2
Teoria de membranas elásticas

A teoria de membrana para materiais altamente deformáveis difere da elasticidade clássica, já que as deformações na superfície média da membrana deformada são em módulo maiores que a unidade. Dentro destas circunstâncias utiliza-se a teoria da elasticidade para grandes deformações no desenvolvimento da teoria de membrana.

Além da não linearidade geométrica, a não linearidade dos materiais hiperelásticos também deve ser considerada. Isso pode ser feito através do uso de um modelo constitutivo apropriado e válido quando se utiliza a teoria de grandes deformações.

Se o material é hiperelástico e obedece a uma lei constitutiva não linear, as equações de equilíbrio tornam-se altamente não lineares, particularmente quando a geometria da membrana apresenta curvaturas e grandes deformações.

Assim, apresenta-se uma breve explanação da teoria da elasticidade para deformações finitas usando-se a notação tensorial e vetorial propostas por Green e Adkins (1960). Considerações sobre o caso particular de membranas circulares são apresentadas na formulação do problema. Posteriormente, alguns modelos constitutivos para materiais hiperelásticos são apresentados.

2.1.
Relações Geométricas

Considere um corpo tridimensional indeformado B_0 em um sistema cartesiano fixo x_i em um instante $t = t_0$. O vetor posição de um ponto P_0 pertencente a B_0 em relação à origem é:

$$\mathbf{r} = x_k \mathbf{i}_k \tag{2.1}$$

onde $\mathbf{i}_k$ são os vetores unitários.

Considere que o corpo B_0 sofre uma deformação em um determinado instante t e o ponto P_0 move-se para uma nova posição P. O vetor posição de P é:

$$\mathbf{R} = y_k \, \mathbf{i}_k \tag{2.2}$$

Considerando-se que $\left|\dfrac{\partial y_i}{\partial x_i}\right| > 0$, pode-se escrever que:

$$y_i = y_i(x_1, x_2, x_3, t) \tag{2.3}$$

O corpo B_0 pode também ser descrito em um sistema de coordenadas curvilíneo, θ_i, tal que:

$$\mathrm{x}_i = \mathrm{x}_i(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \tag{2.4}$$

onde x_i são valores únicos, diferenciáveis quantas vezes necessárias, exceto em possíveis pontos singulares. Supõe-se que o sistema de coordenadas curvilíneas se move continuamente com o corpo e, quando B_0 é transladado para o estado deformado B, tem-se que:

$$y_i = y_i(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t) \tag{2.5}$$

Assim, em B_0, o vetor covariante $d\theta^i$ pode ser determinado utilizando-se a relação (2.4):

$$d\theta^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^i} \partial x^i, \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^i} \partial \theta^i \tag{2.6}$$

Das equações (2.3) e (2.4), obtém-se:

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^i} \partial x^i = \frac{\partial y^i}{\partial \theta^i} \partial \theta^i \tag{2.7}$$

Assim os vetores posição assumem a forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ \mathbf{R} &= \mathbf{R}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Os vetores base e os respectivos tensores métricos contravariantes e covariantes (Green e Adkins, 1960) na configuração indeformada B_0 são definidos, para o sistema de coordenadas curvilíneas θ_i, por:

$$\begin{aligned} &\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^i}, \quad g^{ir} g_{rj} = \delta^i_j \\ &g_{ij} = \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j = \frac{\partial x^r}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^r}{\partial \theta^j} \\ &g^{ij} = \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^r} \frac{\partial \theta^j}{\partial x^r} \end{aligned} \tag{2.9}$$

De forma similar, os vetores base e os respectivos tensores métricos covariante e contravariante para a configuração deformada B são definidos por:

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^i}, \quad G^{ir} G_{rj} = \delta^i_j$$

$$G_{ij} = \mathbf{G}_i \mathbf{G}_j = \frac{\partial y^r}{\partial \theta^i} \frac{\partial y^r}{\partial \theta^j} \tag{2.10}$$

$$G^{ij} = \mathbf{G}^i \mathbf{G}^j = \frac{\partial \theta^i}{\partial y^r} \frac{\partial \theta^j}{\partial y^r}$$

O tensor de deformações é definido por (Green e Adkins, 1960):

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(G_{ij} - g_{ij}) \tag{2.11}$$

Pode-se interpretar γ_{ij} como sendo o tensor que mede a diferença do quadrado do comprimento de um elemento infinitesimal de arco nos corpos deformado e indeformado.

A função densidade energia de deformação W é determinada em função dos invariantes de deformação (I_1, I_2, I_3) e esses estão associados aos tensores métricos apresentado nas equações (2.9) e (2.10), como:

$$I_1 = g^{ij} G_{ij}$$

$$I_2 = g_{ij} G^{ij} I_3 \tag{2.12}$$

$$I_3 = \frac{G}{g}$$

sendo:

$$g = |g_{ij}| \quad G = |G_{ij}| \tag{2.13}$$

2.2. Sistema de coordenadas para membranas axissimétricas

Nesta formulação assume-se que o corpo livre de tensões é composto de um material hiperelástico e homogêneo onde há uma completa simetria elástica e geométrica com relação ao plano médio da espessura.

Considera-se que a membrana sofre uma deformação finita e simétrica ao plano médio $x_3 = 0$, onde as coordenadas após a deformação (y_i) de um ponto P da membrana, que originalmente possuía as coordenadas x_i, são referentes ao mesmo sistema cartesiano. A coordenada transversal da membrana após a deformação y_3 é geralmente descrita como uma função de y_1 e y_2. Assim, escolhe-se um sistema de coordenadas curvilíneas, tal que:

$$y_3 = \theta_3 \qquad y_\alpha = y_\alpha(\theta_1, \theta_2) \tag{2.14}$$

Dessa forma escreve-se para a configuração indeformada:

$$a_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda^2 \end{bmatrix} \qquad a^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} & 0 \\ a^{21} & a^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

$$g = a/\lambda^2 \qquad a = \left| a_{\alpha\beta} \right|$$

onde $a_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$ são os tensores métricos covariantes e contravariantes associados à coordenada θ_α no plano médio da membrana deformada e λ é uma função escalar em θ_1, θ_2 que representa a extensão do plano médio na direção normal à espessura da membrana.

Para a configuração deformada escreve-se:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} & 0 \\ A^{21} & A^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = A \qquad A = \left| A_{\alpha\beta} \right| \tag{2.16}$$

$$A^{\alpha\rho} A_{\rho\beta} = \delta^\alpha_\beta$$

onde $A_{\alpha\beta}$, $A^{\alpha\beta}$ são os tensores métricos covariantes e contravariantes associados à coordenada θ_α no plano médio da membrana deformada.

Dessa forma, os invariantes de deformação (I_1, I_2, I_3), associados aos tensores métricos covariantes e contravariantes, podem ser escritos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} I_1 &= a^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} + \lambda^2 \\ I_2 &= a_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} + \frac{1}{\lambda^2} \\ I_3 &= \lambda^2 \frac{A}{a} \end{aligned} \tag{2.17}$$

onde λ é a extensão na direção normal à superfície média da membrana.

2.3. Modelos Constitutivos

Existem na literatura vários modelos que definem as propriedades mecânicas dos materiais, entre eles estão os modelos de materiais elásticos e inelásticos. Dentro da classe dos materiais elásticos, têm-se os materiais hiperelásticos.

Os modelos constitutivos para materiais hiperelásticos descrevem o comportamento do material através da energia de deformação. Existem na literatura várias formas específicas da função energia de deformação, tanto para materiais compressíveis quanto incompressíveis, principalmente isotrópicos.

No estudo do comportamento de membranas de materiais hiperelásticos é necessária a escolha de leis constitutivas que descrevam as propriedades do material da melhor forma possível. Dentre as formulações existentes para a energia de deformação de materiais hiperelásticos citam-se as teorias de Mooney-Rivlin, neo-Hookeana, Ogden e Polinomial, dentre outras.

2.3.1. Modelo de Mooney–Rivlin

A função energia de deformação pela formulação de Mooney-Rivlin é dada por:

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \tag{2.18}$$

onde C_1 e C_2 são parâmetros do material; I_1 é o primeiro invariante de deformação e I_2, o segundo invariante de deformações.

2.3.2. Modelo neo-Hookeano

A forma da função energia de deformação considerando um material neo-Hookeano é um caso especial da função energia de deformação de Mooney-Rivlin quando $C_2 = 0$, sendo expressa por:

$$W = C_1(I_1 - 3) \tag{2.19}$$

2.3.3. Modelo de Ogden

A função energia de deformação proposta por Ogden é baseada em resultados experimentais para materiais hiperelásticos. O modelo possui um número suficiente de parâmetros que podem ser determinados experimentalmente. O modelo de Ogden assume que a energia interna de deformação pode ser descrita em termos das três extensões principais λ_i (i = 1, 2, 3), na seguinte forma:

$$W = \sum_{i=1}^{N} \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} \left(\lambda_1^{-\alpha i} + \lambda_2^{-\alpha i} + \lambda_3^{-\alpha i} - 3 \right) \tag{2.20}$$

onde μ_i, α_i e N são constantes relacionadas com as propriedades do material.

2.3.4. Modelo Yeoh

O modelo constitutivo para materiais hiperelásticos incompressíveis proposto por Yeoh assume que a forma da energia interna de deformação é independente do segundo invariante de deformação e pode ser representada como uma série na seguinte forma:

$$W = \sum_{i=1}^{N} C_i (I_1 - 3)^i \tag{2.21}$$

onde N é o número de termos da série e C_i são parâmetros do material. Para um único termo da série, o modelo de Yeoh se reduz a forma neo-Hookeana. Os termos de mais alta ordem da série possibilitam obter resultados mais próximos dos dados experimentais de deformação.

2.3.5. Modelo Polinomial

Este modelo apresenta a seguinte forma da função energia de deformação:

$$W = \sum_{i+j=1}^{N} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \tag{2.22}$$

Os modelos de Mooney-Rivlin e neo-Hookeano podem ser obtidos através deste modelo escolhendo-se adequadamente os valores de C_{ij}.

2.3.6.
Modelo Blatz-Ko

Usando resultados experimentais de materiais hiperelásticos compressíveis, Blatz e Ko propuseram uma função energia de deformação dependente do segundo e do terceiro invariante de deformação da seguinte forma:

$$W = \frac{G}{2}\left(\frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3} - 5\right) \tag{2.23}$$

onde G é o módulo cisalhante elástico linear. Para um material incompressível basta considerar $I_3 = 1$ na função de energia de deformação.

2.3.7.
Modelo Arruda-Boyce

Arruda e Boyce (1993) propuseram um modelo constitutivo baseado nas grandes deformações de borrachas e considerando o estado de deformações tri-dimensional dependente de um sistema reticulado. Comparando seus resultados experimentais com os dados apresentados na literatura, os autores chegaram à seguinte função energia de deformação:

$$W = \mu\left\{\frac{(I_1 - 3)}{2} + \frac{(I_1^{\,2} - 9)}{20\lambda_m^{\,2}} + \frac{11(I_1^{\,3} - 27)}{1050\,\lambda_m^{\,4}} + \frac{19(I_1^{\,4} - 81)}{7000\,\lambda_m^{\,6}} + \frac{519(I_1^{\,5} - 243)}{673750\,\lambda_m^{\,8}}\right\} \tag{2.24}$$

onde μ e λ_m são constantes relacionadas com as propriedades do material e I_1 é o primeiro invariante de deformação.