

7

Método de Programação Multiobjetivo Aplicado a um Exemplo Numérico

A metodologia proposta será ilustrada primeiramente pelo exemplo que está representado na rede mostrada na figura 7.1. Esta rede é conformada por um conjunto de pares $O-D$, em que, O representa a origem, ou seja, armazenagem de combustíveis e D representa o destino, ou seja, o ponto de demanda. Para ilustrar tal experimento considera-se um fluxo de combustível, $T = 2$ carregamentos entre o par $O-D$ sobre a rede da figura 7.1. Os atributos dos arcos apresentam-se na tabela 7.1. Além disso, seja $\nu^* = 4.56E-03$ e $\eta^* = 429.81$. Os valores definidos como risco ($\rho_{z_k}(a)$) estão dispostos na tabela 7.2.

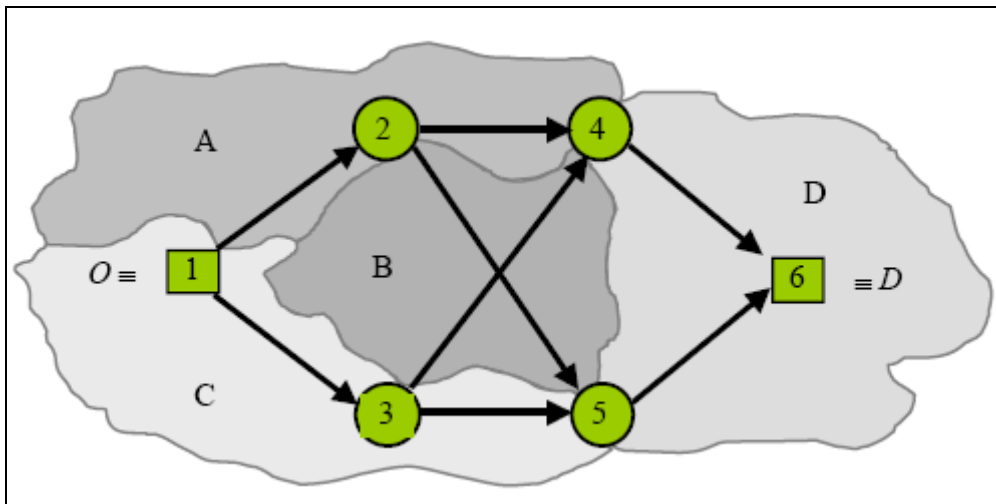


Figura 7.1: Rede de Transporte para o exemplo numérico.

Tabela 7.1: Atributos para os Arcos da Rede

Zona (z)	Arco (a)	L_a (Km)	d_a (Hab/Km ²)	p_a	C_a	B_z	ϕ (Hab. Exp.)
A	1-2	0,5215	3.677	1,86E-04	3,00E+05	100	6000
A	2-4	0,5616	3.677	1,21E-04	1,16E+04		
B	2-5	0,1203	4.713	2,08E-06	8,00E+06	0	6000
B	3-4	0,6820	4.713	8,80E-05	1,21E+05		
C	1-3	0,3610	835	9,42E-06	1,24E+04	0	6000
C	3-5	0,4610	835	9,42E-04	1,24E+05		
D	4-6	0,4613	2.324	2,77E-04	7,61E+04	100	6000
D	5-6	0,0602	2.324	6,42E-06	4,82E+04		

Fonte: Elaboração própria

Tabela 7.2: Valores do parâmetro definido como *Risco*.

$RISCO (\rho_{z_k}(a))$				
Arcos	Zonas			
	A	B	C	D
1-2	1002,613953	0	0	0
1-3	0	0	1350,093023	0
2-4	1401,004651	0	0	0
2-5	0	1389,916279	0	0
3-4	0	2390,344186	0	0
3-5	0	0	930,055814	0
4-6	0	0	0	2170,944186
5-6	0	0	0	898,0186047

Fonte: Elaboração própria

O primeiro passo a ser executado para resolver o modelo multiobjetivo proposto é a resolução do modelo de roteirização proposto por Sherali *et al.*, o qual reduz CE_R ao mínimo.

7.1

Resolução do Modelo de Sherali *et al.*

7.1.1

Calibração dos Parâmetros ν e η

O objetivo principal do modelo proposto é reduzir ao mínimo a esperança condicional de um acidente no traslado de combustíveis, sujeito à restrição de que

o valor esperado da consequência seja menor ou igual a um valor específico ν , e que a probabilidade de um acidente sobre uma rota selecionada seja menor que um valor específico η . No entanto, dado que as probabilidades de acidente e as consequências associadas dependem do tipo da carga a ser transportada, nesse caso, combustíveis, é necessário estabelecer cotas máximas para esses valores. Portanto, seja ν a máxima consequência esperada ao transportar combustível entre um par $O-D$, e η a máxima probabilidade de acidente aceita na rota utilizada ao transportar combustível entre o par $O-D$. Uma forma de estimar esses parâmetros é definir:

$$\nu = (1 + q_1)\nu^*$$

para vários valores arbitrários de $q_1 \geq 0$, onde $\nu^* = \min\{\hat{E}_R : R \in G\}$ é o valor ótimo do problema do caminho de mínima consequência esperada.

Da mesma forma,

$$\eta = (1 + q_2)\eta^*$$

para valores desejados de $q_2 \geq 0$, com $\eta^* = \min\{P(R) : R \in G\}$ sendo o valor ótimo para o problema do caminho de mínima probabilidade de acidente.

Para obter os parâmetros ν^* e η^* , foi aplicado o algoritmo de DIJKSTRA, usando como custo a probabilidade e a consequência, o qual identifica a rota de mínima distância percorrida entre um nó preestabelecido e todos os demais nós da rede. Neste problema foi considerado um total de 8 arcos e 6 nós. Para estimar os valores de ν e η nas equações mostradas, se assumem ν^* e η^* fixos e iguais aos mínimos valores encontrados entre todas as rotas que partem desde a origem até o destino especificado. Desta forma se obtêm os resultados mostrados na tabela 7.3.

Tabela 7.3: Valores Máximos para a Probabilidade Total de Acidente e Consequência Total Esperada.

Parâmetros	
ν^*	η^*
4.56E-03	429.81

Fonte: Elaboração própria

7.1.2

Solução para o Modelo de Sherali *et al.*

Ao resolver o modelo que minimiza a Esperança Condicional da Consequência (CE_R), o fluxo de MP foi distribuído somente por uma rota (R). Esta rota ótima é 1-3-4-6, como mostra a figura 8.2. Para essa configuração, os valores da função objetivo, da distância percorrida, da consequência e da probabilidade são os seguintes:

$$CE_{R\{1-3-4-6\}} = 85050.2; \quad L_{R\{1-3-4-6\}} = 1.5044 \text{ km};$$

$$C_{R\{1-3-4-6\}} = 20.8E+04; \quad p_{R\{1-3-4-6\}} = 11.694E-04.$$

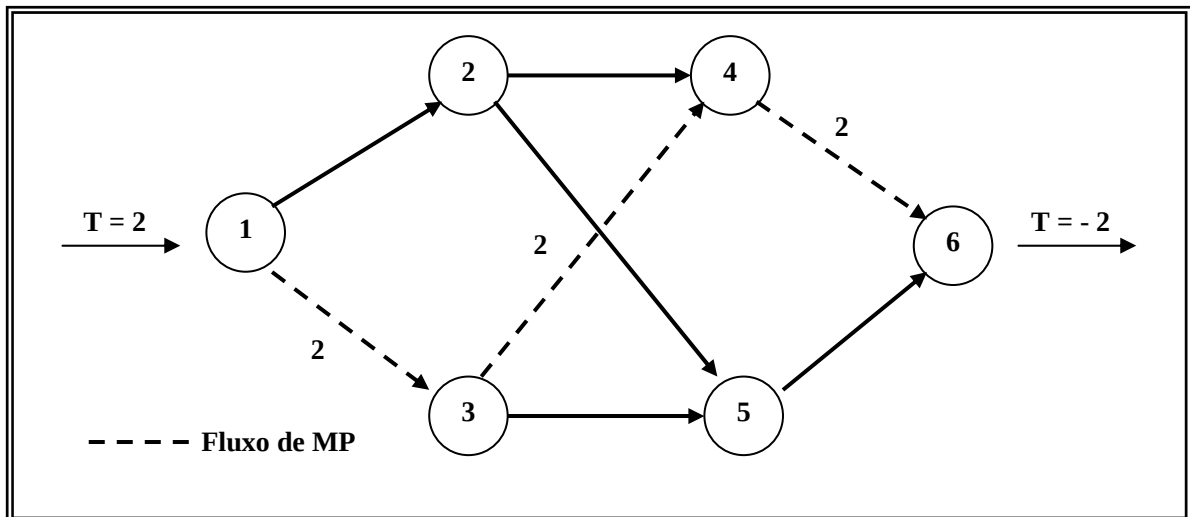


Figura 7.2: Distribuição de Fluxo ao resolver o Modelo de Sherali *et al.*

A etapa que segue é definida como a estimação das preferências a ser designada a cada objetivo do modelo.

7.2

Estimação das preferências

Tal como se discutiu anteriormente, no problema proposto para obter a melhor solução dentro do conjunto eficiente, surge a necessidade de determinar o grau de importância ou preferência de cada um dos objetivos no processo de otimização. Seguindo os conceitos mostrados no capítulo 6, o grau de importância

de cada objetivo será determinado segundo a distância de CE_R , que representa a consequência esperada dado que um acidente catastrófico tenha ocorrido (modelo de Sherali *et al.*). Isto se resolve da forma apresentada no próximo parágrafo.

Em primeiro lugar, recorre-se aos resultados obtidos para o modelo de roteirização no qual se reduzia CE_R ao mínimo. Então, como mostrado anteriormente, são considerados uma origem, um destino e um tipo de material perigoso, no caso, combustível. Como resultado desse processo se obteve, para o par $O-D$, a rota que minimizava CE_R . Para a solução encontrada, se calculou a consequência (C_R^*), a probabilidade $P(R^*)$ e a distância $L(R^*)$ total associada à rota. Adicionalmente, foi calculado a rota R que minimiza a consequência total decorrente de um acidente catastrófico (C_R), a probabilidade total de ocorra este tipo de acidente $P(R)$, e a distância total percorrida $L(R)$, de forma independente dos valores obtidos ao minimizar CE_R . Estes resultados foram conseguidos ao se aplicar o algoritmo de Dijkstra sobre a rede considerada, utilizando como custo a consequência, a probabilidade e distância percorrida, respectivamente.

Contando com os dados obtidos após a aplicação do algoritmo de Dijkstra, foram comparados os valores de C_R , $P(R)$ e $L(R)$ com os valores análogos obtidos para a rota R^* encontrada ao resolver o modelo de Sherali *et al.*, ou seja, minimizar CE_R . Desta forma foi possível determinar em quanto discrepavam ambas soluções. Como resultado dessa metodologia foi comprovado que a longitude da rota encontrada $L(R^*)$ ao minimizar CE_R é 2,03 vezes maior do que a ótima encontrada através do algoritmo de Dijkstra. Da mesma forma foi encontrado que a consequência e a probabilidade são 1,15 e 5,9 vezes maiores do que a da rota encontrada.

Já que a distância total percorrida (L_{ij}) entre um par (i,j) é a variável principal que determina os custos de transporte, considera-se que a rota que minimiza estes custos de transporte é 2,03 vezes maior que aquela que minimiza CE_R . Uma análise similar pode ser feita entre a rota que minimiza a probabilidade (p_a) de ocorrer um acidente e aquela que minimiza CE_R e entre a consequência

total de uma rota com a consequência esperada ($p_a C_a$). Agora, assume-se que a consequência esperada tem a mesma importância que a esperança condicional da consequência. Dessa maneira é possível estabelecer os seguintes ponderadores (W_i) que reflitam o grau de importância de cada objetivo, os quais estão mostrados na tabela 7.4.

Tabela 7.4. Grau de importância de cada objetivo.

Pesos	Valor
W_1	1,15
W_2	5,9
W_3	1,15
W_4	2,03
Total	10,23

Fonte: elaboração própria

Onde W_1 , W_2 , W_3 e W_4 representam as preferências associadas aos objetivos de minimizar a esperança condicional da consequência, a probabilidade de ocorrer um acidente, a consequência esperada e a distância percorrida, respectivamente. Para normalizar estes pesos, divide-se cada valor pela soma total deles. Desta forma é estabelecido porcentagens de importância, o que permite ter uma melhor compreensão do seu significado. Veja tabela 7.5.

Tabela 7.5: Grau de importância normalizado de cada objetivo.

Pesos	Valor Normalizado
W_1	0,12
W_2	0,57
W_3	0,12
W_4	0,19
Total	1,00

Fonte: elaboração própria

O passo a seguir refere-se à estimação dos valores associados a cada um dos atributos definidos anteriormente, por meio de uma metodologia adequada.

7.3

Determinação dos Atributos do Modelo Multiobjetivo

Os problemas de otimização que seguem permitem obter o valor ideal ou ancora para todos os objetivos (atributos) do modelo multiobjetivo proposto, assim como o valor anti-ideal. O primeiro problema permite encontrar o valor ideal ou ancora da esperança condicional da consequência e valores anti-ideais para a probabilidade de ocorrer um acidente, para a consequência esperada e para a distância percorrida.

$$1^{\circ}) \text{ Min } f_1 = \frac{\sum_{a \in A} p_a C_a f_a}{\sum_{a \in A} p_a f_a}$$

Sujeito a :

$$\sum_{a \in F(i)} f_a - \sum_{a \in E(i)} f_a = \begin{cases} T_{OD}, & \text{se } i \equiv O \\ -T_{OD}, & \text{se } i \equiv D \\ 0, & \text{se não} \end{cases} \quad \forall i \in N$$

$$\sum_{a \in Z_k} \rho_{Z_k}(a) + B_k \leq \phi \quad \forall k = 1, \dots, K$$

$$f_2 = \sum_{a \in A} p_a f_a$$

$$f_3 = \sum_{a \in A} p_a C_a f_a$$

$$f_4 = \sum_{a \in A} f_a L_a$$

$$f \equiv (f_a : a \in A) \in F$$

$$f_a \geq 0 \quad \forall a \in A$$

Os valores obtidos com resolução do modelo acima seguem abaixo na tabela 7.6.

Tabela 7.6: Ponto Ideal (f_1^*) para a Esperança Condicional da Consequência e Anti-ideais para os outros atributos.

	Atributos (f_i)			
	1	2	3	4
f_i^*	85050.23	-	-	-
f_{*i}		0.7488400E-03	63.68902	3.008721

Fonte:elaboração própria

No segundo, encontra-se o valor ideal da probabilidade de ocorrer um acidente e valores anti-ideais para esperança condicional da consequência, para a consequência esperada e para a distância percorrida.

$$2^{\circ}) \text{ Min } f_2 = \sum_{a \in A} p_a f_a$$

Sujeito a :

$$\sum_{a \in F(i)} f_a - \sum_{a \in E(i)} f_a = \begin{cases} T_{OD}, & \text{se } i \equiv O \\ -T_{OD}, & \text{se } i \equiv D \\ 0, & \text{se não} \end{cases} \quad \forall i \in N$$

$$\sum_{a \in Z_k} \rho_{Z_k}(a) + B_k \leq \phi \quad \forall k = 1, \dots, K$$

$$f_1 = \frac{\sum_{a \in A} p_a C_a f_a}{\sum_{a \in A} p_a f_a}$$

$$f_3 = \sum_{a \in A} p_a C_a f_a$$

$$f_4 = \sum_{a \in A} f_a L_a$$

$$f \equiv (f_a : a \in A) \in F$$

$$f_a \geq 0 \quad \forall a \in A$$

Os valores obtidos com resolução do modelo acima seguem abaixo na tabela 7.7.

Tabela 7.7: Ponto Ideal (f_2^*) para a Probabilidade de ocorrer um acidente e Anti-ideais para os outros atributos.

	Atributos (f_i)			
	1	2	3	4
f_i^*	-	0.3890000E-03	-	-
f_{*i}	374033.1	-	145.4989	1.404070

Fonte: elaboração própria

No terceiro, encontra-se o valor ideal da consequência esperada e valores anti-ideais para esperança condicional da consequência, para a probabilidade de ocorrer um acidente para a distância percorrida.

$$3^{\circ}) \text{ Min } f_3 = \sum_{a \in A} p_a C_a f_a$$

Sujeito a :

$$\sum_{a \in F(i)} f_a - \sum_{a \in E(i)} f_a = \begin{cases} T_{OD}, & \text{se } i \equiv O \\ -T_{OD}, & \text{se } i \equiv D \\ 0, & \text{se não} \end{cases} \quad \forall i \in N$$

$$\sum_{a \in Z_k} \rho_{Z_k}(a) + B_k \leq \phi \quad \forall k = 1, \dots, K$$

$$f_1 = \frac{\sum_{a \in A} p_a C_a f_a}{\sum_{a \in A} p_a f_a}$$

$$f_2 = \sum_{a \in A} p_a f_a$$

$$f_4 = \sum_{a \in A} f_a L_a$$

$$f \equiv (f_a : a \in A) \in F$$

$$f_a \geq 0 \quad \forall a \in A$$

Os valores obtidos com resolução do modelo acima seguem abaixo na tabela 7.8.

Tabela 7.8: Ponto Ideal (f_3^*) para a Consequência Esperada e Anti-ideais para os outros atributos.

	Atributos (f_i)			
	1	2	3	4
f_i^*	-	-	63.68902	-
f_{*i}	85050.23	0.7488400E-03	-	3.008721

Fonte: elaboração própria.

E finalmente, o quarto problema permite obter o valor ideal da distância percorrida e valores anti-ideais para a esperança condicional da consequência, para a probabilidade de ocorrer um acidente e para a consequência esperada.

$$4^{\circ}) \text{ Min } f_4 = \sum_{a \in A} f_a L_a$$

Sujeito a :

$$\sum_{a \in F(i)} f_a - \sum_{a \in E(i)} f_a = \begin{cases} T_{OD}, & \text{se } i \equiv O \\ -T_{OD}, & \text{se } i \equiv D \\ 0, & \text{se não} \end{cases} \quad \forall i \in N$$

$$\sum_{a \in Z_k} \rho_{Z_k}(a) + B_k \leq \phi \quad \forall k = 1, \dots, K$$

$$f_1 = \frac{\sum_{a \in A} p_a C_a f_a}{\sum_{a \in A} p_a f_a}$$

$$f_2 = \sum_{a \in A} p_a f_a$$

$$f_3 = \sum_{a \in A} p_a C_a f_a$$

$$f \equiv (f_a : a \in A) \in F$$

$$f_a \geq 0 \quad \forall a \in A$$

Os valores obtidos com resolução do modelo acima seguem abaixo na tabela 7.9.

Tabela 7.9: Ponto Ideal (f_4^*) para a Distância Percorrida e Anti-ideais para os outros atributos.

	Atributos (f_i)			
	1	2	3	4
f_i^*	-	-	-	1.404070
f_{*i}	374033.1	0.3890000E-03	145.4989	-

Fonte: elaboração própria.

Dessa forma, tem-se como resultado final na tabela 7.10 os valores ideais e anti-ideais para cada atributo do modelo multiobjetivo.

Tabela 7.10: Valores Ideais e Anti-Ideais para todos os atributos.

	Atributos (f_i)			
	1	2	3	4
f_i^*	85050.23	0.3890000E-03	63.68902	1.404070
f_{*i}	374033.1	0.7488400E-03	145.4989	3.008721

Fonte: elaboração própria

7.4

Determinação do Conjunto Eficiente ou Pareto Ótimo

Tal como foi mencionado ao princípio deste capítulo, ao considerar múltiplos critérios nas decisões, nem sempre é possível identificar uma solução que possua desempenho melhor que outras, com respeito a cada critério, centrando-se em identificar um conjunto de soluções “não dominadas” pareto ótimas, de modo que o intercâmbio entre os diferentes objetivos possa ser especificamente representado.

Para atingir este propósito foi proposto o método das ponderações (expressão 6.11), na qual para cada vetor de pesos α é obtido um elemento do conjunto eficiente, normalizando previamente cada critério pela sua distância (a qual se determina mediante a diferença entre o valor do ponto anti-ideal e o ideal). Para determinar estes ponderadores foi considerado que os parâmetros Esperança Condicional da Consequência e Consequência Esperada são iguais a 12% e que a porcentagem restante divide-se em 57% para a Probabilidade de ocorrer um acidente e 19% para a distância percorrida. Estas porcentagens foram estimadas no item 7.2 (tabela 7.5) do presente capítulo. Os pesos utilizados para gerar este conjunto de soluções factíveis estão mostrados na tabela 7.11, os quais foram especificados aleatoriamente buscando englobar a maior gama de possibilidades.

Tabela 7.11: Pesos para o Conjunto Eficiente mediante o Método das Ponderações

Pesos	Casos									
	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8	Y9	Y10
α_1	1,00	0,00	0,00	0,00	0,12	0,20	0,30	0,40	0,50	0,00
α_2	0,00	1,00	0,00	0,00	0,57	0,35	0,23	0,12	0,00	0,58
α_3	0,00	0,00	1,00	0,00	0,12	0,20	0,30	0,40	0,50	0,00
α_4	0,00	0,00	0,00	1,00	0,19	0,25	0,17	0,08	0,00	0,42

Fonte: Elaboração própria

Utilizando os pesos expostos, foi aplicado o método das ponderações aos dados correspondentes a cada caso considerado. Os resultados obtidos se encontram na tabela 7.12 que segue.

Tabela 7.12: Geração do Conjunto Eficiente

Casos	CE	P	C	L	Rota
Y1	85050.23	0.7488400E-03	63.68902	3.008721	1-3-4-6
Y2	374033.1	0.3890000E-03	145.4989	1.404070	1-2-5-6
Y3	85050.23	0.7488400E-03	63.68902	3.008721	1-3-4-6
Y4	374033.1	0.3890000E-03	145.4989	1.404070	1-2-5-6
Y5	374033.1	0.3890000E-03	145.4989	1.404070	1-2-5-6
Y6	374033.1	0.3890000E-03	145.4989	1.404070	1-2-5-6
Y7	85050.23	0.7488400E-03	63.68902	3.008721	1-3-4-6
Y8	85050.23	0.7488400E-03	63.68902	3.008721	1-3-4-6
Y9	85050.23	0.7488400E-03	63.68902	3.008721	1-3-4-6
Y10	374033.1	0.3890000E-03	145.4989	1.404070	1-2-5-6

Fonte: Elaboração própria

Para cada um destes casos, o modelo obteve como resultado uma rota ótima para a distribuição do material perigoso desde a origem ao destino especificado. Pode-se observar que dentro do conjunto factível encontrado há uma grande quantidade de alternativas que se repetem. Portanto, é necessário realizar uma análise de dominância entre as alternativas. Para o caso das soluções que dão como resultado a rota 1-3-4-6, os valores obtidos para os atributos não diferem. O mesmo acontece para o caso das soluções que dão como resultado a rota 1-2-5-6.

Desta forma, o conjunto de soluções eficientes fica representado por duas alternativas, tal como mostra a tabela 8.13, representadas cada uma mediante uma letra que as distingue.

Tabela 7.13: Conjunto Eficiente

Casos	Alternativas	CE	P	C	L	Rota
Y1-Y3-Y7-Y8-Y9	A	85050.23	0.7488400E-03	63.68902	3.008721	1-3-4-6
Y2-Y4-Y5-Y6-Y10	B	374033.1	0.3890000E-03	145.4989	1.404070	1-2-5-6
Mínimo		85050.23	0.3890000E-03	63.68902	1.404070	

Fonte: Elaboração própria

7.5

Determinação da Alternativa Ótima

Até o momento só foi concluído o primeiro passo do problema decisional, no qual é considerada informação técnica sem incluir nenhum tipo de preferências. Portanto, deve-se prosseguir com o processo estabelecendo pesos que representem a importância que será dada a cada atributo. Estas preferências foram discutidas e analisadas no item 7.4 do presente capítulo. Ao introduzir estes

pesos no modelo de programação compromisso, no qual assume-se que a melhor solução dentro do conjunto eficiente vem dada pela mais próxima do ponto ideal. Assim, avaliando-se o programa de otimização paramétrico normalizado (7.17) para $\pi = 1$ e $\pi = 2$ e depois o modelo (6.19) para $\pi = \infty$ para cada alternativa encontrada, conseguindo os valores que se encontram na tabela 8.14.

Tabela 7.14: Avaliação das Alternativas do Conjunto Eficiente Mediante o Método de Programação Compromisso.

Alternativa	Conjunto	L_1	L_2	L_∞
A	1-3-4-6	0.2000004	0.1442223	0.1200000
B	1-2-5-6 1-3-4-6	0.2400000	0.1697056	0.2800000

Fonte: Elaboração própria

A alternativa B mostrada na tabela 7.14 teve sua solução ótima dividindo o fluxo de MP por dois caminhos. Estes resultados implicam na ordenação das alternativas na Tabela 7.15. É interessante destacar que, para cada métrica, a melhor solução corresponde à alternativa A, que representa a rota 1-3-4-6. Portanto, pode-se dizer que a solução encontrada corresponde a uma situação na qual minimiza-se a soma ponderada dos logros de cada objetivo num ponto de máxima eficiência que por sua vez representa uma lógica de equilíbrio entre os objetivos.

Tabela 7.15: Ordem de Alternativas para Diferentes Métricas

L_1	A	B
L_2	A	B
L_∞	A	B

Fonte: Elaboração própria

Dessa forma, no exemplo desenvolvido, a solução ótima para o modelo multiobjetivo proposto é distribuir material perigoso pela rota 1-3-4-6. Este resultado foi encontrado mediante a consideração dos graus de importância (preferências) dados a cada objetivo. A respeito das preferências, as opções do conjunto eficiente que têm como solução a rota 1-3-4-6 consideram que a esperança condicional da consequência (CE) e a consequência esperada (C) possuem os dois maiores níveis de importância. Comparando os valores de CE e C para as duas alternativas em questão, tem-se que estes são maiores para o conjunto de rotas 1-3-4-6 e 1-2-5-6. Assim, a alternativa ótima encontrada

confirma que a metodologia desenvolvida cumpre com os objetivos propostos ao minimizar, CE , p_a , C_a e L_a para a rede considerada.

7.6 Experiência Computacional

Apesar do problema apresentado neste trabalho não ter sido implementado em uma rede de transporte complexa, foi utilizado o programa computacional LINGO 6.1 para solucionar os modelos matemáticos e obter a solução final. LINGO é uma ferramenta que utiliza técnicas de otimização linear e não linear para resolver problemas de grande tamanho.

Para obter a solução da rota mínima através do Algoritmo de Dijkstra foi utilizada a linguagem de programação MATLAB.