = \frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta = 2\pi)$$

3.1.2

Regime Transiente

Nesta segunda etapa da geometria axisimétrica, o referencial é fixo no laboratório. O rotor move-se axialmente com velocidade constante, de modo que a geometria varia com o tempo, como pode ser visto na figura 3.5. Esta configuração equivale a uma mudança de referencial, na qual o movimento relativo entre os dois componentes da bomba é observado externamente, caracterizando um regime transiente. Lembrando que neste modelo as propriedades do fluido não variam com tempo, esta situação poderia ser denominada de pseudo-permanente, uma vez que somente grandezas geométricas variam temporalmente.

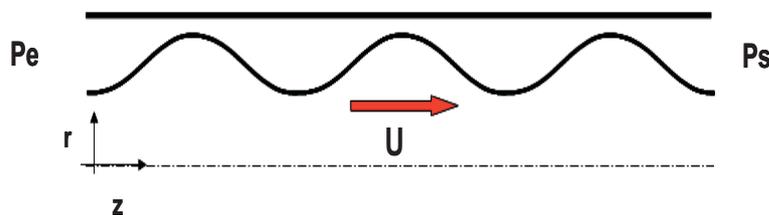


Figura 3.5: Geometria simplificada, com movimento axial do rotor

Dado que o estator não se move e que o rotor desloca-se axialmente, os termos da equação 3-15 da sub-seção 3.1.1 recebem a seguinte interpretação:

- (I) Como não existe velocidade radial em nenhuma das duas fronteiras, este termo é nulo: $v(R_o) = v(R_i) = 0$;
- (II) R_o e R_i não variam em relação a θ , logo $\partial R_o/\partial\theta = \partial R_i/\partial\theta = 0$;
- (III) R_o não varia em relação a z , logo $\partial R_o/\partial z = 0$. Como a parede interna do tubo senoidal está se movimentando axialmente, $u(R_i) = U$.

Logo, permanecem os seguintes termos na equação da continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \int_{R_i}^{R_o} w \, dr + \frac{\partial}{\partial z} \int_{R_i}^{R_o} ru \, dr + \left[u(R_i) \frac{\partial R_i}{\partial z} \right] = 0 \quad (3-27)$$

A derivada de R_i em z é obtida a partir da função senoidal que representa a superfície do rotor, dada pela equação 3-10, e tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial R_i}{\partial z} = \frac{2\pi}{L} \frac{(R_s - R_r)}{2} \cos\left(\frac{2\pi z}{L} - Ut\right) \quad (3-28)$$

A movimentação axial do rotor implica na seguinte mudança na condição de contorno da componente axial da velocidade :

- $u = U$ em $r = R_i$,
- $u = 0$ em $r = R_o$.

Ou seja, mantém-se a condição de não deslizamento quando se define que a componente axial da velocidade é nula na parede do estator e assume um valor constante na parede do rotor. Com as novas condições de contorno, a integração da equação 3-8 gera a seguinte expressão para o perfil de velocidade axial:

$$u = \left(\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} \right) \frac{R_i^2}{4\mu} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R_i} \right)^2 + \left[\left(\frac{(R_o/R_i^2) - 1}{\ln(R_o/R_i)} \right) \ln \left(\frac{r}{R_i} \right) \right] \right\} + U \left[1 - \frac{\ln(r/R_i)}{\ln(R_o/R_i)} \right] \quad (3-29)$$

Comparando-se a equação 3-29 com a 3-11, observa-se que o movimento axial do rotor acrescentou um termo de U , independente da pressão, ao perfil de velocidade.

Integrando a equação 3-29 ao longo do raio, obtém-se:

$$\int_{R_i}^{R_o} ru \, dr = \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \right) \left(\frac{-R_i^2}{8\mu} \right) \left\{ (R_o^2 - R_i^2) \left[1 - \left(\frac{R_o^2 - R_i^2}{2R_i^2} \right) \left(\frac{1}{R_i^2 \ln(R_o/R_i)} \right) \left(R_o^2 \ln \left(\frac{R_o}{R_i} \right) - \frac{(R_o^2 - R_i^2)}{2} \right) \right] \right\} + \frac{U}{2} \left\{ R_o^2 - R_i^2 - \frac{1}{\ln(R_o/R_i)} \left[R_o^2 \ln \left(\frac{R_o}{R_i} \right) - \frac{(R_o^2 - R_i^2)}{2} \right] \right\} \quad (3-30)$$

Da equação 3-30 extrai-se um novo termo C_{0U} , dado pela equação 3-31, que em relação à equação 3-23 recebe um sinal contrário e um termo a mais de U , em decorrência da mudança de referencial.

$$C_{0U} = -\frac{U}{2 \ln(R_o/R_i)} \left[R_o^2 \ln \left(\frac{R_o}{R_i} \right) - \frac{(R_o^2 - R_i^2)}{2} \right] + \frac{U}{2} (R_o^2 - R_i^2) \quad (3-31)$$

Como as condições de contorno para a componente tangencial da velocidade não se modificaram, as equações e 3-12 e 3-21 continuam as mesmas do regime permanente.

Substituindo-se as equações 3-21 e 3-30 na equação da continuidade 3-27, esta assume a forma da expressão 3-32 a seguir, que representa equação diferencial parcial para o campo de pressão com o rotor em movimento:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(C_1 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(C_2 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} (C_{0w}) + \frac{\partial}{\partial z} (C_{0U} + C_2 \rho g) - R_i U \frac{\partial R_i}{\partial z} \quad (3-32)$$

Na equação 3-32 observam-se duas diferenças em relação à equação 3-22, ambas no lado direito onde estão os termos independentes da pressão: uma nova expressão para o coeficiente C_{0U} e um termo adicional relacionado à variação da posição do rotor.

Da mesma forma que a equação 3-22, a equação de Poisson 3-32 que descreve o campo de pressão do modelo em regime transiente não tem solução analítica, portanto será resolvida numericamente. São consideradas as mesmas condições de contorno da seção 3.1.1 para a pressão. Uma vez conhecido o campo de pressão, o campo de velocidade é determinado pelas equações 3-29 e 3-12.

3.2

Modelo para BCP com Estator Rígido e Lóbulo Único

Nesta seção o modelo é aplicado à geometria e cinemática reais da BCP de estator rígido e lóbulo único (*singlelobe*), com centro de referência das coordenadas posicionado na hélice central do rotor.

3.2.1

Geometria da BCP

As BCP são compostas por dois elementos denominados estator e rotor. O rotor é um sólido no formato de uma hélice externa, que gira dentro de um estator moldado no formato de uma hélice dupla interna.

A geometria desta bomba é baseada em duas curvas paramétricas: uma hipociclóide e uma hélice. A hipociclóide, definida como o lugar geométrico formado de um ponto sobre um círculo que gira internamente sem deslizar sobre outro círculo, descreve as seções transversais do rotor e do estator. A relação de raios entre o círculo interno e o círculo externo define o número de lóbulos desta seção transversal, sendo que o rotor tem um lóbulo a menos que o estator.

Na BCP monolobular os dois elementos são descritos por hipociclóides de mesma ordem. A seção do rotor é obtida diretamente a partir do desenho da seção lobular e a seção do estator surge quando se extrai a seção lobular de uma seção circular.

A hélice é a curva formada pelo lugar geométrico de um ponto que se move sobre a superfície de um cilindro e é caracterizada pelo ângulo, pela excentricidade e pelo passo. O ângulo define a trajetória do ponto, a excentricidade representa o raio da hélice e o passo é a distância percorrida pelo ponto até dar uma volta completa.

A superfície gerada pela hélice quando descreve uma revolução é denominada helicóide, cujo raio é a excentricidade. Ou seja, o centro da seção transversal do helicóide descreve uma hélice ao longo do eixo de centro do sólido, de forma que a excentricidade corresponde à distância entre os centros das seções transversais do rotor e de sua helicóide. Na BCP, a excentricidade do rotor e do estator deve ser a mesma para permitir o movimento relativo entre eles.

O espaço existente entre o estator e o rotor é conhecido como cavidade, cujo volume é definido pelo passo, diâmetro e excentricidade do rotor, e folga existente entre o rotor e o estator. Quando as seções transversais lobulares seguem o caminho descrito pelo helicóide, obtém-se o volume lobular, que forma as cavidades da BCP, como pode ser visto na figura 3.6.

Cada cavidade tem um comprimento igual a um passo de estator e tem forma espiralada ao redor do rotor. A seção da cavidade varia continuamente ao longo do eixo do estator, desde zero a um máximo e voltando para zero. As bombas de lóbulo único (*singlelobe*) são caracterizadas pela relação 1:2 entre o número de passos do estator e do rotor.

A figura 3.7 mostra um corte transversal de uma BCP *singlelobe*, de-

monstrando as seções de seus dois componentes, com uma representação da circunferência descrita pelo helicóide.

Quando o rotor está inserido dentro do estator, formam-se uma série de cavidades que, com o giro do rotor, movimentam-se axialmente da sucção para o recalque da bomba, promovendo a ação de bombeio. Além do movimento de rotação, o rotor translada na seção do estator, como mostrado na figura 3.8.

Na figura 3.9 apresentam-se os principais elementos que serão utilizados para descrever a geometria da seção transversal da BCP. A região do escoamento é definida pela área interna do estator menos a área externa do rotor. Nesta figura ressalta-se a excentricidade, definida pela distância entre o centro do estator e o centro da hélice do rotor, e onde se observa que o comprimento da linha correspondente ao movimento de translação do rotor é igual a quatro

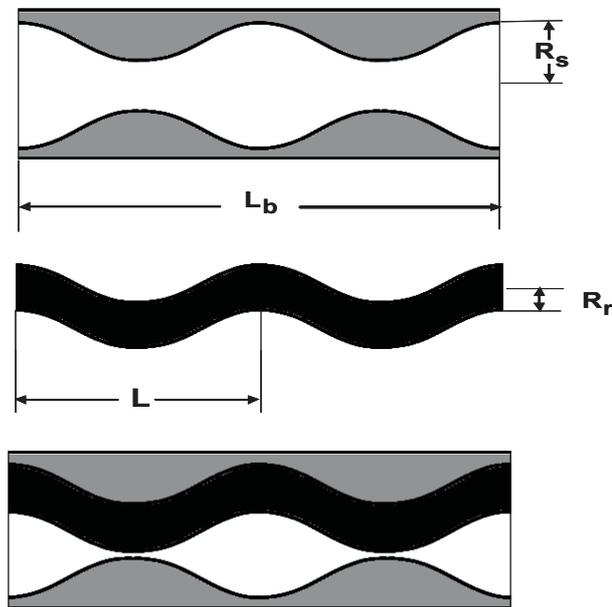


Figura 3.6: Seção longitudinal de BCP *singlelobe*

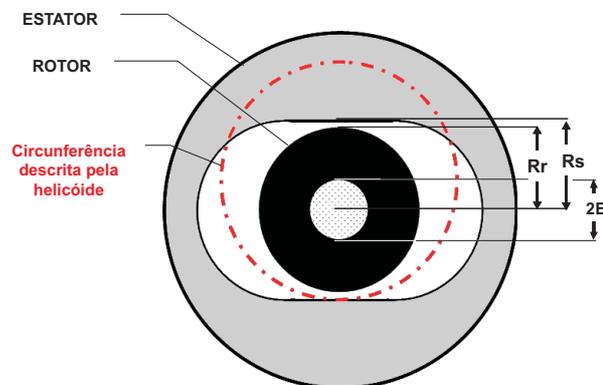


Figura 3.7: Seção transversal da BCP *singlelobe*

vezes a excentricidade.

No presente modelo, aplicável à BCP monolobular, o centro de referência das coordenadas foi estabelecido no centro do rotor (Cr), caracterizando um referencial não estacionário. Dado que o estator é rígido, não há interferência com o rotor, portanto $R_s \geq R_r$. Assim, a seção transversal do escoamento varia radialmente de R_r (raio do rotor) a R_o (superfície interna do estator), definindo os limites da integração na seção radial:

- Limite inferior: R_r , raio da seção do rotor, que é um valor fixo porque que o centro de referência foi posicionado na hélice central do rotor.
- Limite superior: R_o , que representa a distância do centro do rotor até a superfície do estator, é descrito em função das características geométricas da bomba. R_o varia de R_s , que é o menor raio da seção do estator até um valor máximo posicionado na calota oposta do estator. Logo, R_o é uma função de z e θ , ou seja, $R_o = R_o(z, \theta)$.

Da figura 3.9 extraem-se algumas variáveis auxiliares, criadas para descrever a posição de um ponto sobre a superfície interna do estator:

Θ_S : ângulo entre o eixo horizontal marcado pelo centro do rotor e a linha central do estator.

$$\Theta_S = \frac{2\pi z}{P_{st}} = \frac{\pi z}{P_r} \tag{3-33}$$

onde P_{st} e P_r são respectivamente os passos do estator e do rotor.

d_{CSR} : distância entre os centros do rotor e do estator que é função de z , θ e t , conforme expressão a seguir:

$$\overline{C_s C_r} = d_{CSR} = 2E \cos(\Omega t - \Theta_S) \tag{3-34}$$

da qual deduz-se que: $-2E \leq d_{CSR} \leq 2E$.

Conforme mostra a figura 3.10, a seção transversal da BCP foi dividida em quatro regiões, a fim de facilitar a dedução de expressões geométricas que descrevam a superfície interna do estator.

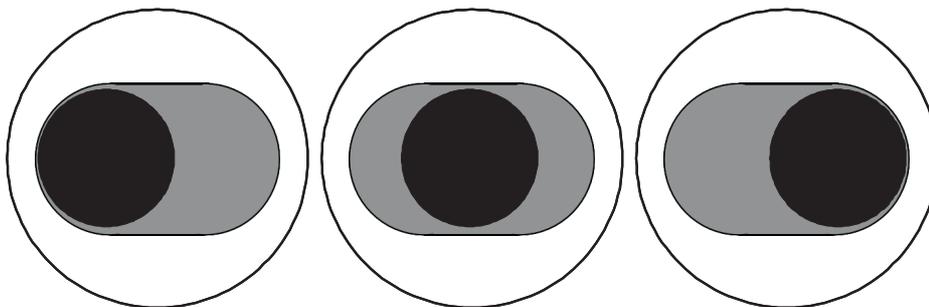


Figura 3.8: Translação do rotor na seção transversal da BCP

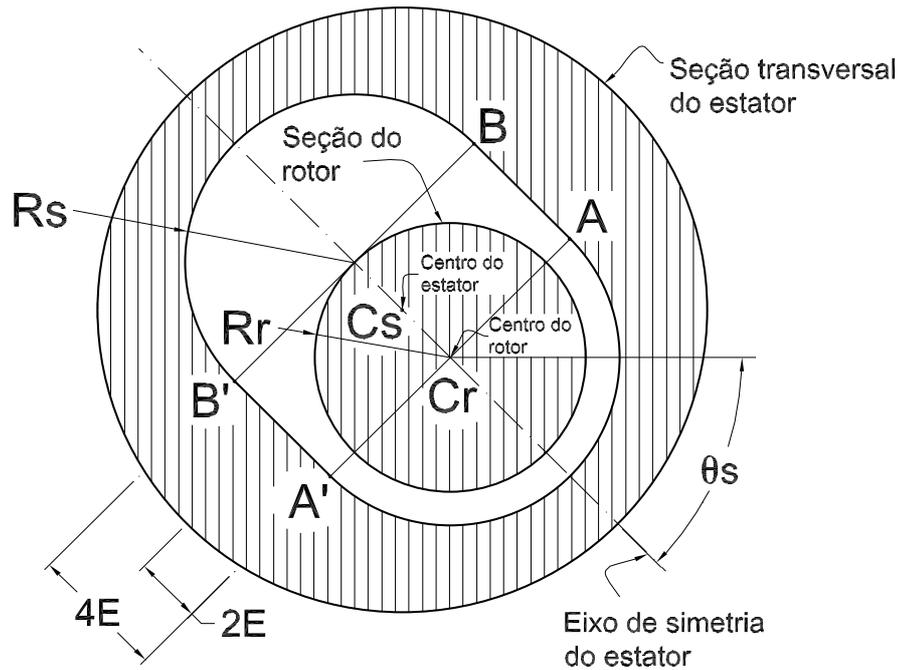


Figura 3.9: Elementos geométricos da seção transversal de BCP *singlelobe*

As seções I, II, III e IV são definidas pelos ângulos formados pela linha central do estator e a reta que liga o centro do rotor aos pontos que definem os extremos das regiões A, B, A', B':

α_1 : ângulo entre a linha central do rotor e as retas $\overline{C_r A}$ e $\overline{C_r A'}$.

$$\alpha_1 = \arctan \left(\frac{R_s}{2E - d_{CSR}} \right) \quad (3-35)$$

α_2 : ângulo entre a linha central do rotor e as retas $\overline{C_r B}$ e $\overline{C_r B'}$.

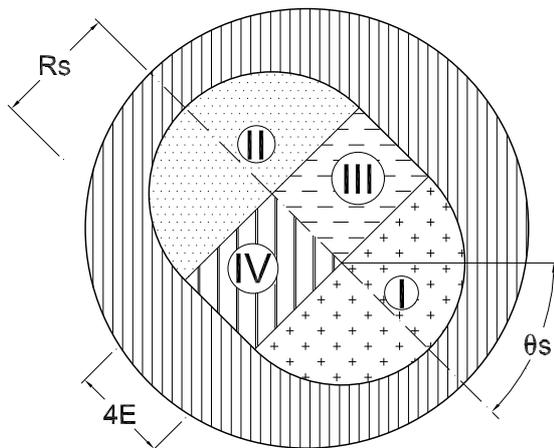


Figura 3.10: Regiões da seção transversal da BCP

$$\alpha_2 = \arctan \left(\frac{R_s}{2E + d_{CSR}} \right) \quad (3-36)$$

Para uma seção transversal da BCP e um instante definido (ou seja, para um dado z e t), calculam-se os valores de R_o em função de θ , criando-se a superfície interna do estator. As expressões de R_o para cada uma das quatro regiões da figura 3.10 são apresentadas a seguir.

– Região I (figura 3.11):

$$R_o = (2E - d_{csr}) \cos(\theta - \Theta_S) + \sqrt{R_s^2 - (2E - d_{csr})^2 \sin^2(\theta - \Theta_S)} \quad (3-37)$$

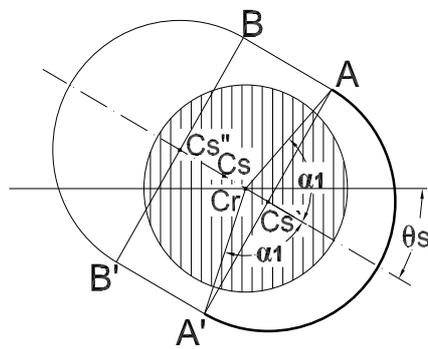


Figura 3.11: Região 1 da seção transversal da BCP

– Região II (figura 3.12):

$$R_o = -(2E + d_{csr}) \cos(\theta - \Theta_S) + \sqrt{R_s^2 - (2E + d_{csr})^2 \sin^2(\theta - \Theta_S)} \quad (3-38)$$

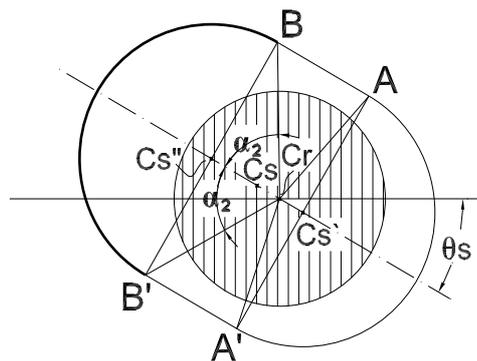


Figura 3.12: Região 2 da seção transversal da BCP

– Região III (figura 3.13):

$$R_o = \sqrt{R_s^2 + (2E - d_{csr})^2} \left[\frac{\sin \alpha_1}{\sin(\theta - \Theta_S)} \right] \quad (3-39)$$

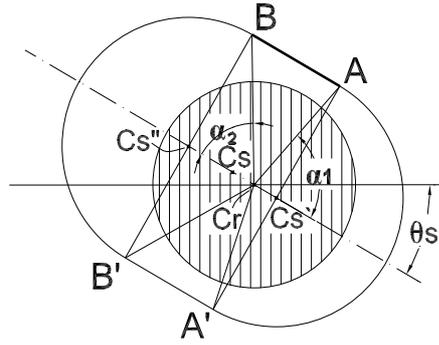


Figura 3.13: Região 3 da seção transversal da BCP

– Região IV (figura 3.14):

$$R_o = -\sqrt{R_s^2 + (2E - d_{csr})^2} \left[\frac{\sin \alpha_1}{\sin(\theta - \Theta_S)} \right] \quad (3-40)$$

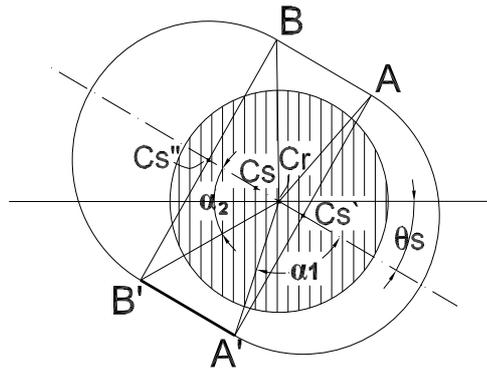


Figura 3.14: Região 4 da seção transversal da BCP

Os valores dos ângulos que limitam as regiões são ordenados no sentido anti-horário, e definem os valores máximo e mínimo de θ para as expressões de R_o , em cada uma das regiões.

- Limite A = $(\alpha_1 - \Theta_s)$;
- Limite B = $(\pi - \Theta_s - \alpha_2)$;
- Limite B' = $(\pi + \alpha_2 - \Theta_s)$;
- Limite A' = $(2\pi - \alpha_1 - \Theta_s)$;

- Região I: Limite A' $\ll \theta \ll$ Limite A
- Região II: Limite B $\ll \theta \ll$ Limite B'
- Região III: Limite A $\ll \theta \ll$ Limite B
- Região IV: Limite B' $\ll \theta \ll$ Limite A'

3.2.2

Descrição da Cinemática

A seção transversal do rotor descreve movimentos de rotação e translação, como se pode ver na figura 3.15, que demonstra posições discretas do rotor, num corte transversal da BCP, para diferentes instantes de tempo, representados por ângulos de rotação.

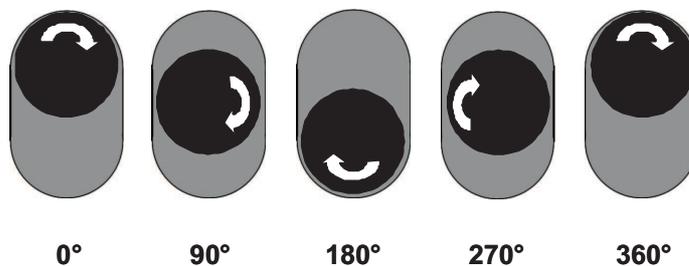


Figura 3.15: Movimentação transversal do rotor

Para apresentar os componentes cinemáticos da BCP relacionados com a rotação do helicóide, numa dada seção transversal, apresenta-se a figura 3.16, onde são assinalados dois pontos referenciais, nas superfícies do rotor (P) e do estator (Q).

A coordenada angular do ponto P sobre a superfície do rotor é dada por: $\theta = \gamma + \Omega t$, onde γ representa a posição inicial do ponto e Ω é a rotação. Este ponto descreve uma rotação no sentido anti-horário, dado que o helicóide descreve uma rotação horária.

As coordenadas cartesianas do centro do rotor (referencial neste modelo), em relação ao centro do estator, são dadas por:

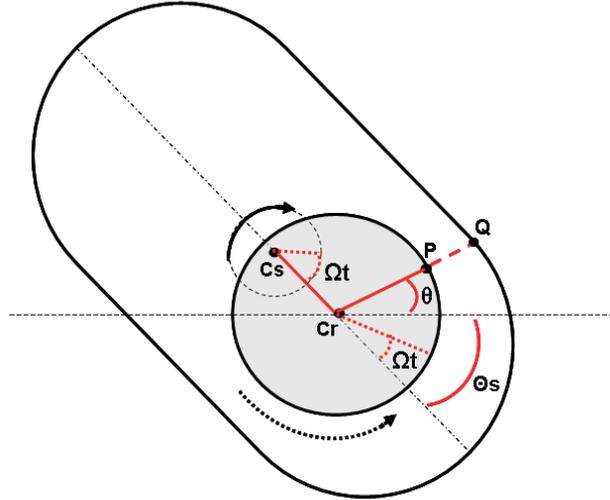


Figura 3.16: Variáveis para descrever o movimento do rotor

$$X_{csr} = d_{csr} \cos(\Theta_s) = +2E \cos(\Omega t - \Theta_s) \cos(\Theta_s) \quad (3-41)$$

$$Y_{csr} = -d_{csr} \sin(\Theta_s) = -2E \cos(\Omega t - \Theta_s) \sin(\Theta_s) \quad (3-42)$$

A velocidade do centro do rotor, portanto, será descrita pela seguinte soma vetorial: $\vec{V}_{csr} = \vec{V}_{X_{csr}} + \vec{V}_{Y_{csr}}$, onde os vetores nas direções x e y são dados por:

$$\vec{V}_{X_{csr}} = \frac{\partial X_{csr}}{\partial t} = -2E\Omega \sin(\Omega t - \Theta_s) \sin(\Theta_s) \quad (3-43)$$

$$\vec{V}_{Y_{csr}} = \frac{\partial Y_{csr}}{\partial t} = +2E\Omega \sin(\Omega t - \Theta_s) \cos(\Theta_s) \quad (3-44)$$

O ponto P tem as seguintes coordenadas:

$$X_P = X_{csr} + R_r \cos(\theta) = X_{csr} + R_r \cos(\gamma + \Omega t) \quad (3-45)$$

$$Y_P = Y_{csr} + R_r \sin(\theta) = Y_{csr} + R_r \sin(\gamma + \Omega t) \quad (3-46)$$

A velocidade de P é dada pela soma vetorial $\vec{V}_P = \vec{V}_{X_P} + \vec{V}_{Y_P}$, onde os vetores nas direções x e y são dados por:

$$\vec{V}_{X_P} = \frac{\partial X_P}{\partial t} = \frac{\partial X_{csr}}{\partial t} + \frac{\partial R_r \cos(\theta)}{\partial t} = V_{X_{csr}} - R_r \Omega \sin \theta \quad (3-47)$$

$$\vec{V}_{Y_P} = \frac{\partial Y_P}{\partial t} = \frac{\partial Y_{csr}}{\partial t} + \frac{\partial R_r \sin(\theta)}{\partial t} = V_{Y_{csr}} + R_r \Omega \cos \theta \quad (3-48)$$

Escrevendo a velocidade de P em relação ao referencial do modelo que está posicionado no centro do rotor: $\overrightarrow{V_{P_{csr}}} = \overrightarrow{V_P} + \overrightarrow{V_{csr}}$, cujos componentes x e y são:

$$\overrightarrow{V_{X_{P_{csr}}}} = V_{X_P} - V_{X_{csr}} = -R_r \Omega \sin \theta \quad (3-49)$$

$$\overrightarrow{V_{Y_{P_{csr}}}} = V_{Y_P} - V_{Y_{csr}} = +R_r \Omega \cos \theta \quad (3-50)$$

Sobre a superfície do estator define-se o ponto Q, cuja velocidade, em relação ao referencial do modelo, é dada por: $\overrightarrow{V_{Q_{csr}}} = \overrightarrow{V_Q} - \overrightarrow{V_{csr}}$.

Dado que o estator não se move, a velocidade de Q resume-se a: $\overrightarrow{V_{Q_{csr}}} = -\overrightarrow{V_{csr}}$, cujos componentes são:

$$\overrightarrow{V_{X_{Q_{csr}}}} = +2E\Omega \sin(\Omega t - \Theta_s) \cos(\Theta_s) \quad (3-51)$$

$$\overrightarrow{V_{Y_{Q_{csr}}}} = -2E\Omega \sin(\Omega t - \Theta_s) \sin(\Theta_s) \quad (3-52)$$

Para transformar as equações acima para coordenadas cilíndricas será utilizada a matriz de transformação a seguir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_r \\ \mathbf{V}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_x \\ \mathbf{V}_y \end{bmatrix}$$

A partir das expressões da cinemática da BCP pode-se escrever as equações das velocidades nas superfícies do rotor e do estator, em relação ao referencial do modelo, em coordenadas cilíndricas.

- $v(R_o) = V_{X_{Q_{csr}}} \cos \theta + V_{Y_{Q_{csr}}} \sin \theta = +2E\Omega \sin(\Omega t - \Theta_s) \cos(\Theta_s)$
- $w(R_o) = -V_{X_{Q_{csr}}} \sin \theta + V_{Y_{Q_{csr}}} \cos \theta = -2E\Omega \sin(\Omega t - \Theta_s) \sin(\Theta_s)$
- $v(R_r) = V_{X_{P_{csr}}} \cos \theta + V_{Y_{P_{csr}}} \sin \theta = 0$
- $w(R_r) = -V_{X_{P_{csr}}} \sin \theta + V_{Y_{P_{csr}}} \cos \theta = \Omega R_r$

3.2.3

Desenvolvimento do Modelo

Para aplicar as equações do movimento à geometria e ao funcionamento da BCP deve-se inicialmente definir as condições de contorno para as expressões das três componentes da velocidade.

Nas superfícies do estator e do rotor existem somente as componentes radial e angular de velocidade, sendo o movimento do rotor responsável pela componente angular de velocidade.

Na superfície do estator tem-se as seguintes condições:

$$\begin{aligned} - u(R_o) &= 0, \\ - v(R_o) &= V_{Ro} = 2E\Omega \sin(\Omega t - \Theta_s) \cos(\theta + \Theta_s), \\ - w(R_o) &= W_{Ro} = -2E\Omega \sin(\Omega t - \Theta_s) \sin(\theta + \Theta_s). \end{aligned}$$

Na superfície do rotor, as condições de contorno são:

$$\begin{aligned} - u(R_r) &= 0, \\ - v(R_r) &= 0, \\ - w(R_r) &= R_r\Omega. \end{aligned}$$

onde Ω é a rotação do helicóide do rotor, que gira no sentido horário.

Com estas condições de contorno, a componente angular de velocidade será dada por:

$$\begin{aligned} w = \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{R_r}{2\mu} \left\{ \frac{r}{R_r} \left[\ln(r) - \frac{1}{2} + \frac{r}{R_r} K - \frac{R_r}{r} \left(\ln(R_r) - \frac{1}{2} + K \right) \right] \right\} + \\ \left(\frac{W_{Ro} R_o - \Omega R_r^2}{R_o^2 - R_r^2} \right) \left(r - \frac{R_r^2}{r} \right) + \Omega \frac{R_r^2}{r} \end{aligned} \quad (3-53)$$

A integração da velocidade tangencial na seção transversal da BCP resulta na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \int_{R_r}^{R_o} w \, dr = \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{R_r}{2\mu} \left\{ \frac{1}{2R_r} [R_o^2 \ln(R_o) - R_r^2 \ln(R_r) - (R_o^2 - R_r^2)(1 + K)] + \right. \\ \left. - R_r \left[\left(\ln(R_r) - \frac{1}{2} + K \right) \ln \left(\frac{R_o}{R_r} \right) \right] \right\} \\ + \left(\frac{W_{Ro} + R_r^2}{R_o^2 - R_r^2} \right) \left[\frac{(R_o^2 - R_r^2)}{2} - R_r^2 \ln \left(\frac{R_o}{R_r} \right) \right] - \\ - R_r^2 \Omega \ln \left(\frac{R_o}{R_r} \right) \end{aligned} \quad (3-54)$$

A componente axial de velocidade permanece a mesma expressão apresentada na equação 3-11 da seção 3.1.1, sendo que o termo de U é nulo.

Na equação da continuidade, dadas as condições de contorno apresentadas, restam os seguintes termos:

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{R_r}^{R_o} ru \, dr + \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{R_r}^{R_o} w \, dr - w(R_o) \frac{\partial R_o}{\partial \theta} - R_o v(R_o) = 0 \quad (3-55)$$

que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \left(C_1 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(C_2 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \\ & \frac{\partial}{\partial \theta} (C_{0W}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho g C_2) + w(R_o) \frac{\partial R_o}{\partial \theta} + R_o v(R_o) \end{aligned} \quad (3-56)$$

onde C_{0W} é dado pela expressão a seguir:

$$C_{0W} = - \left(\frac{W_{R_o} R_o - \Omega R_r^2}{R_o^2 - R_r^2} \right) \left[\frac{(R_o^2 - R_r^2)}{2} - R_r^2 \ln \left(\frac{R_o}{R_r} \right) \right] - R_r^2 \Omega \ln \left(\frac{R_o}{R_r} \right) \quad (3-57)$$

Os termos C_1 e C_2 são os mesmos da sub-seção 3.1.2.

Para resolver a equação 3-56, assim como foi feito para as equações 3-22 e 3-32, impõe-se as seguintes condições de contorno para a pressão:

- em z : valores de pressão na entrada e na saída da bomba;
- em θ : condição de periodicidade.

O termo da derivada de R_o em relação a θ é obtido das expressões apresentadas na sub-seção 3.2.1. Para cada região da seção transversal do estator tem-se uma expressão de $\partial R_o / \partial \theta$, apresentadas a seguir.

- Região I:

$$\frac{\partial R_o}{\partial \theta} = -2E - d_{CSR} \sin(\theta + \Theta_s) - \frac{(2E - d_{CSR})^2 2 \sin(\theta + \Theta_s) \cos(\theta + \Theta_s)}{\sqrt{R_s^2 - (2E - d_{CSR})^2 \sin^2(\theta + \Theta_s)}}$$

- Região II:

$$\frac{\partial R_o}{\partial \theta} = 2E + d_{CSR} \sin(\theta + \Theta_s) - \frac{(2E + d_{CSR})^2 2 \sin(\theta + \Theta_s) \cos(\theta + \Theta_s)}{\sqrt{R_s^2 - (2E + d_{CSR})^2 \sin^2(\theta + \Theta_s)}}$$

- Região III:

$$\frac{\partial R_o}{\partial \theta} = -R_s \frac{\cos(\theta + \Theta_s)}{\sin^2(\theta + \Theta_s)}$$

- Região IV:

$$\frac{\partial R_o}{\partial \theta} = +R_s \frac{\cos(\theta + \Theta_s)}{\sin^2(\theta + \Theta_s)}$$

Finalmente, da mesma maneira indicada para as equações 3-22 e 3-32, resolve-se numericamente a equação de Poisson 3-56 para obter o campo de pressão no interior da BCP. Determinado o campo de pressão, determina-se o campo de velocidade a partir das equações 3-11 e 3-53.