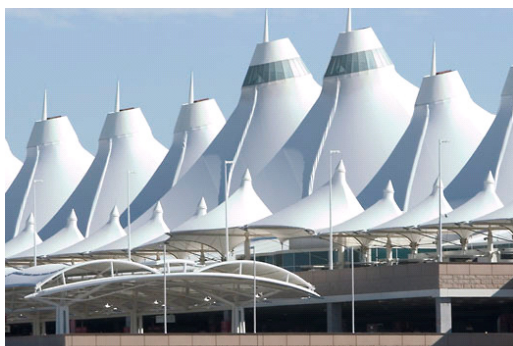


1

Introdução

Membranas têm sido estudadas e utilizadas em diferentes áreas do conhecimento, tais como, biomecânica, equipamentos aeroespaciais e estruturas arquitetônicas e civis, tendo como exemplo de aplicações: equipamentos médicos (Teixeira *et al*, 2001), refletores óticos e radares espaciais (Sewall *et al*, 1983), pequenas barragens e containeres para armazenamento temporário de fluidos e coberturas de grandes vãos (Jenkins, 1996), entre outras. Membranas também são encontradas em todos os organismos vivos, sendo o seu estudo uma área de destaque nas pesquisas em biologia e áreas afins (Fung, 1990; Humphrey, 2002). Nos últimos anos têm-se também observado o uso de membranas, em particular membranas construídas com novos materiais, na construção de sensores e atuadores (Shin *et al*, 2005; Wissler e Mazza, 2007). Alguns destes exemplos de aplicação podem ser observados na Figura 1.1.



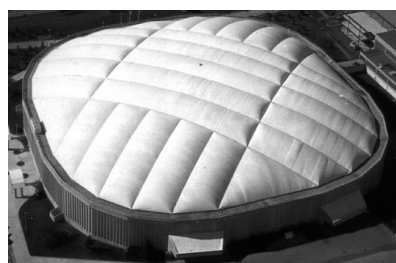
(a) Coberturas de grandes vãos



(b) Equipamentos espaciais



(c) Construções temporárias



(d) Estrutura Inflável

Figura 1.1 – Exemplo de aplicações de membranas.

Nas diversas áreas de aplicação o termo membrana pode ter diferentes significados. Enfatizando a sua aplicação na área de estruturas, o termo membrana significa uma superfície muito fina com rigidez a flexão nula ou desprezível e que não é capaz de resistir a esforços de compressão.

Na mecânica das estruturas, a compreensão do comportamento de membranas passa pelo estudo de seu comportamento linear e não linear, incluindo a análise estática e dinâmica. Em muitas aplicações as membranas são compostas de materiais elastoméricos com características hiperelásticas, sendo sua modelagem uma importante área de pesquisas na área de mecânica das estruturas.

Neste tipo de problema, as não linearidades geométricas e do material possuem um papel importante e, usualmente, grandes deformações devem ser levadas em consideração. A análise dessas membranas sob grandes deformações tem como base a elasticidade não linear, sendo que, comumente, sua solução clássica tem como base o trabalho pioneiro de Green e Adkins (1960).

Algumas pesquisas têm sido desenvolvidas neste campo, muitas delas relacionadas com o equilíbrio e a estabilidade de membranas de diversas geometrias submetidas a diferentes tipos de carregamento (Ratner, 1982; Khayat e Derdouri, 1994; Jiang e Haddow, 1995). Na maioria destes estudos são empregados métodos numéricos, contudo há também alguns estudos com soluções analíticas para carregamentos e geometrias bastante simples.

Pamplona e Bevilacqua (1992) estudam o problema de deformações finitas de uma membrana circular anular submetida a carregamentos de força axial e momentos de torção. As equações de equilíbrio e condições de contorno são obtidas usando o princípio da energia potencial estacionária e resolvidas numericamente, obtendo-se o ângulo de torção, o deslocamento e a deformação radial em cada ponto da membrana. Verifica-se que o comportamento da membrana, considerando as densidades de energia de deformação neo-Hookeana e Mooney-Rivlin, é similar quando a membrana está submetida a pequenas cargas axiais.

Haughton (2001), após uma breve explanação sobre as teorias bi e tri-dimensionais utilizadas no estudo de membranas elásticas, exemplifica o uso dessas teorias através de um estudo da inflação de uma membrana cilíndrica longa de material incompressível descrito pela função energia de deformação de Varga. O cilindro é inflado com uma pressão e ajustado nas extremidades para assegurar

que o seu comprimento longitudinal continue o mesmo. Verifica-se que, para esse material, o caminho pós-crítico inicial é instável e observa-se a formação súbita de grandes bulbos na membrana cilíndrica inflada quando se atinge a carga crítica. Além disso, o autor expõe alguns conceitos sobre o enrugamento de membranas, que é uma importante característica do comportamento das membranas hiperelásticas.

Somando-se às contribuições teóricas e numéricas, existem alguns estudos experimentais que representam um papel importante na solução de problemas de equilíbrio e estabilidade de membranas. Segundo Jenkins (1991), estes estudos investigam a caracterização de materiais e carregamentos, verificam modelos, validam e determinam propriedades estruturais, tais como parâmetros modais e condições de contorno.

Pamplona *et al* (2001) realizam uma análise experimental das deformações de uma membrana cilíndrica com fluido interno. Nesse trabalho é estudada a influência de diferentes geometrias, forças axiais iniciais e do volume de fluido no comportamento da membrana. A membrana usada nesse experimento é composta por uma borracha elástica, homogênea, isotrópica e é modelada como um material neo-Hookeano incompressível. Verifica-se que membranas cilíndricas sob tração, ao serem preenchidas com fluido, atingem um volume crítico, ou altura de líquido crítica. Neste momento a configuração axissimétrica atinge um ponto limite e, após atingir este ponto, a altura de líquido permanece constante ou decresce vagarosamente com aumento do volume de fluido. Continuando a acrescentar líquido, chega-se a um ponto em que a membrana atinge um outro volume crítico onde perde sua forma axissimétrica.

Posteriormente, Pamplona *et al* (2006) estudam o comportamento não linear e possíveis instabilidades de membranas hiperelásticas submetidas à tração axial e pressão interna uniforme. As membranas utilizadas na análise são compostas por elastômeros isotrópicos e homogêneos, que são modelados como um material neo-Hookeano incompressível ou como um material do tipo Mooney-Rivlin. Os resultados experimentais são favoravelmente comparados com resultados obtidos numericamente, utilizando o programa comercial de elementos finitos Abaqus®. Observa-se que, quando a carga crítica é atingida, um bulbo forma-se subitamente e a pressão interna decresce repentinamente. Como continuação desta pesquisa, Gonçalves *et al* (2008) estudam o comportamento de cascas cilíndricas

hiperelásticas, sob tração radial e pressão interna uniforme, submetidas a grandes deformações. O estudo da influência de imperfeições geométricas nesta classe de problemas é encontrado em Lopes *et al* (2007).

Estes estudos mostram claramente que membranas e cascas de material hiperelástico quando submetidas a pressões internas podem apresentar certos fenômenos de instabilidade bastante peculiares.

Como mencionado anteriormente, poucos são os problemas envolvendo grandes deformações que podem ser resolvidos de forma analítica (Green e Adkins, 1960). Na maioria dos casos é necessário o uso de métodos numéricos para se obter resultados confiáveis sobre o comportamento de membranas. Mas o uso de métodos numéricos requer uma formulação precisa das não linearidades e da lei constitutiva do material. Em virtude destas dificuldades vários autores (Treloar, 1976; Arruda e Boyce, 1993; Beatty, 2001; Dorfmann e Odgen, 2004) estudam experimentalmente o comportamento de membranas para escolher leis constitutivas adequadas ao comportamento do material utilizado. Tendo por base uma lei constitutiva, podem-se calibrar os programas computacionais e identificar certos fenômenos não lineares característicos de certa classe de problemas.

Seguindo essa linha de estudos, Selvadurai (2006) analisa os resultados experimentais de uma membrana hiperelástica e descreve seu comportamento utilizando as relações constitutivas de Mooney-Rivlin, neo-Hookeana, Blatz-Ko, Yeoh e Ogden. Esses modelos são utilizados posteriormente no estudo numérico dos deslocamentos transversais de membranas hiperelásticas circulares. Além disso, é realizado um trabalho experimental para determinar as respostas assimétricas e axissimétricas da membrana circular, fixa ao longo da extremidade e submetida a uma indentação transversal por um identor esférico rígido. A seguir, o autor compara os resultados experimentais com os resultados obtidos através de um modelo computacional de elementos finitos usando o programa comercial Abaqus®. Observa-se também que a seleção da função energia de deformação, para o tratamento numérico ou analítico do problema de materiais hiperelásticos, deve levar em consideração a magnitude das deformações que a estrutura pode sofrer.

Dessa maneira, diversos autores estudam o comportamento estático de membranas utilizando diferentes modelos constitutivos, geometrias e carregamentos. Contudo, um número menor de autores tem estudado o

comportamento dinâmico de membranas hiperelásticas (Roussos e Mason, 2005; Akyüz e Ertepinar, 1999 e Beatty, 2003). Estes estudos cobrem várias configurações geométricas e de contorno, diversos modelos constitutivos e métodos numéricos de análise.

Um estudo do comportamento dinâmico de membranas é realizado por Jenkins e Korde (2006). Os autores estudam experimentalmente as vibrações de uma membrana de poliéster. Para isso, a membrana é excitada harmonicamente e as frequências e os modos de vibração são medidos. Particularmente em sua análise, os autores verificam que, quando a região de excitação é muito menor que o diâmetro da membrana, as oscilações tornam-se mais localizadas ao longo da região de excitação e a frequência de excitação aumenta para uma dada tensão. Observa-se também que as oscilações ressonantes tendem a tornar-se extremamente localizadas com o aumento da frequência para uma dada tensão e que este efeito é amplificado com a redução da tensão. Essa tendência de oscilações localizadas aparece devido à relação rigidez-inércia das membranas.

Já Mockensturm e Goulbourne (2006) estudam o comportamento dinâmico de uma membrana esférica sujeita a um campo elétrico. Os autores utilizam um modelo que incorpora as pressões mecânica e eletrostática, bem como os efeitos inerciais que são importantes quando a membrana transita de uma configuração de equilíbrio para outra. Verifica-se que as bifurcações nó-sela que ocorrem durante a inflação e deflação de membranas hiperelásticas podem ser controladas com a aplicação de pressão eletrostática e que as propriedades mecânicas e elétricas de alguns elastômeros dielétricos podem ser usadas no controle das pressões críticas de membranas sujeitas a campos elétricos.

Os estudos anteriormente apresentados são para membranas de inércia constante. Ao se procurar na literatura estudos sobre o comportamento dinâmico de membranas com variação de inércia encontram-se estudos analíticos e numéricos das vibrações lineares de membranas de material elástico linear com densidade variável ao longo da direção radial, tais como Laura *et al* (1998), Gutierrez *et al* (1998) e Buchanan (2005).

Membranas anulares e circulares com variação da densidade de forma polinomial ao longo da direção radial são estudadas por Jabareen e Eisenberger (2001). Os autores obtêm soluções exatas para as frequências naturais e modos de vibração, axissimétricos e anti-simétricos. O método de Frobenius é aplicado para

a solução da equação linear de movimento na direção transversal da membrana (Kreyszig, 2006).

Também, utilizando soluções em série de potências através do método de Frobenius, Willatzen (2002) apresenta uma aproximação semi-analítica para o cálculo das frequências naturais e modos de vibração axissimétricos de membranas anulares e circulares com densidade variável ao longo da direção radial. O autor considera diferentes formas de distribuição da densidade, incluindo a distribuição de forma polinomial.

Bala Subrahmanyam e Sujith (2001) determinam uma solução analítica para as vibrações axissimétricas de membranas circulares e anulares com densidade variando continuamente ao longo da direção radial. A solução é obtida através da transformação de variáveis da equação de movimento linear em uma equação diferencial com solução analítica conhecida. Assim, para um caso específico da variação da densidade, a solução da equação diferencial é obtida em termos das funções hipergeométricas confluentes de Kummer e para outro caso de variação da densidade, em termo das funções Bessel. Verifica-se que as frequências naturais aumentam com o aumento do raio do orifício da membrana anular e diminuem com o aumento da variação da densidade na direção radial.

Na análise de vibrações de membranas, uma outra classe de problemas que tem merecido a atenção de pesquisadores é quando se acopla à membrana corpos rígidos. Tezduyar *et al* (1987) analisa as deformações transversais estáticas provocadas por um disco rígido localizado no centro de uma membrana circular, sendo o material da membrana considerado do tipo Mooney-Rivlin, isotrópico e incompressível.

Posteriormente, o comportamento dinâmico de uma membrana anular acoplada a um disco rígido é analisado por Wang (2003) que estuda analiticamente as vibrações lineares. O autor considera que a tensão provocada pela inclusão rígida na membrana é o bastante para provocar somente pequenas deformações estáticas e que esse centro rígido atua como uma massa axissimétrica, podendo ter a geometria de cilindro, esfera ou disco. Wang obtém as frequências e os modos de vibração para a membrana e observa que, quando o raio do centro rígido tende a zero, a solução converge para a de uma membrana circular.

Uma análise experimental da vibração do sistema membrana-centro rígido é realizada por Pinto (2006). As frequências naturais do sistema são calculadas através de um procedimento experimental utilizando um microfone com capacitor excitado por atuadores eletrostáticos no vácuo. As frequências obtidas experimentalmente são comparadas favoravelmente com as frequências obtidas através de um modelo analítico.

Uma revisão detalhada da literatura do comportamento estático e dinâmico de membranas, tanto teórico quanto experimental, pode ser encontrada nos trabalhos de Jenkins e Leonard (1991), Jenkins (1996), Jenkins (2001) e Jenkins e Korde (2006).

1.1. Objetivos

Este trabalho tem como objetivo o estudo analítico e numérico do comportamento dinâmico não-linear de membranas hiperelásticas, circulares completas e anulares previamente tracionadas e submetidas a vibrações de grande amplitude. Para isso, consideram-se as membranas como sendo constituídas por um material neo-Hookeano, isotrópico e incompressível e utiliza-se uma formulação baseada na teoria de elasticidade finita.

Outro objetivo é determinar modelos de dimensão (ou ordem) reduzida para o estudo das vibrações transversais da membrana hiperelástica para grandes deslocamentos. A dedução de modelos com um pequeno número de graus de liberdade capazes de descrever o comportamento não-linear de estruturas complexas é uma área de pesquisa recente e que tem experimentado grande desenvolvimento nos últimos anos (Steindl e Troger, 2001; Rega e Troger, 2005; Amabili e Touzé 2007). Estes modelos, além de sua aplicabilidade prática, permitem uma análise aprofundada das oscilações não-lineares, incluindo a obtenção de diagramas de bifurcação e bacias de atração, o que seria difícil, senão impossível, em um sistema com elevado número de graus de liberdade.

O problema também é analisado através do método dos elementos finitos utilizando o programa comercial Abaqus® com a finalidade de validar as aproximações usadas na dedução dos modelos reduzidos.

Embora a análise das vibrações lineares de membranas de material elástico e linear seja um problema clássico em matemática e engenharia, podendo ser encontrado em qualquer livro de equações diferenciais parciais (Kreyszig, 2006), pouco se sabe sobre as vibrações lineares e particularmente sobre as oscilações não-lineares de grande amplitude de membranas hiperelásticas, o que justifica esta pesquisa. Assim nesta tese são estudadas as vibrações lineares e não-lineares de membrana circulares completas e anulares, considerando também diversos aspectos tratados na literatura recente sobre vibrações lineares de membranas elásticas, tais como variação de inércia e inclusões rígidas, como destacado na revisão bibliográfica. Este trabalho é, pois, uma contribuição inédita nesta área. A escolha desta classe de geometrias deve-se à possibilidade de se desenvolver modelos analíticos precisos que possam servir de referência e comparação no estudo de problemas mais complexos e ao grande uso da geometria circular, com ou sem orifício, em aplicações práticas (Jenkins e Leonard, 1991; Jenkins, 1996; Jenkins, 2001 e Jenkins e Korde, 2006). Este trabalho é parte da linha de pesquisa em Instabilidade e Dinâmica das Estruturas e de Membranas e Biomembranas do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio. Em particular, este trabalho é uma continuação dos trabalhos desenvolvidos na área de vibrações não lineares de estruturas esbeltas, onde, através dos trabalhos de Santee (1999), Del Prado (2001) e Silva (2008), foram desenvolvidos os algoritmos e ferramentas numéricas usadas neste trabalho para o estudo das oscilações não-lineares. Na área de membranas, deve-se destacar o trabalho de Xavier (2003).

1.2.

Organização do trabalho

O presente trabalho constitui-se de oito capítulos, incluindo-se esse de introdução, onde são apresentados conceitos básicos, formulações utilizadas, resultados obtidos, conclusões e sugestões para a continuação dessa pesquisa.

No capítulo 2 é apresentada uma sucinta explanação da teoria de membranas e uma breve revisão bibliográfica de alguns dos modelos constitutivos que descrevem o comportamento de membranas hiperelásticas.

No capítulo 3 apresenta-se a solução para membranas de geometria circular e anular com espessura constante ou variável, submetidas a carregamentos trativos

axissimétricos em seu próprio plano. Desenvolve-se inicialmente a modelagem matemática do problema para a análise estática das membranas previamente submetidas a uma tração uniforme na direção radial e, posteriormente, são deduzidas as equações de movimento considerando a membrana pré-tracionada submetida a uma pressão dependente do tempo na direção transversal. Utiliza-se uma formulação variacional que permite reduzir a uma única expressão integral todos os elementos que influem no problema analisado. Através do princípio de Hamilton, obtêm-se as equações gerais de movimento e as condições de contorno para o problema. Além disso, este capítulo apresenta a modelagem do problema usando-se o programa de elementos finitos Abaqus® e os elementos finitos utilizado neste trabalho para a discretização da membrana.

Apresenta-se no capítulo 4 o estudo das vibrações lineares e não lineares de membranas circulares de espessura e densidade constantes e avalia-se a influência da pré-tração radial nas vibrações da membrana hiperelástica circular. Apresentam-se, também, neste capítulo os estudos referentes à redução da dimensão do problema através do método de Karhunen-Loève e de métodos analíticos. Por fim, a influência de diferentes leis constitutivas na relação frequência-amplitude é estudada. Os resultados da formulação analítica são comparados com os resultados obtidos através do método dos elementos finitos.

No capítulo 5 estuda-se a influência da variação da massa específica e da espessura na direção radial nas vibrações lineares e não lineares da membrana circular. Para isso, varia-se, primeiramente, a massa específica da membrana e comparam-se os resultados obtidos, analiticamente e por elementos finitos, com os encontrados na literatura. Posteriormente varia-se a espessura da membrana circular e comparam-se os resultados analíticos com os obtidos por elementos finitos.

Já no capítulo 6 apresentam-se os resultados obtidos na análise da membrana anular submetida à tração radial uniforme e a uma pressão transversal dependente do tempo. Novamente os resultados do estudo analítico são comparados com os obtidos numericamente pelo método dos elementos finitos.

A seguir, no capítulo 7, apresentam-se a formulação matemática e os resultados para o problema de vibração de uma membrana anular hiperelástica acoplada a uma inclusão rígida na forma de um disco localizado em seu centro. Novamente, utiliza-se a formulação variacional. Partindo da função de Lagrange e

aplicando-se o princípio de Hamilton, obtêm-se as equações diferenciais do problema. Como nos casos anteriores, o problema também é resolvido numericamente através do método dos elementos finitos.

Finalmente, no capítulo 8 são apresentadas as principais conclusões deste trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.