6
Membrana hiperelástica anular

Neste capítulo apresenta-se o estudo de uma membrana hiperelástica de geometria anular. Para isso, se considera na formulação apresentada anteriormente no terceiro capítulo um raio indeformado interno ρ_o diferente de zero e que a membrana está inicialmente fixa ao longo deste bordo interno.

Inicialmente, adota-se a simplificação da espessura considerando-a constante e avaliam-se a resposta estática e as vibrações lineares e não lineares. Posteriormente, considera-se a variação radial da massa específica e da espessura, e avalia-se a sua influência nas respostas da membrana hiperelástica anular.

6.1.
Membrana anular de espessura constante

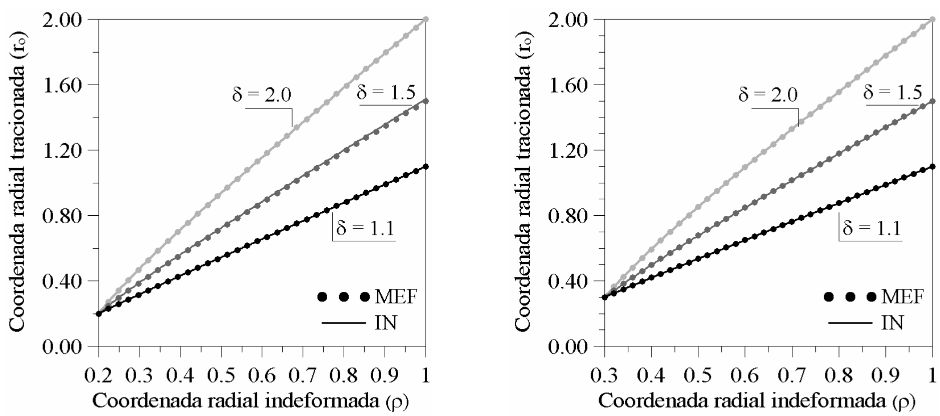
6.1.1.
Análise estática

Por ser a equação diferencial da membrana, apresentada anteriormente em (3.34), altamente não-linear utiliza-se a integração numérica para a resolução deste sistema. Assim, o sistema de equações de primeira ordem, apresentado em (3.36) e (3.37) é utilizado juntamente com as condições de contorno (3.38) e (3.39) na resolução do problema através da integração numérica.

Para os resultados numéricos considera-se uma membrana de raio externo indeformado $R_o = 1\ m$, espessura indeformada $h = 0.001 m$ e dois valores do raio interno $\rho_o = 0.2\ m$ e $\rho_o = 0.3\ m$. O material da membrana é o mesmo considerado anteriormente.

Para a solução via método dos elementos finitos, utiliza-se, no programa comercial Abaqus®, elementos de membrana M3D4R e M3D3. Após a análise de convergência em termos das tensões principais discretiza-se a membrana anular com uma malha elementos de comprimento $L_{ele} < 0.028\ R_o$. Isso gera para a membrana com raio interno $\rho_o = 0.2\ m$ uma malha de 9789 elementos e para a membrana com $\rho_o = 0.3\ m$ uma malha de 7070 elementos.

Dessa forma, obteve-se a configuração tracionada da membrana anular para diferentes valores do coeficiente de tração radial (δ). Na Figura 6.1 apresenta-se a variação do comprimento radial tracionado obtido pela integração numérica (IN) e pelo método dos elementos finitos (MEF), para três diferentes valores de deslocamento aplicado.



$\rho_o = 0.2\ m$ $\rho_o = 0.3\ m$

Figura 6.1 – Variação do comprimento radial tracionado da membrana anular.

Após obter a configuração tracionada da membrana através da integração numérica, a coordenada radial tracionada da membrana anular pode ser aproximada pelo método dos mínimos quadrados como:

$$r_o(\rho) = A\log(\rho) + B\rho^2 \log\rho + C\rho^2 + D\rho + E \tag{6.1}$$

onde A, B, C, D e E são constantes que dependem da propriedades da membrana anular tracionada.

As membranas anulares apresentadas na Figura 6.1 possuem as seguintes coordenadas radiais tracionadas em função da coordenada indeformada ρ:

- $\rho_o = 0.2\ m$

$$\delta = 1.1 \quad r_o(\rho) = 0.045\log(\rho) - 0.066\rho^2\log(\rho) + 0.111\rho^2 + 0.905\rho + 0.084 \tag{6.2}$$

$$\delta = 1.5 \quad r_o(\rho) = 0.231\log(\rho) - 0.331\rho^2\log(\rho) + 0.559\rho^2 + 0.529\rho + 0.423 \tag{6.3}$$

$$\delta = 2.0 \quad r_o(\rho) = 0.426\log(\rho) - 0.580\rho^2\log(\rho) + 0.987\rho^2 + 0.252\rho + 0.760 \tag{6.4}$$

- $\rho_o = 0.3\ m$

$$\delta = 1.1 \quad r_o(\rho) = 0.093\log(\rho) - 0.104\rho^2\log(\rho) + 0.187\rho^2 + 0.754\rho + 0.158 \qquad (6.5)$$

$$\delta = 1.5 \quad r_o(\rho) = 0.468\log(\rho) - 0.522\rho^2\log(\rho) + 0.937\rho^2 - 0.228\rho + 0.791 \qquad (6.6)$$

$$\delta = 2.0 \quad r_o(\rho) = 0.854\log(\rho) - 0.887\rho^2\log(\rho) + 1.609\rho^2 - 0.997\rho + 1.387 \qquad (6.7)$$

Os valores das tensões principais σ_1 e σ_2, obtidos para a membrana anular através das equações (3.30) e (3.31) e por elementos finitos, são apresentados na Figura 6.2. Observa-se que, quanto mais tracionada a membrana, maior a variação das tensões principais e que, os valores da tensão principal σ_1 diminuem ao longo do coordenada radial indeformada, enquanto a variação de σ_2 ao longo da coordenada radial indeformada é crescente.

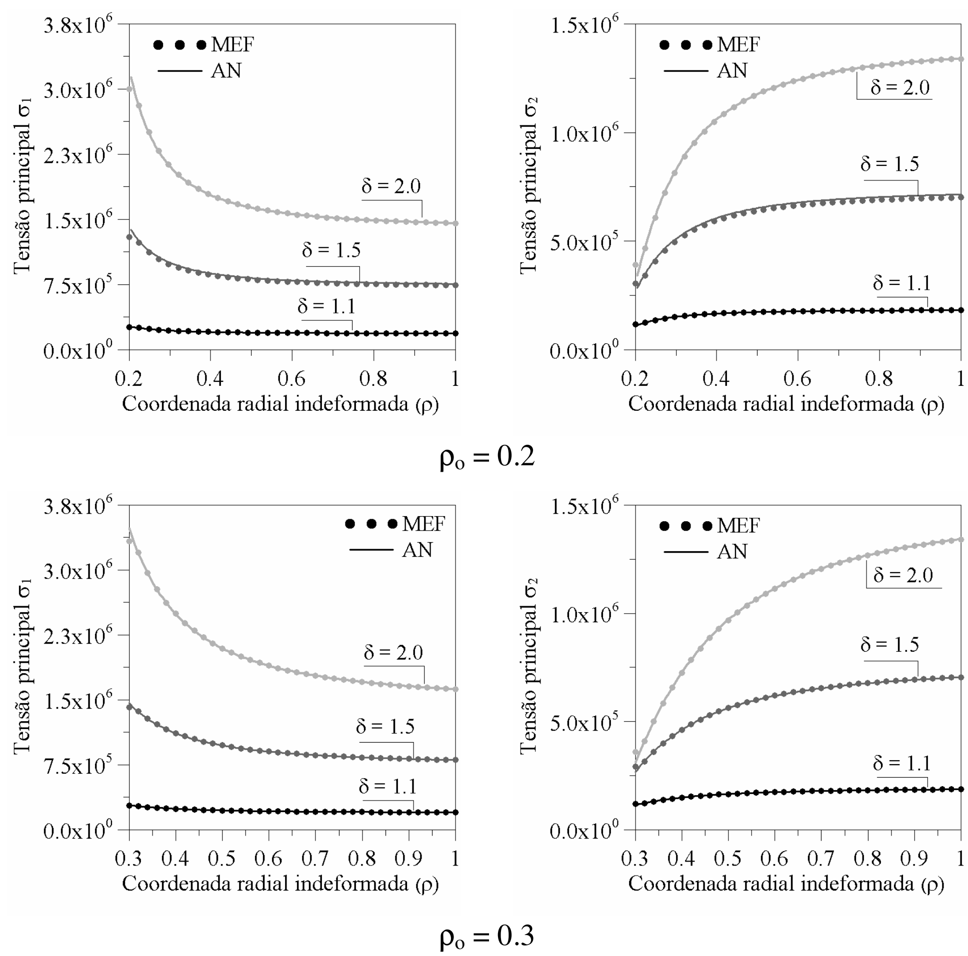


Figura 6.2 – Tensões principais (N/m^2) para a membrana anular tracionada de espessura indeformada constante.

Ressalta-se que, tanto pelos resultados numéricos quanto pelas equações analíticas, se observou que as tensões principais para a membrana anular tracionada (σ_1 e σ_2) e a coordenada radial tracionada (r_o) independem da espessura da membrana indeformada.

Observa-se em todos os casos apresentados uma boa conformidade entre os resultados obtidos analiticamente e pelo método dos elementos finitos.

6.1.2.
Análise linear da vibração livre

Para a análise linear, parte-se da equação de movimento na direção transversal da membrana (3.48) na qual é substituído o raio da membrana tracionada (6.1), obtendo-se a seguinte equação de movimento linear:

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(-1+\frac{\rho^2}{(A/\rho+2B\rho\log\rho+B\rho+2C\rho+D)^4}*\frac{1}{(A\log\rho+B\rho^2\log\rho+C\rho^2+D\rho+E)^2}\right)\frac{\partial^2 w(\rho,\theta,t)}{\partial\rho^2}+\right.\\
&\left(-\frac{1}{\rho}-\frac{4\rho^2}{(A/\rho+2B\rho\log\rho+B\rho+2C\rho+D)^5}*\frac{(-A/\rho^2+2B\log\rho+3B+2C)}{(A\log\rho+B\rho^2\log\rho+C\rho^2+D\rho+E)^2}+\right.\\
&+\frac{3\rho}{(A/\rho+2B\rho\log\rho+B\rho+2C\rho+D)^4}*\frac{1}{(A\log\rho+B\rho^2\log\rho+C\rho^2+D\rho+E)^2}+\\
&\left.-\frac{2\rho^2}{(A/\rho+2B\rho\log\rho+B\rho+2C\rho+D)^3}*\frac{1}{(A\log\rho+B\rho^2\log\rho+C\rho^2+D\rho+E)^3}\right)\frac{\partial w(\rho,\theta,t)}{\partial\rho}+\\
&\left.\left(-\frac{1}{\rho^2}+\frac{\rho^2}{(A/\rho+2B\rho\log\rho+B\rho+2C\rho+D)^2}*\frac{1}{(A\log\rho+B\rho^2\log\rho+C\rho^2+D\rho+E)^4}\right)\frac{\partial^2 w(\rho,\theta,t)}{\partial\theta^2}\right]2C_1+\\
&\Gamma\left(\frac{\partial^2 w(\rho,\theta,t)}{\partial t^2}\right)=0
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

Para a solução do problema, partiu-se da semelhança entre a equação (6.8) e a equação clássica de ondas (Kreyszig, 2006). Considerando que os termos em função de ρ que acompanham o deslocamento transversal *w* em (6.8) representam uma tensão *S* atuante na direção radial e podem ser aproximados por esta tensão, a equação (6.8) pode ser aproximada por:

$$\frac{\partial^2 w(\rho,\theta,t)}{\partial t^2} = \frac{S}{\Gamma}\left(\frac{\partial^2 w(\rho,\theta,t)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w(\rho,\theta,t)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w(\rho,\theta,t)}{\partial \theta^2}\right) \tag{6.9}$$

A equação (6.9) é similar à equação clássica de ondas que pode ser resolvida utilizando a separação das variáveis ρ, θ e t (Kreyszig, 2006) juntamente com as condições de contorno do problema. Então o deslocamento transversal pode ser descrito como $w(\rho,\theta,t) = G(\rho)Q(\theta)Y(t)$ e, a equação (6.9) torna-se:

$$\frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)}\frac{\Gamma}{S} = \left(G(\rho)_{,\rho\rho}Q(\theta) + \frac{1}{\rho}G(\rho)_{,\rho}Q(\theta) + \frac{1}{\rho^2}G(\rho)Q(\theta)_{,\theta\theta}\right) \tag{6.10}$$

Resolvendo a equação (6.10) (Kreyszig, 2006) tem-se que, o deslocamento transversal *w(*ρ, θ, *t)* pode ser aproximado pela solução da equação clássica de ondas dada por:

$$w(\rho,\theta,t) = A_{mn}\left[C\,J_n\left(\frac{\Lambda_{mn}\,\rho}{R_o}\right) - Y_n\left(\frac{\Lambda_{mn}\,\rho}{R_o}\right)\right]\cos(n\theta)\cos(\omega\,t) \tag{6.11}$$

onde:

$$C = \frac{Y_n(\Lambda_{mn})}{J_n(\Lambda_{mn})}$$

$$L_m(\Lambda_{mn}) = J_n\left(\frac{\rho_o}{R_o}\Lambda_{mn}\right)Y_n(\Lambda_{mn}) - J_n(\Lambda_{mn})Y_n\left(\frac{\rho_o}{R_o}\Lambda_{mn}\right) \tag{6.12}$$

e A_{mn} corresponde à amplitude modal; J_n é a função Bessel de primeiro tipo de ordem *n*; Y_n é a função Bessel de segundo tipo de ordem *n*; *m,* o número de semi-ondas radiais; *n,* o número de ondas circunferenciais; Λ_{mn} é a *m*-ésima raiz de $L_m(\Lambda_{mn})$; R_o é o raio da membrana indeformada; *t* é o tempo e ω_{mn} é a freqüência de vibração.

Na Figura 6.3 compara-se favoravelmente o deslocamento transversal apresentado em (6.11) com o resultado obtido por elementos finitos para a membrana anular com $\delta = 1.1$, $\rho_o = 0.2$ *m*.

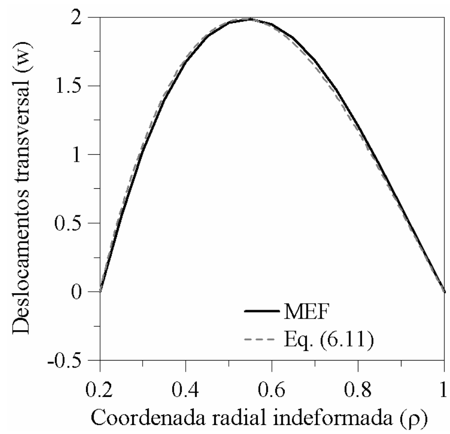


Figura 6.3 – Deslocamento transversal (*m*) da membrana anular pré-tensionada em vibração livre em um certo tempo t ($\delta = 1.1$, $\rho_o = 0.2$ *m*).

Substituindo o deslocamento transversal (6.11) na equação de movimento (6.8), obtém-se a seguinte expressão para a freqüência natural da membrana anular:

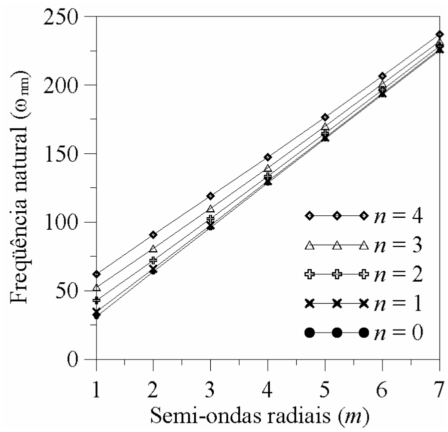
$$\omega_{mn} = \Lambda_{mn} \sqrt{\frac{2\,C_1}{{R_o}^2\,\Gamma}\left(1 - \frac{1}{\delta^2 \left(r_o'(R_o)\right)^4}\right)} \tag{6.13}$$

Considerando o limite de $\delta \to \infty$, conclui-se que, quando o raio tracionado aumenta, as freqüências convergem para:

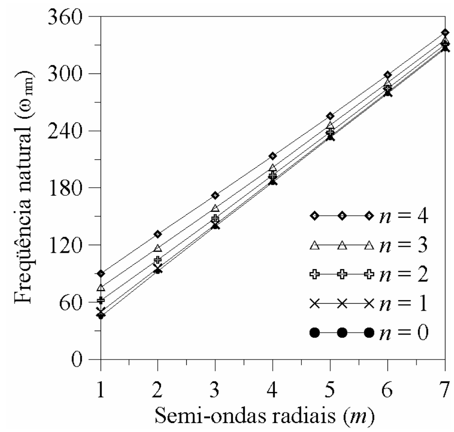
$$\omega_{mn\,(\delta \to \infty)} = \Lambda_{mn} \sqrt{\frac{2\,C_1}{{R_o}^2\,\Gamma}} \tag{6.14}$$

Sendo este um limite superior para a freqüência ω_{mn}.

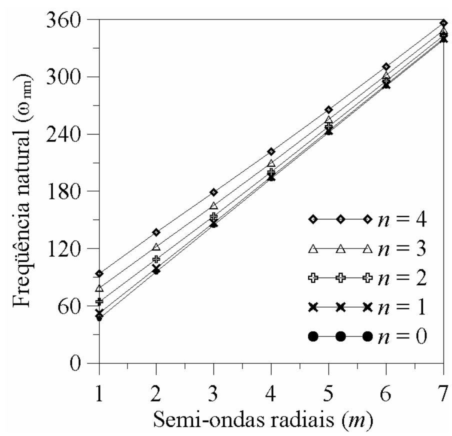
Na Figura 6.4 são mostrados os espectros de freqüência de vibração para valores selecionados de *n* e variando-se o número de semi-ondas radiais, *m*. Estes espectros são calculados analiticamente, para a membrana anular com $\rho_o = 0.2$ *m* e diferentes níveis de tração. Observa-se que, para cada valor de *n*, a variação das freqüências de vibração em relação ao número de semi-ondas radiais é linear e que a menor freqüência de vibração ocorre para uma combinação de ondas *m* = 1 e *n* = 0 (modo axissimétrico).



$\delta = 1.1$



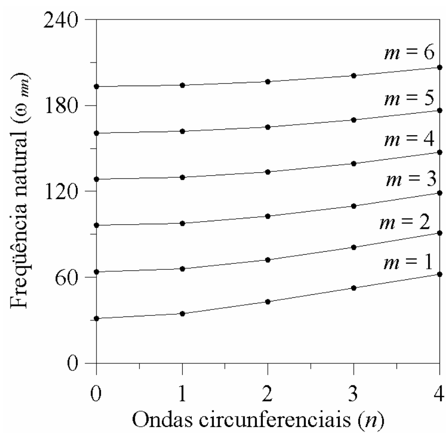
$\delta = 1.5$



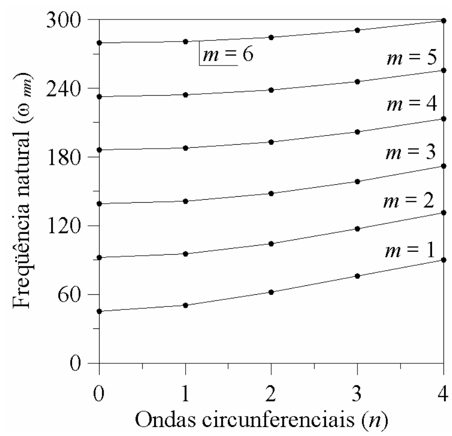
$\delta = 2.0$

Figura 6.4 - Espectro das freqüências naturais (rad/s) da membrana anular. Freqüência natural em função de m ($\rho_o = 0.20\ m$).

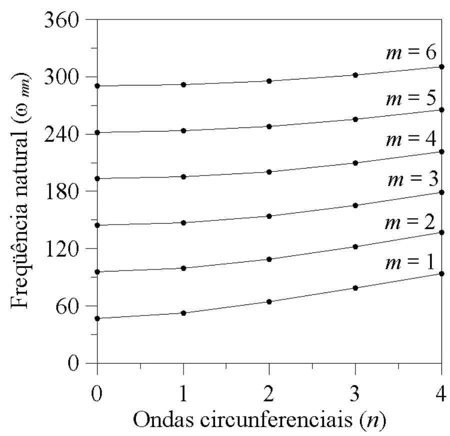
Na Figura 6.5 ilustra-se, novamente, os espectros da freqüência de vibração, porém variando o número de ondas circunferenciais, n. Observa-se que a variação das freqüências em relação ao número de ondas circunferenciais é levemente não linear.



$\delta = 1.1$



$\delta = 1.5$



$\delta = 2.0$

Figura 6.5 - Espectro das freqüências naturais (rad/s) da membrana anular. Freqüência natural em função de n ($\rho_o = 0.20\ m$).

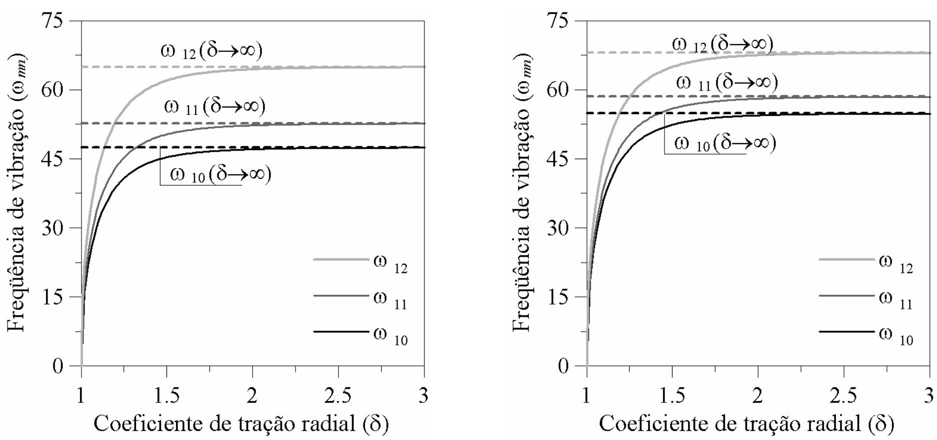
Para a solução via método dos elementos finitos, utiliza-se a mesma malha utilizada na análise estática. Os resultados analíticos (AN) e obtidos por elementos finitos (MEF) são comparados na Tabela 6.1.

Na Figura 6.6 apresenta-se uma variação da freqüência de vibração com o coeficiente de tração radial (δ) da membrana para três modos de vibração. Observa-se que, para pequenos valores de δ ocorre um grande aumento na freqüência natural e que, a curva tende a um valor constante para maiores valores da razão de tração radial. Esse comportamento é observado para todos modos de vibração com diferentes combinações de ondas (m e n).

Tabela 6.1 – Freqüências de vibração lineares (rad/s) da membrana anular.

$\rho_o = 0.20\ m$							
m	*n*	$\delta = 1.1$		$\delta = 1.5$		$\delta = 2.0$	
		AN	MEF	AN	MEF	AN	MEF
1	0	32.307	32.512	45.561	45.716	47.113	47.431
1	1	34.751	35.725	50.293	50.788	52.244	52.513
1	2	42.840	43.491	62.000	62.349	64.406	64.615

$\rho_o = 0.30\ m$							
m	*n*	$\delta = 1.1$		$\delta = 1.5$		$\delta = 2.0$	
		AN	MEF	AN	MEF	AN	MEF
1	0	38.200	38.827	53.390	53.465	54.423	54.926
1	1	40.607	40.984	55.873	56.795	58.042	58.440
1	2	46.879	46.796	64.950	65.629	67.471	67.725



$\rho_o = 0.20\ m$ $\rho_o = 0.30\ m$

Figura 6.6 – Variação da freqüência de vibração (rad/s) em função do coeficiente de tração radial da membrana anular.

Já na Figura 6.7 apresenta-se a relação entre a freqüência de vibração e δ para o primeiro modo de vibração (m = 1 e n = 0), considerando diferentes valores do raio interno, ρ_o. Verifica-se que quanto maior o raio interno, maior o valor da freqüência e que o mesmo tipo de comportamento é observado quando se varia δ independente do valor do raio interno, ρ_o.

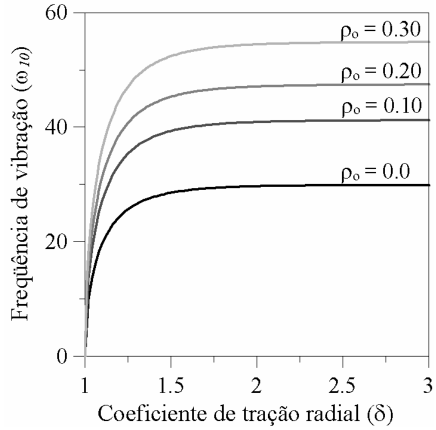


Figura 6.7 – Variação da freqüência de vibração (rad/s) em função do coeficiente de tração radial para diferentes valores do raio interno da membrana anular.

A relação entre a freqüência de vibração e o raio interno indeformado (R_o) é apresentada na Figura 6.8. Verifica-se que, para valores pequenos do raio indeformado, ocorre uma rápida diminuição da freqüência de vibração e que a curva tende a valores constantes à medida que R_o cresce. Esse comportamento é observado para diferentes valores do raio interno.

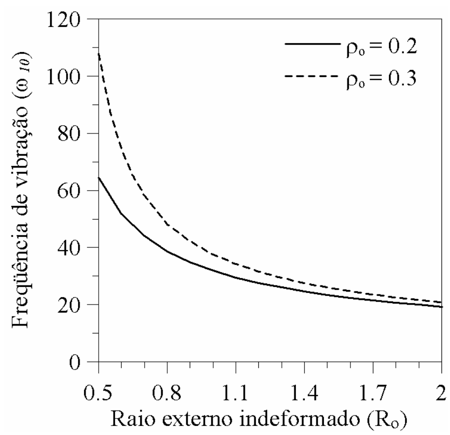
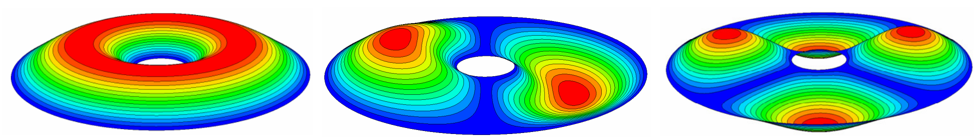


Figura 6.8 - Variação de freqüência de vibração (rad/s) em função do raio indeformado, R_o (*m*).

Três dos modos de vibração da membrana anular são apresentados na Figura 6.9. Independente do tamanho do raio interno ρ_o a configuração do modo (m, n) de vibração é a mesma.

Ressalta-se que as freqüências lineares de vibração independem da espessura da membrana anular indeformada (h).

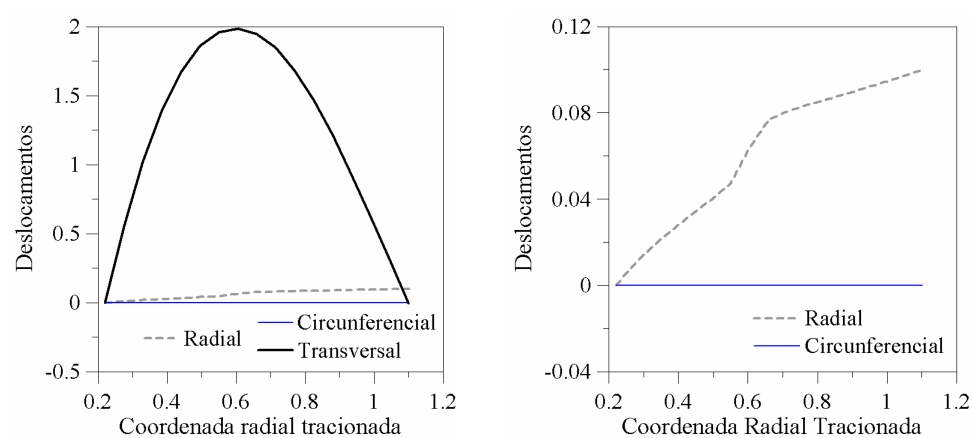


$m = 1$; $n = 0$ $m = 1$; $n = 1$ $m = 1$; $n = 2$

Figura 6.9 – Modos de vibração da membrana anular ($\rho_o = 0.20\ m$).

6.1.3.
Análise não linear da vibração livre

A resposta não-linear da vibração livre da membrana sob grandes e pequenas amplitudes de vibração é obtida utilizando o método dos elementos finitos. Na Figura 6.10 apresenta-se os deslocamentos da membrana pré-tensionada sob vibração livre, onde se observa que os deslocamentos radial u e circunferencial v são desprezíveis em relação ao deslocamento transversal w, tal como nos casos anteriores.



(a) (b)

Figura 6.10 – (a) Variação dos deslocamentos (m) da membrana circular pré-tensionada sob grande amplitude de vibração ao longo do raio tracionado. (b) Detalhe dos deslocamentos radial e circunferencial ($\delta = 1.1$, $\rho_o = 0.2\ m$).

Para a análise não linear da membrana anular, parte-se da equação de movimento não linear na direção transversal da membrana dada em (3.45) e obtém-se para a vibração livre da membrana anular a seguinte equação:

$$-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial z_{,\rho}}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial z_{,\theta}}\right)+\rho\,\Gamma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{6.15}$$

Assim, para análise não linear o deslocamento transversal w é aproximado por um somatório de M modos ortogonais, dado por:

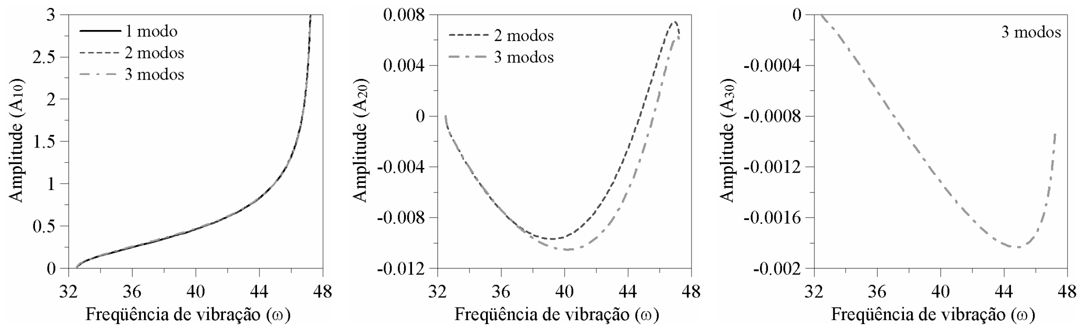
$$w(\rho,\theta,t)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=0}^{N}A_{mn}(t)\left[C\,J_n\left(\frac{\Lambda_{mn}\,\rho}{R_o}\right)-Y_n\left(\frac{\Lambda_{mn}\,\rho}{R_o}\right)\right]\cos(n\theta) \tag{6.16}$$

onde $A_m(t)$ corresponde à amplitude do deslocamento em função do tempo e C e Λ_{mn} são dados em (6.12).

O método de Galerkin-Urabe é utilizado para resolver as equações de movimento obtendo-se a relação freqüência-amplitude modal. Estuda-se a vibração associada à menor freqüência natural (m = 1 e n = 0) que corresponde ao primeiro modo axissimétrico. Para isso, o deslocamento transversal (6.16) é aproximado com N = 0 e aumentando o número de modos radiais (M = 1, 2 e 3).

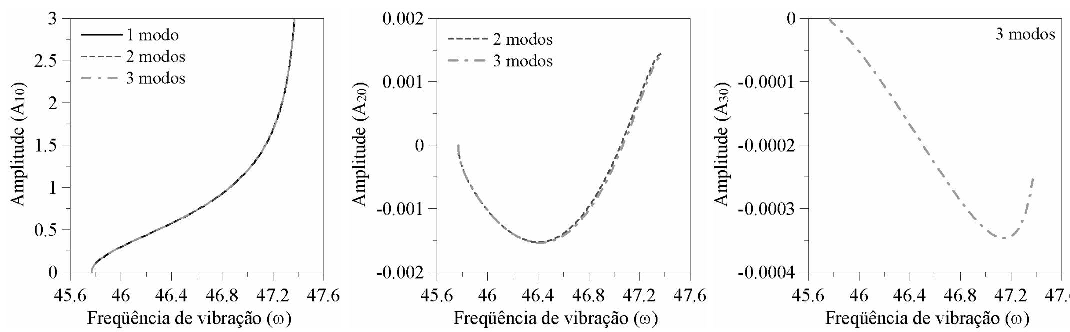
A variação de cada amplitude modal A_{i0} em (6.16) é apresentada Figura 6.11 considerando-se um número crescente de modos M para três diferentes valores de δ para a membrana com raio interno ρ_o = 0.20 m.

Os resultados mostram que um modelo reduzido com apenas um grau de liberdade (expansão 1, com M = 1) é suficiente para se obter respostas corretas sob grandes deslocamentos. As amplitudes dos modos subseqüentes (A_{20} e A_{30}) são muito pequenas quando comparadas com A_{10}.



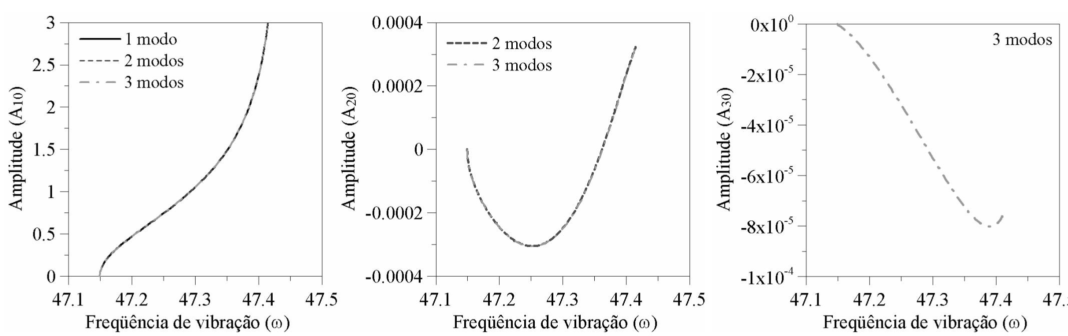
(a) A_{10} (b) A_{20} (c) A_{30}

$\delta = 1.1$



(d) A_{10} (e) A_{20} (f) A_{30}

$\delta = 1.5$



(g) A_{10} (h) A_{20} (i) A_{30}

$\delta = 2.0$

Figura 6.11 – Variação da freqüência de vibração (rad/s) com a amplitude modal (*m*), considerando-se um número crescente de modos em (6.16) ($\rho_o = 0.20$ *m*).

Na Figura 6.12 ilustra-se a relação freqüência de vibração-amplitude modal para diferentes valores da razão de tração radial, δ. Observa-se o mesmo comportamento que ocorre para as membranas circulares.

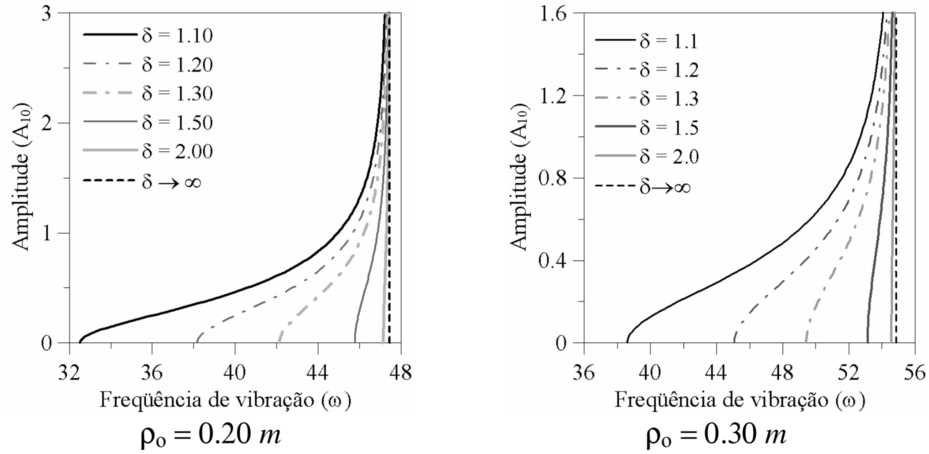


Figura 6.12 - Relação freqüência (rad/s) - amplitude (*m*) para vibração livre da membrana anular com diferentes valores de δ.

Já na Figura 6.13 ilustra-se a relação freqüência de vibração-amplitude modal para diferentes valores do raio interno da membrana. Observa-se que, quanto maior o raio interno maiores são as freqüências de vibração para uma dada amplitude (A_{10}) e que o comportamento *hardening* é observado em todos os casos apresentados.

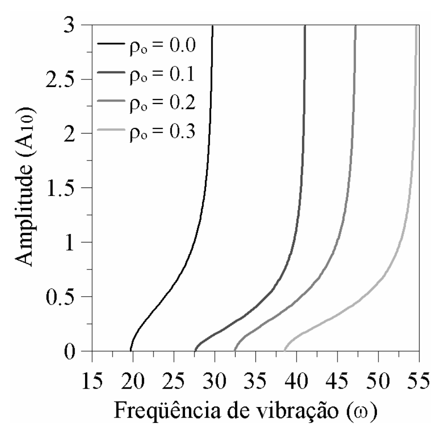


Figura 6.13 - Relação freqüência (rad/s) – amplitude (*m*) para vibração livre da membrana anular com diferentes valores de ρ_o.

No estudo da vibração não-linear pelo método dos elementos finitos, é utilizado um modelo com uma malha com 576 elementos de casca S4R que gera um sistema com 1731 equações. Da mesma maneira que para a membrana circular, o modelo utilizado na análise não linear possui uma discretização menos refinada que na análise linear devido à dificuldade e ao tempo de processamento deste tipo de análise.

Para o cálculo da vibração livre por elementos finitos, excitou-se o primeiro modo de vibração da membrana anular (n = 0 e m = 1) impondo-se um campo de deslocamentos inicial igual à solução analítica e obteve-se, para uma dada amplitude inicial, a resposta no tempo para um sistema levemente amortecido.

A partir desta resposta no tempo e utilizando a metodologia proposta por Nandakumar e Chatterjee (2005), obtém-se a relação freqüência de vibração-deslocamento transversal para um ponto qualquer da membrana.

Assim, os resultados obtidos por elementos finitos são comparados com os resultados obtidos analiticamente utilizando-se os modelos de pequena dimensão para um ponto de coordenadas (0.5; 0) da membrana indeformada. Esses resultados são apresentados na Figura 6.14, onde se observa uma boa concordância.

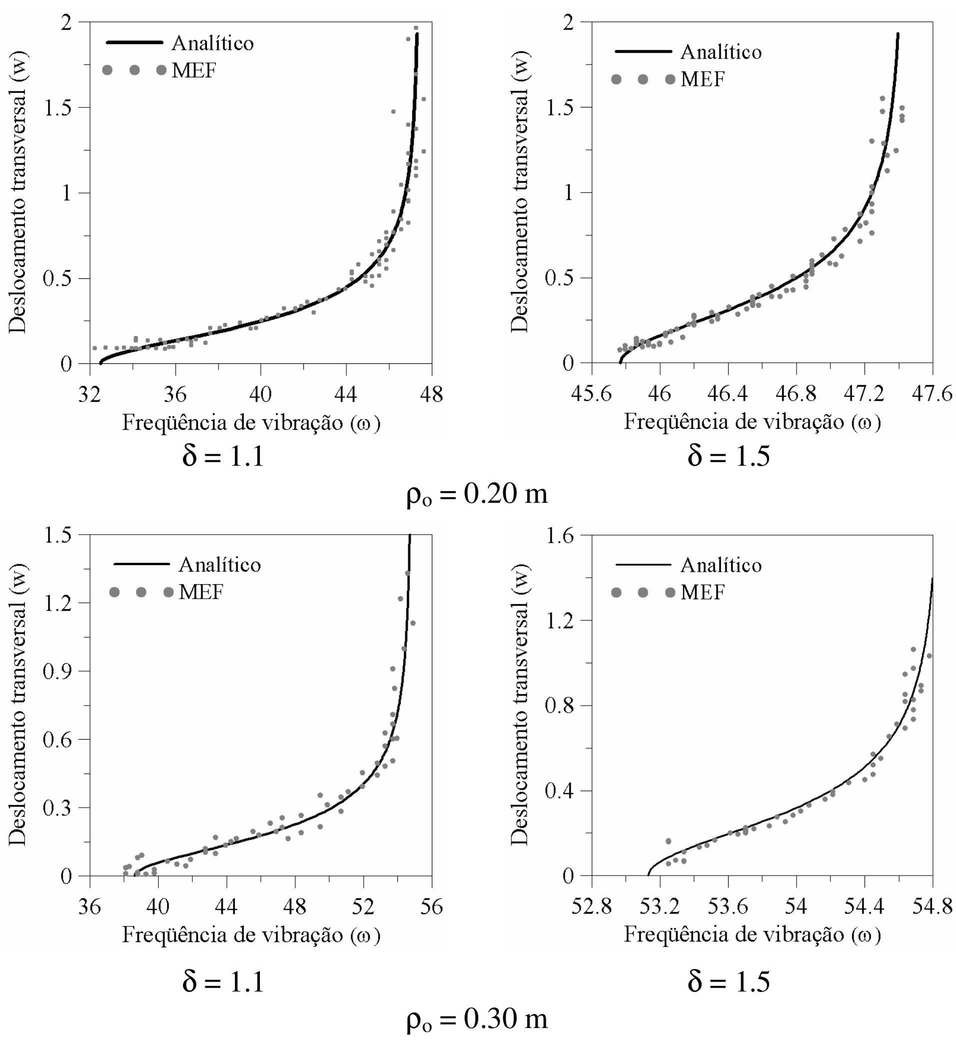


Figura 6.14 - Relação freqüência de vibração (rad/s) - deslocamento transversal (m).

Cabe ressaltar que a modelagem por elementos finitos considera os deslocamentos no plano da membrana u e v e seus efeitos inerciais, o que não é considerado no módulo reduzido.

Na Figura 6.15 apresenta-se o deslocamento transversal da membrana anular em vibração livre em um tempo *t* obtido através de elementos finitos. Compara-se esse resultado com o obtido pela equação (6.16) utilizando apenas o primeiro modo axissimétrico e a mesma amplitude da resposta numérica. Observa-se que a equação (6.16) é uma resposta com boa precisão para a vibração livre da membrana anular.

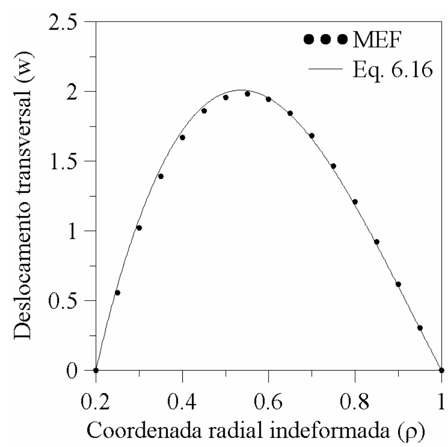
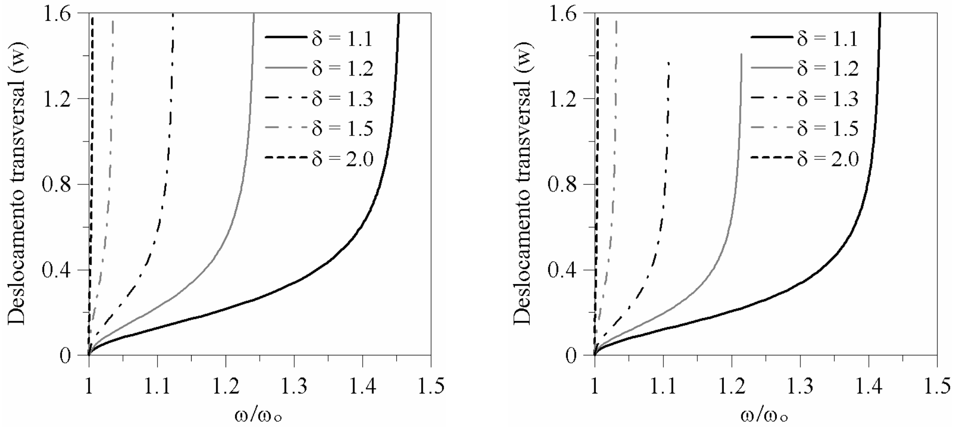


Figura 6.15 - Deslocamento transversal (*m*) da membrana anular em vibração livre, em um tempo t ($\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.20$ *m*).

A variação da freqüência no intervalo de interesse pode ser melhor comparada através dos resultados apresentados na Figura 6.16, onde mostra-se a relação normalizada freqüência-deslocamento da membrana. A freqüência de vibração foi normalizada com relação à freqüência natural de cada caso e os resultados apresentados são os obtidos utilizando a formulação analítica.

Observa-se através da Figura 6.16 que, quanto mais tracionada a membrana menor o grau de não-linearidade da resposta, impondo uma necessidade de maior precisão nos períodos de tempo utilizados no método dos elementos finitos e, conseqüentemente, nas freqüências.



$\rho_o = 0.20\ m$ $\rho_o = 0.30\ m$

Figura 6.16 - Relação normalizada freqüência – deslocamento transversal (*m*) da membrana anular.

Na Figura 6.17 apresenta-se a relação freqüência-deslocamento transversal normalizada variando-se o raio interno ρ_o. Observa-se o mesmo comportamento *hardening* em todos os casos e que as curvas das membranas com raio interno diferente de zero se sobrepões inicialmente, mas tendem a diferentes valores de $\omega/\ \omega_o$ à medida que o deslocamento transversal cresce. Nota-se também que a membrana anular apresenta inicialmente uma variação mais acentuada da freqüência com a amplitude quando comparada à membrana sem orifício ($\rho_o = 0.0$), o que implica em um maior grau de não-linearidade.

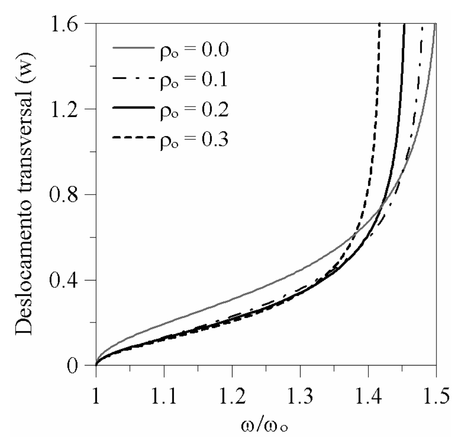


Figura 6.17 - Relação normalizada freqüência-deslocamento transversal (*m*) da membrana anular com diferentes valores do raio interno. ($\delta = 1.1$)

6.1.4.
Redução do problema pelo método de Karhunen-Loève

A redução do problema da membrana anular pelo método de Karhunen-Loève é feita para identificar a importância de cada modo da expansão do deslocamento transversal (6.16) na energia total do sistema. Com isso, pode-se verificar a participação de cada modo da expansão modal nos modos não lineares de vibração.

Para isso observam-se as relações freqüência-deslocamento transversal associadas ao primeiro modo axissimétrico ($n = 0$ e $m = 1$), obtidas analiticamente (expansões 1, 2 e 3) e por elementos finitos, e escolhem-se em virtude da grande não-linearidade da resposta três trechos distintos da curva para determinar a série de dados. Assim, para uma melhor representação do comportamento da membrana, calculam-se expansões que representem o deslocamento transversal para as membranas utilizando o método de Karhunen-Loève considerando pequenas, médias e grandes amplitudes de vibração.

Na Figura 6.18 são mostrados os três trechos escolhidos na curva freqüência-deslocamento transversal para a determinação da série de dados necessária à decomposição de Karhunen-Loève. Neste estudo utilizam-se as respostas das membranas com $\rho_o = 0.20$ *m* inicialmente tracionadas com $\delta = 1.1$.

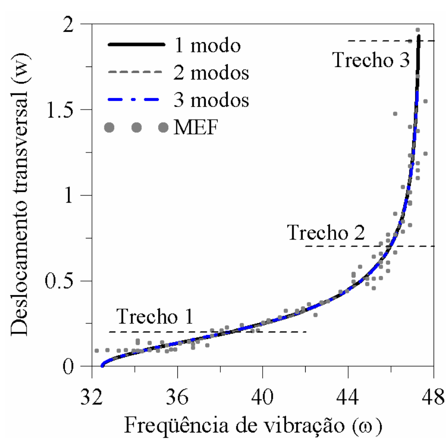


Figura 6.18 – Trechos da curva freqüência (rad/s) – deslocamento transversal (*m*) da membrana em vibração livre para decomposição de Karhunen-Loève ($\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.20$ *m*).

Os quatro primeiros POMs e seus respectivos POVs, para o problema de vibração livre para a membrana anular são apresentados na Figura 6.19 para cada um dos três trechos.

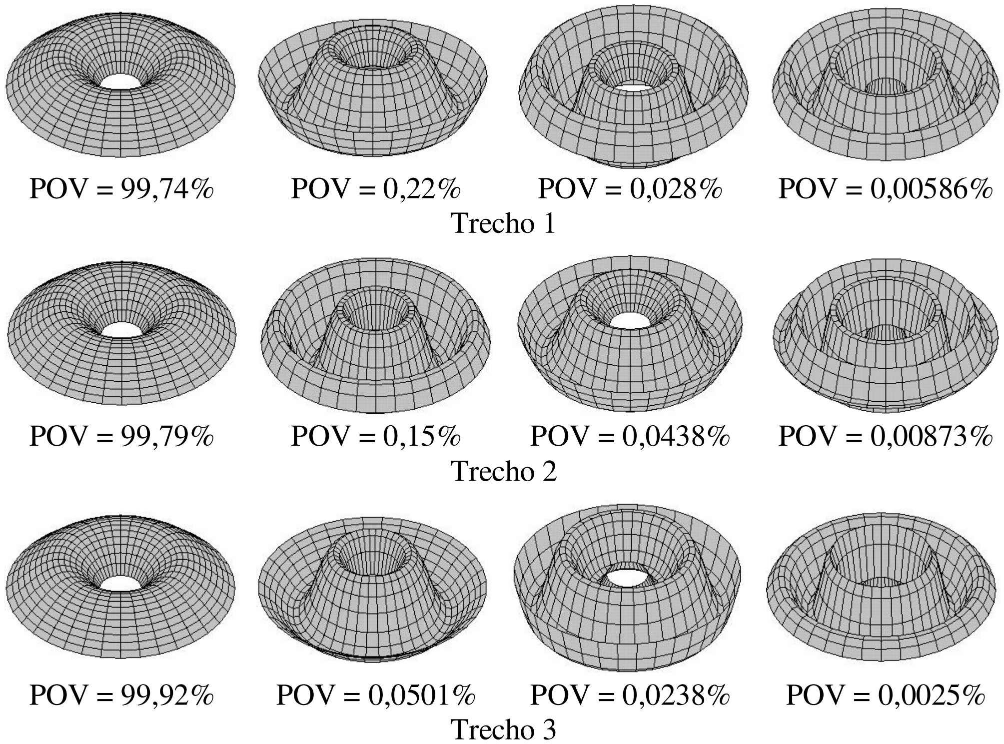


Figura 6.19 - Quatro primeiros POMs e seus respectivos POVs para a vibração livre não linear da membrana anular ($\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.2\ m$).

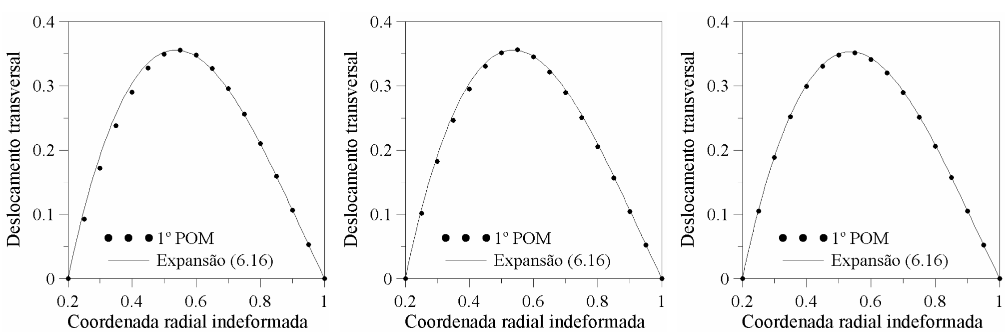
Os quatro primeiros POMs em cada trecho representam mais de 99,99% da energia total do sistema. De fato, a maior parte da energia está concentrada no primeiro modo (POV > 99,74%). A partir destes resultados, pode-se derivar um modelo reduzido para a análise não linear da membrana e identificar a importância relativa de cada modo da expansão (6.16).

A Tabela 6.2 apresenta os coeficientes modais para cada POM ilustrado na Figura 6.19. A principal contribuição para o primeiro POM, que é responsável por mais de 99,74 % da energia total, é basicamente o primeiro modo axissimétrico A_{10}.

Tabela 6.2 - Participação dos modos usados na expansão modal dos quatro primeiros POMs na resposta não linear da membrana anular ($\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.2\ m$).

			Trecho 1		
POM	POV	A_{10}	A_{20}	A_{30}	A_{40}
1	99,74%	0.64981	-0.01377	-0.00109	0.00035
2	0,22%	0.15164	-0.72898	0.01031	-0.00142
3	0,028%	0.01361	0.07770	-0.06809	-0.01096
4	0,00586%	-0.01721	-0.01608	0.000243	-0.04719
			Trecho 2		
POM	POV	A_{10}	A_{20}	A_{30}	A_{40}
1	99,79%	0.64675	-0.00173	-0.00068	0.00030
2	0,15%	0.04419	-0.01097	-0.06544	-0.00303
3	0,0438%	0.15663	-0.73041	0.01746	-0.00548
4	0,00873	-0.02342	0.04683	-0.01274	-0.02653
			Trecho 3		
POM	POV	A_{10}	A_{20}	A_{30}	A_{40}
1	99,92%	0.64590	-0.00035	-0.00009	0.00006
2	0,0501%	0.15728	-0.58375	-0.02547	-0.00225
3	0,0238%	0.05963	-0.44520	0.06397	0.00498
4	0,0025%	-0.01560	-0.02212	-0.01184	-0.03930

Na Figura 6.20 é apresentada a deformada da membrana dada pelo primeiro POM ilustrados na Figura 6.19. Observa-se que há uma boa concordância entre a deformada obtida usando a expansão modal (6.16) com um modo ($M = 1$) e usando o primeiro POM da expansão de Karhunen-Loève. Portanto, verifica-se matematicamente que um modelo simples com um grau de liberdade é capaz de descrever o comportamento não-linear da membrana incluindo grandes deformações.



Trecho 1 Trecho 2 Trecho 3

Figura 6.20 – Comparação da deformada obtida a partir da expansão (6.16) com o primeiro POM da expansão de Karhunen-Loève ($\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.2\ m$).

6.1.5.
Análise não linear da vibração forçada

Da mesma maneira que para a membrana circular, na análise da vibração forçada da membrana anular considera-se a vibração transversal axissimétrica provocada por uma pressão hidrostática uniforme dependente do tempo *P(t)* e que os campos de deslocamentos radial u e circunferencial v são desprezíveis em relação ao campo de deslocamento transversal w.

Dessa maneira, a equação de movimento não linear da membrana anular sob vibração forçada transversal é dada por:

$$-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial z_{,\rho}}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial z_{,\theta}}\right)+\rho\,\Gamma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\zeta\, C_c\frac{\partial w}{\partial t}-P(t)r_o\frac{dr_o}{d\rho}=0 \qquad (6.17)$$

onde a pressão excitadora *P(t)* é a mesma apresentada em (4.28) para a membrana circular.

Como a vibração axissimétrica transversal é associada ao primeiro modo axissimétrico ($n=0$ e $m=1$), aproxima-se o deslocamento transversal pela expansão (6.16) com $N=0$ e aumentando o número de modos radiais (M = 1, 2 e 3).

Para obtenção dos resultados numéricos, considera-se a força com amplitude excitação P_o = 1 N/m^2. A variação das amplitudes modais A_{i0} com a freqüência de vibração é apresentada na Figura 6.21.

Novamente, os resultados mostram que as amplitudes dos modos A_{20} e A_{30} são muito pequenas quando comparadas com A_{10}. A partir destas respostas e da obtida pelo método de Karhunen-Loevè verifica-se que um modelo reduzido com apenas um grau de liberdade (expansão 1, com M = 1) é suficiente para se obter respostas corretas sob grandes deslocamentos. Os demais resultados são calculados utilizando essa expansão com um modo axissimétrico.

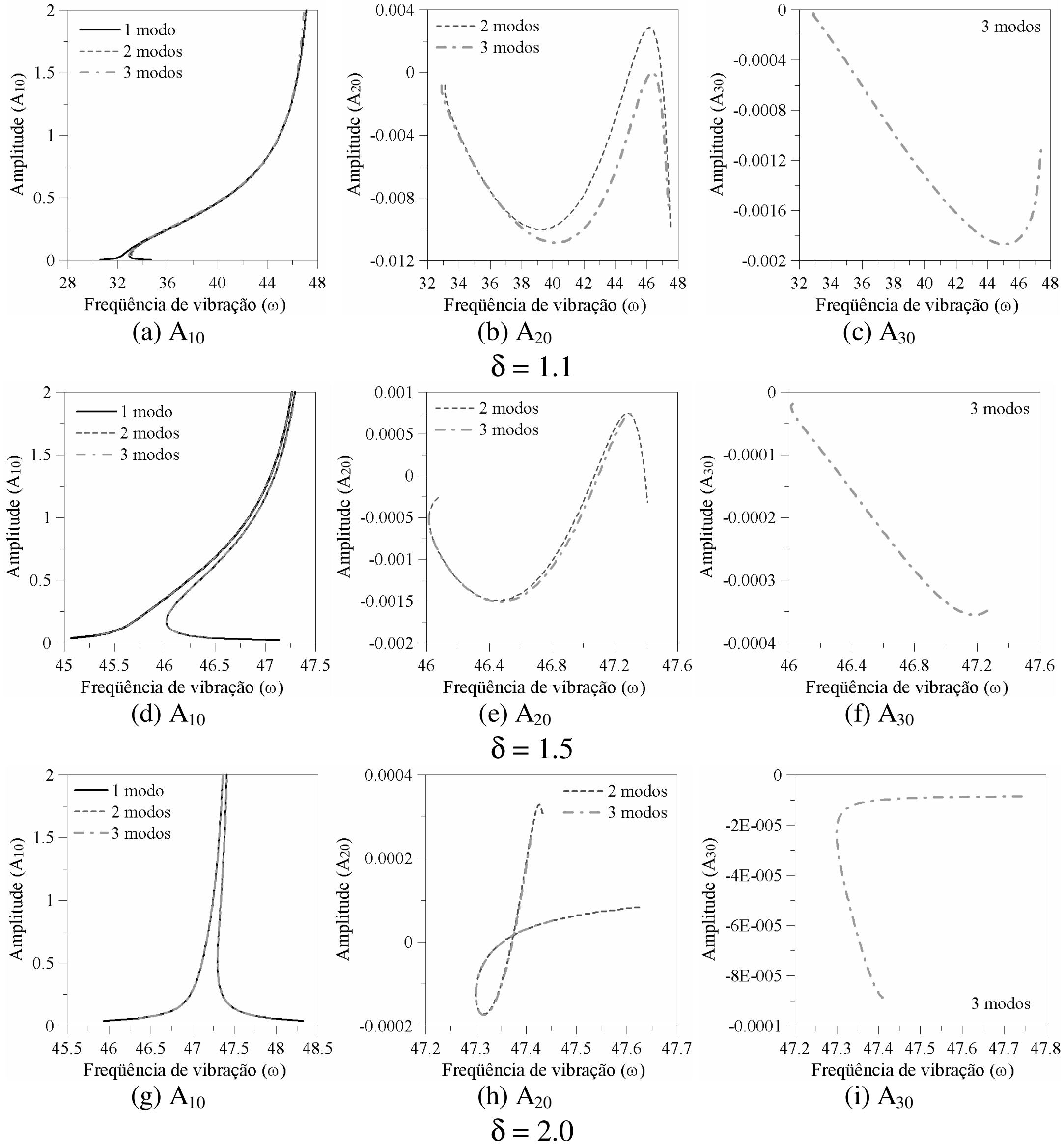


Figura 6.21 – Curva de ressonância não linear da membrana anular ($\rho_o = 0.20\ m$).

Na Figura 6.22 apresenta-se a curva de ressonância (freqüência-deslocamento transversal) para um ponto de coordenadas (0.5; 0) da membrana indeformada com diferentes valores de δ e $\rho_o = 0.20\ m$. Observa-se que as curvas tendem a um mesmo valor constante para grandes amplitudes de vibração

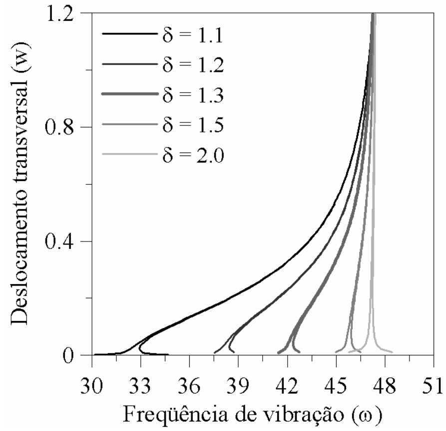


Figura 6.22 – Relação freqüência (rad/s) - deslocamento transversal (m) para a vibração forçada da membrana anular com diferentes δ (ρ_o = 0.20 m).

Na Figura 6.23 apresenta-se a curva de ressonância (freqüência-deslocamento transversal) para um ponto de coordenadas (0.5; 0) da membrana indeformada com diferentes valores do raio interno. Observa-se que as curvas apresentam o mesmo tipo de comportamento *hardening*, sendo que o grau de não-linearidade cresce com ρ_o no intervalo analisado.

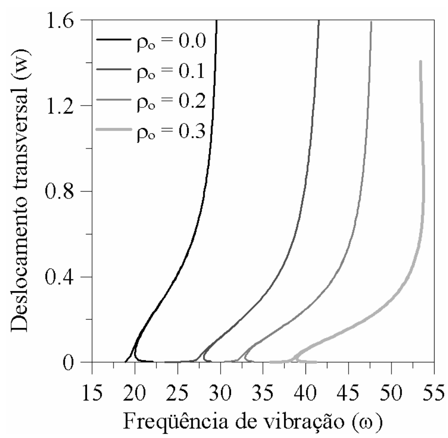
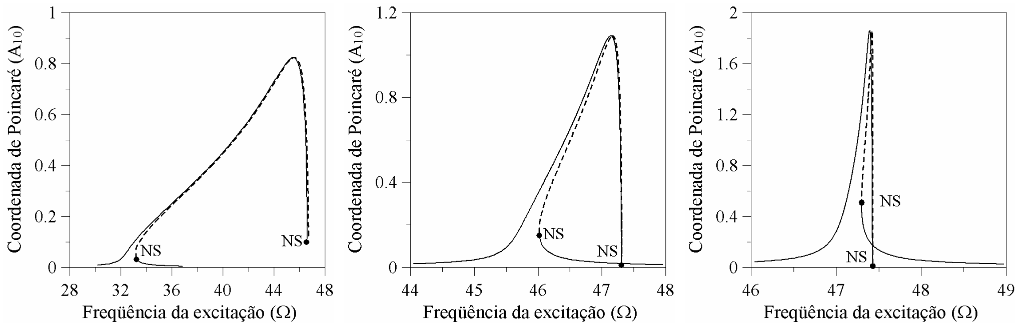


Figura 6.23 – Relação freqüência (rad/s) - deslocamento transversal (m) para a vibração forçada da membrana anular com diferentes δ.

O método de continuação é utilizado para o cálculo dos diagramas de bifurcação do mapa de Poincaré da membrana anular tracionada com ρ_o = 0.20 m que são apresentadas na Figura 6.24, para três diferentes valores de tração radial e amplitude da excitação $P_o = 1$ N/m^2. As linhas contínuas representam posições de equilíbrio estáveis e as linhas tracejadas representam posições de equilíbrio instáveis.



(a) $\delta = 1.1$ (b) $\delta = 1.5$ (c) $\delta = 2.0$

Figura 6.24 – Diagramas de bifurcação. Coordenada de Poincaré A_{10} (*m*) como função da freqüência de excitação Ω (rad/s) ($P_o = 1$ *N/m²*; $\zeta = 0.05$; $\rho_o = 0.20$ *m*).

Observa-se na Figura 4.28 duas bifurcações nó-sela em cada caso e que com o aumento da tração radial, a não-linearidade da resposta diminui, diminuindo a região da freqüência onde as soluções instáveis existem e portanto a possibilidade de variações bruscas das amplitudes de vibração

Na Figura 6.25 apresenta-se os diagramas de bifurcação para valores crescentes de P_o para a membrana anular com $\rho_o = 0.20$ *m* e $\delta = 1.1$. Observa-se que todos os casos apresentam o mesmo tipo de comportamento *hardening* independente da magnitude da carga.

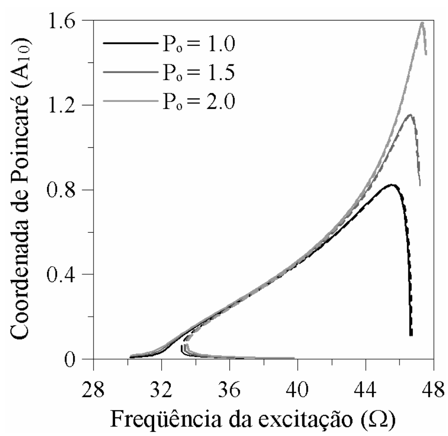
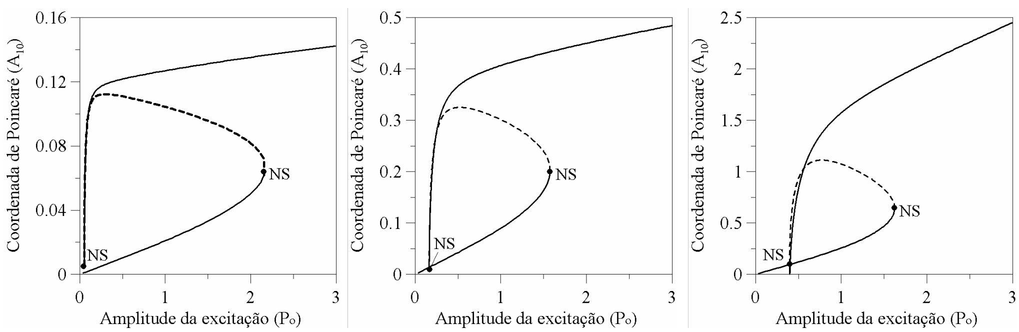


Figura 6.25 – Curvas de ressonância. Amplitude de vibração A_{10} (*m*) como função da freqüência de excitação Ω (rad/s) ($\zeta = 0.05$; $\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.20$ *m*).

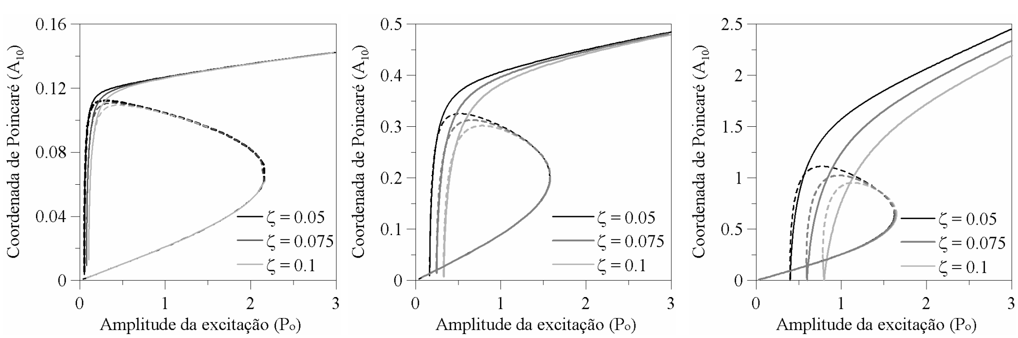
Na Figura 6.26 apresenta-se o diagrama de bifurcação em função da magnitude da força P_o, para valores selecionados da freqüência de excitação na região principal de ressonância, estando esta sempre à direita da freqüência natural da membrana pré-tensionada. Como no caso da membrana circular, observa-se a influência decrescente da não-linearidade com o aumento de relação δ para a membrana anular.



(a) $\delta = 1.1; \Omega = 33.50$ rad/s (b) $\delta = 1.5$; $\Omega = 46.10$ rad/s (c) $\delta = 2.0$; $\Omega = 47.35$ rad/s

Figura 6.26 – Diagramas de bifurcação para valores selecionados da freqüência de excitação. Coordenada de Poincaré A_{10} (m) como função da amplitude da excitação P_o (N/m^2).($\zeta = 0.05$; $\rho_o = 0.20$ m)

Diagramas de bifurcação que tem como parâmetro de controle a magnitude da força, P_o, para diferentes valores de amortecimento são apresentados na Figura 6.27. Verifica-se que a influência do amortecimento aumenta com o aumento da tração radial e que o amortecimento diminui a região onde a multiplicidade das soluções e os saltos entre as soluções estáveis co-existentes podem ocorrer.



(a) $\delta = 1.1$; $\Omega = 33.50$ rad/s (b) $\delta = 1.5$; $\Omega = 46.10$ rad/s (c) $\delta = 2.0$; $\Omega = 47.35$ rad/s

Figura 6.27 – Diagramas de bifurcação com diferentes valores de amortecimento. Coordenada de Poincaré A_{10} (m) como função da amplitude da excitação P_o (N/m^2). ($\rho_o = 0.20$ m).

Na Figura 6.28 apresentam-se diagramas de bifurcação em função da amplitude da excitação para diferentes valores da freqüência da excitação, para a membrana com $\delta = 1.1$ e $\rho_o = 0.20$ *m*.

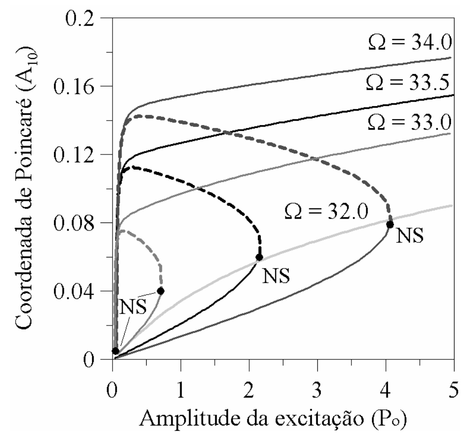
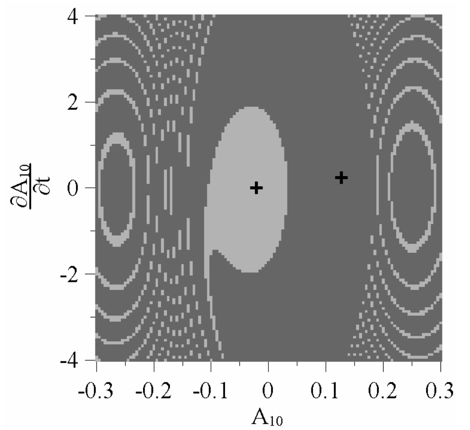


Figura 6.28 - Diagramas de bifurcação com diferentes valores da freqüência de excitação Ω. Coordenada de Poincaré A_{10} (*m*) em função da amplitude da excitação P_o (N/m^2) ($\delta = 1.1$; $\zeta = 0.05$; $\rho_o = 0.20$ *m*)

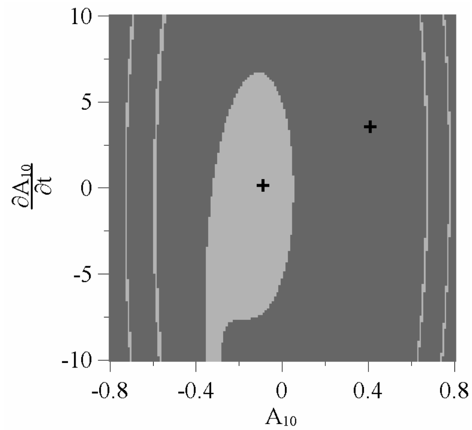
Dependendo do valor de P_o e Ω, a membrana pode exibir uma ou três respostas. Para valores de Ω próximos à menor freqüência natural, há duas soluções estáveis e uma instável para uma grande faixa de P_o. Os ramos estáveis e instáveis estão conectados por bifurcações do tipo nó-sela. Para valores da freqüência de excitação distantes da região de ressonância só é observada uma resposta (estável).

Por fim, ilustra-se na Figura 6.29 as bacias de atração para três conjuntos de parâmetros escolhidos de tal modo que a resposta permaneça na região principal de ressonância. A Figura 6.29 corresponde à bacia de atração no plano fase $A_{10} \times \dot{A}_{10}$ e as cores diferentes correspondem aos atratores distintos: a cor cinza escuro corresponde à bacia de atração da oscilação de grande amplitude e a cor cinza claro corresponde à oscilação de pequena amplitude. Os atratores são realçados por uma cruz preta nas bacias de atração.

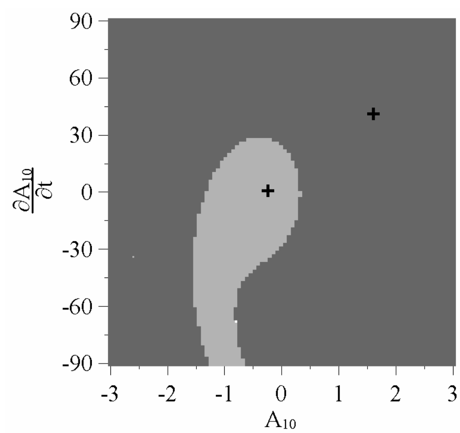
Observa-se neste caso o mesmo comportamento notado para a membrana circular, ou seja, com o aumento da tração radial a complexidade da topologia da bacia diminui com um número menor de faixas claras e escuras e que, na região principal de ressonância a maioria das condições iniciais conduz a soluções que convergem ao atrator de grande amplitude.



(a) $\delta = 1.1$; $\Omega = 33.50$ rad/s



(b) $\delta = 1.5$; $\Omega = 46.10$ rad/s



(c) $\delta = 2.0$; $\Omega = 47.35$ rad/s

Figura 6.29 – Bacia de atração no plano fase das condições iniciais A_{10} x $\dot{A}_{10}$ ($P_o = 1$ *N/m*^{2}; $\zeta = 0.05$; $\rho_o = 0.20$ *m*).

6.2. Variação da massa específica na direção radial da membrana anular

Neste ítem estuda-se a membrana anular com variação da massa específica na direção radial e comparam-se os resultados com os encontrados na literatura. Para isso, considera-se que a massa específica da membrana varia na direção radial da mesma forma que no capítulo 5, ou seja:

$$\Gamma(\rho) = \Gamma_o\,(1 + \kappa\rho^2) \tag{6.18}$$

onde Γ_o é um valor constante e κ é um valor constante conhecido que descreve a variação da massa específica ao longo do raio indeformado.

A resposta estática neste caso é a igual à apresentada no item 4.1, sendo $r_o(\rho)$ dado pela equação (4.1).

6.2.1.
Análise linear da vibração livre

A equação de movimento linear para a membrana anular com variação da massa específica é dada por:

$$
\begin{aligned}
&2C_1\left[\left(-1+\frac{\rho^2}{r_o'^4 r_o^2}\right)\frac{\partial^2 w(\rho,\theta,t)}{\partial\rho^2}+\left(-\frac{1}{\rho^2}+\frac{\rho^2}{r_o'^2 r_o^4}\right)\frac{\partial^2 w(\rho,\theta,t)}{\partial\theta^2}+\right.\\
&\left.+\left(-\frac{1}{\rho}-\frac{4\rho^2 r_o''}{r_o'^5 r_o^2}+\frac{3\rho}{r_o'^4 r_o^2}-\frac{2\rho^2}{r_o'^3 r_o^3}\right)\frac{\partial w(\rho,\theta,t)}{\partial\rho}\right]+\\
&+\Gamma_o(1+\kappa\rho^2)\left(\frac{\partial^2 w(\rho,\theta,t)}{\partial t^2}\right)=0
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

Como apresentado para vibração livre da membrana circular no capítulo 5, a equação de movimento linear (5.2) pode ser resolvida pelo método de separação das variáveis ρ, θ e t na equação (5.2) como apresentado em (5.3).

Substituindo (5.3) em (6.19), obtém-se a seguinte equação diferencial linear, em função da coordenada radial com coeficientes variáveis, semelhante à equação diferencial Whittaker (Abramowitz e Stegun, 1972):

$$
\begin{aligned}
&\left(-1+\frac{\rho^2}{r_o'^4 r_o^2}\right)\frac{d^2G(\rho)}{d\rho^2}+\left(-\frac{1}{\rho}-\frac{4\rho^2 r_o''}{r_o'^5 r_o^2}+\frac{3\rho}{r_o'^4 r_o^2}-\frac{2\rho^2}{r_o'^3 r_o^3}\right)\frac{dG(\rho)}{d\rho}\\
&+\left(\frac{\Gamma_o(1+\kappa\rho^2)\omega_{mn}^2}{2C_1}-\frac{n^2\rho^2}{r_o'^2 r_o^4}+\frac{n^2}{\rho^2}\right)G(\rho)=0
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

Utilizando a solução da equação diferencial de Whittaker (Abramowitz e Stegun, 1972) juntamente com as condições de contorno do problema, obtém-se a seguinte aproximação para o deslocamento transversal da membrana anular com variação da massa específica ao longo da direção radial:

$$w(\rho,\theta,t)=A_{mn}\left[M_n\left(\frac{-I}{4}\sqrt{\frac{K}{\kappa}};\frac{n}{2};\sqrt{K\kappa}\rho^2 I\right)-CW_n\left(\frac{-I}{4}\sqrt{\frac{K}{\kappa}};\frac{n}{2};\sqrt{K\kappa}\rho^2 I\right)\right]^* \frac{1}{\rho}\cos(n\theta)\cos(\omega_{mn}t) \tag{6.21}$$

sendo:

$$K=\frac{\Gamma_o k_{mn}\left(r_o'(R_o)\right)^3 R_f{}^3}{2\,C_1 R_o\left(R_f{}^2\left(r_o'(R_o)\right)^4-R_o{}^2\right)} \tag{6.22}$$

$$C=\frac{M_n\left(\frac{-I}{4}\sqrt{\frac{K}{\kappa}};\frac{n}{2};\sqrt{K\kappa}\rho_o{}^2 I\right)}{W_n\left(\frac{-I}{4}\sqrt{\frac{K}{\kappa}};\frac{n}{2};\sqrt{K\kappa}\rho_o{}^2 I\right)} \tag{6.23}$$

$$\begin{aligned}Z(k_{mn})=\;&W_n\left(\frac{-I}{4}\sqrt{\frac{K}{\kappa}};\frac{n}{2};\sqrt{K\kappa}\rho_o{}^2 I\right)M_n\left(\frac{-I}{4}\sqrt{\frac{K}{\kappa}};\frac{n}{2};\sqrt{K\kappa}R_o{}^2 I\right)-\\&M_n\left(\frac{-I}{4}\sqrt{\frac{K}{\kappa}};\frac{n}{2};\sqrt{K\kappa}\rho_o{}^2 I\right)W_n\left(\frac{-I}{4}\sqrt{\frac{K}{\kappa}};\frac{n}{2};\sqrt{K\kappa}R_o{}^2 I\right)\end{aligned} \tag{6.24}$$

onde A_{mn} corresponde à amplitude modal; M_n, à função hipergeométrica confluente Whittaker M; W_n, à função hipergeométrica confluente Whittaker W (Wolfram mathworld, 2008); m, ao número de semi-ondas radiais; n, ao número de ondas circunferenciais; k_{mn}, à m-ésima raiz de $Z(k_{mn})$; ω_{mn}, à freqüência de vibração e $r_o'(R_o)=\dfrac{dr_o(R_o)}{d\rho}$.

A função hipergeométrica confluente Whittaker do tipo W é dada por (Wolfram mathworld, 2008):

$$W_n(\alpha;\beta;x)=x^{0.5+\beta}e^{-x/2}U(\alpha;\beta;x) \tag{6.25}$$

onde $U(\alpha,\beta,x)_i$ é a função hipergeométrica confluente de segundo tipo.

Substitui-se o deslocamento transversal (6.21) na equação de movimento (6.19) e aplica-se o método de Galerkin. Da solução do problema de autovalor resultante, obtém-se a freqüência natural da membrana anular com massa específica variável.

As freqüências e os modos de vibração lineares foram calculados através da formulação analítica e comparados com os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos para uma membrana anular de raio interno $\rho_o = 0.20$.

Para a solução via método dos elementos finitos, utiliza-se uma malha com 2304 elementos de membrana M3D4R que gera um sistema com 7128 equações. Os resultados obtidos pela formulação analítica (AN) e por elementos finitos (MEF) para diferentes valores de κ são comparados na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 – Freqüências de vibração lineares (rad/s) para a membrana anular com massa específica variável na direção radial (ρ_o = 0.20 *m*).

$\kappa = -0.5$							
m	*n*	$\delta = 1.1$		$\delta = 1.5$		$\delta = 2.0$	
		AN	MEF	AN	MEF	AN	MEF
1	0	35.472	36.108	51.101	50.697	53.259	52.303
1	1	39.519	39.776	56.931	56.289	59.336	58.189
1	2	49.197	48.765	70.872	69.738	73.863	72.268
$\kappa = 0.5$							
m	*n*	$\delta = 1.1$		$\delta = 1.5$		$\delta = 2.0$	
		AN	MEF	AN	MEF	AN	MEF
1	0	29.486	29.759	42.254	41.888	44.038	43.235
1	1	32.462	32.599	46.765	46.215	48.740	47.787
1	2	39.720	39.366	57.220	56.307	59.636	58.340
$\kappa = 0.595$							
m	*n*	$\delta = 1.1$		$\delta = 1.5$		$\delta = 2.0$	
		AN	MEF	AN	MEF	AN	MEF
1	0	29.038	29.305	41.216	41.256	42.536	42.584
1	1	31.925	32.089	45.533	45.497	47.039	47.045
1	2	38.703	38.709	55.554	55.367	57.466	57.366

Observa-se que os valores das freqüências obtidos pelos dois métodos são concordantes, tendo uma menor variação nos primeiros modos de vibração.

Os modos de vibração possuem a mesma forma que os apresentados na Figura 6.9.

Os valores para o parâmetro de freqüência, $\overline{\omega} = \omega_{mn}\sqrt{\dfrac{\Gamma_o\left(r_o'(R_o)\right)^3 {R_f}^3}{2C_1({R_f}^2\left(r_o'(R_o)\right)^4 - {R_o}^2)}}$, obtidos com os resultados deste trabalho são favoravelmente comparados com os resultados apresentados por Bala Subrahmanyam e Sujith (2001) na Tabela 6.4.

Tabela 6.4 – Parâmetro da freqüência de vibração $\overline{\varpi}$ para a membrana anular com massa específica variável na direção radial (ρ_o = 0.20 *m*).

$$\overline{\varpi} = \omega_{mn} \sqrt{\frac{\Gamma_o \left(r_o'(R_o)\right)^3 R_f^{\,3}}{2C_1 (R_f^{\,2} \left(r_o'(R_o)\right)^4 - R_o^{\,2})}}$$

κ	Bala *et al* (2001)	AN	MEF
0.5	3.4969	3.5155	3.5480
1.0	3.2431	3.2431	3.2873
1.5	3.0538	3.0358	3.0749

Na Figura 6.30 apresenta-se uma relação entre a freqüência de vibração e o coeficiente de tração radial (δ) da membrana para diferentes distribuições da massa específica. Observa-se que quanto maior o valor do coeficiente da massa específica (κ), ou seja, quanto maior a massa da membrana próximo ao bordo externo, menores são as freqüências de vibração.

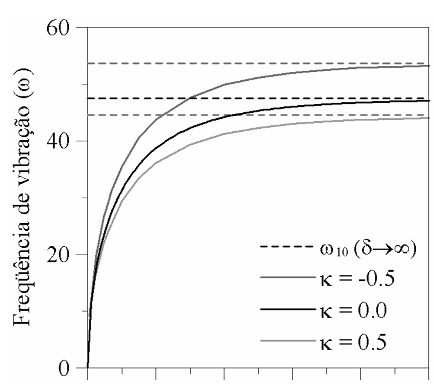
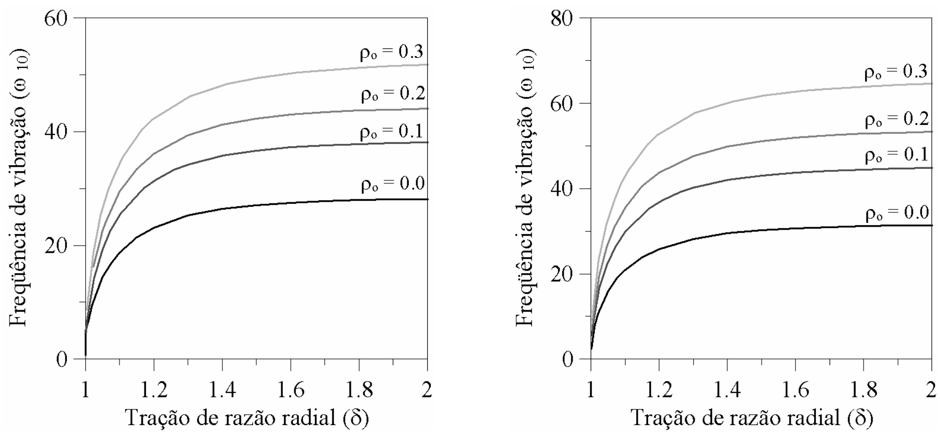


Figura 6.30 - Freqüência de vibração (ω_{10}) em função do coeficiente de tração radial para diferentes variações da massa específica (ρ_o = 0.20 *m*).

Apresenta-se na Figura 6.31 a variação da menor freqüência de vibração com δ para membranas com raio interno diferentes. Observa-se que, quanto maior o raio interno maiores são as freqüências.



$\kappa = 0.5$ $\kappa = -0.5$

Figura 6.31 - Freqüência de vibração (ω_{10}) em função do coeficiente de tração radial para diferentes valores do raio interno.

A relação entre a freqüência de vibração e o coeficiente de variação da massa específica (κ) da membrana para diferentes valores de δ é apresentada na Figura 6.32. Observa-se uma diminuição na freqüência natural com o aumento do valor do coeficiente de variação da massa específica e com δ.

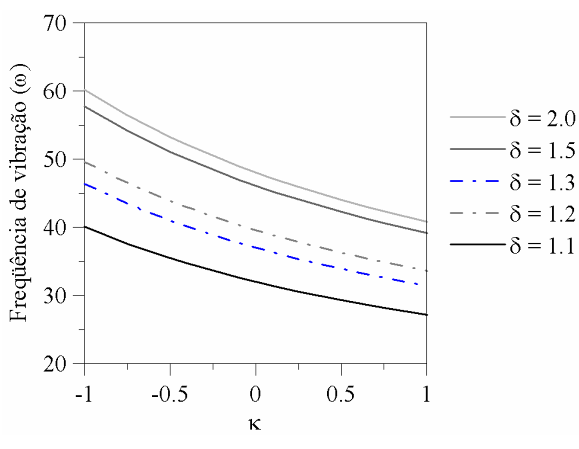


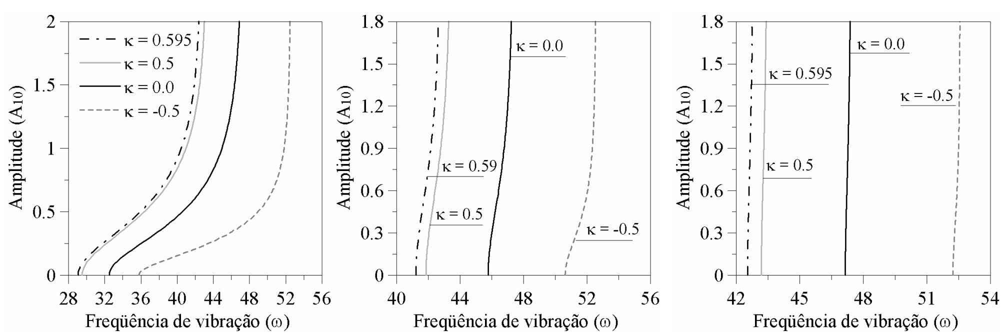
Figura 6.32 - Freqüência de vibração (rad/s)-coeficiente de variação da massa específica ($\rho_o = 0.20$ *m*).

6.2.2.
Análise não linear da vibração livre

Na análise das vibrações não lineares da membrana anular os deslocamentos *u* e *v* são desprezados e a equação de movimento não linear da direção transversal da membrana circular com massa específica variável é dada por:

$$-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial z_{,\rho}}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial z_{,\theta}}\right)+\rho\,\Gamma_o\,(1+\kappa\rho^2)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{6.26}$$

Então, aproxima-se a resposta não linear pela resposta linear (5.5) e utiliza-se o método de Galerkin-Urabe para se obter a relação freqüência de vibração-amplitude associada à menor freqüência natural (m = 1 e n = 0) que é apresentada na Figura 6.33 para diferentes valores do coeficiente de variação da massa específica κ. Observa-se que para valores crescentes de κ as freqüências de vibração aumentam, deslocando a curva para a direita.



δ = 1.1 δ = 1.5 δ = 2.0

Figura 6.33 - Relação freqüência (rad/s) - amplitude (m) para vibração livre da membrana anular com diferentes valores de κ (ρ_o = 0.20 m).

A relação normalizada freqüência – deslocamento transversal para um ponto de coordenadas (0; 0.5) da membrana indeformada, para diferentes valores de κ e com δ = 1.1 e ρ_o = 0.20 m é apresentada na Figura 6.34.

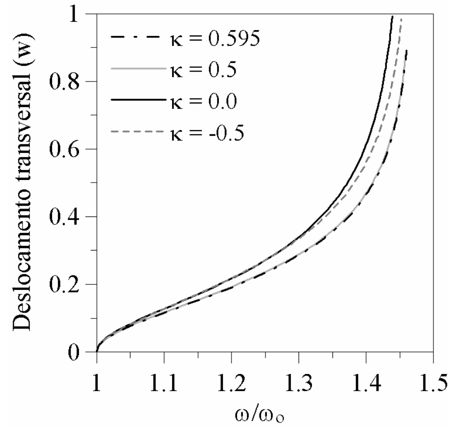


Figura 6.34 - Relação normalizada freqüência – deslocamento transversal (*m*) da membrana anular (δ = 1.10; ρ_o = 0.20 *m*).

Observa-se que para pequenos deslocamentos as curvas com diferentes valores de κ se sobrepõe, mas tendem a diferentes valores de ω/ω_o à medida que *w* cresce. Verifica-se que a menor não-linearidade ocorre para a membrana de densidade constante (κ = 0.0).

Na Figura 6.35 ilustra-se relação freqüência de vibração - amplitude modal para diferentes valores da razão de tração radial com κ = 0.5.

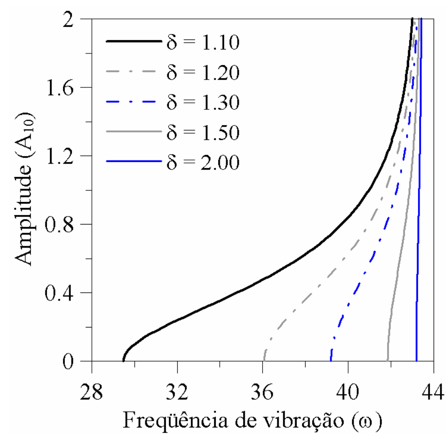


Figura 6.35 - Relação freqüência (rad/s) – amplitude (*m*) para vibração livre da membrana anular com diferentes valores de δ (κ = 0.5; ρ_o = 0.20 *m*)

Verifica-se, para a membrana anular, o mesmo tipo de comportamento *hardening* notado para a membrana circular.

Na Figura 6.36 mostra-se a relação normalizada freqüência-deslocamento da membrana com diferentes valores de δ. Novamente, observa-se que, quanto mais tracionada a membrana, menor o grau de não-linearidade da resposta.

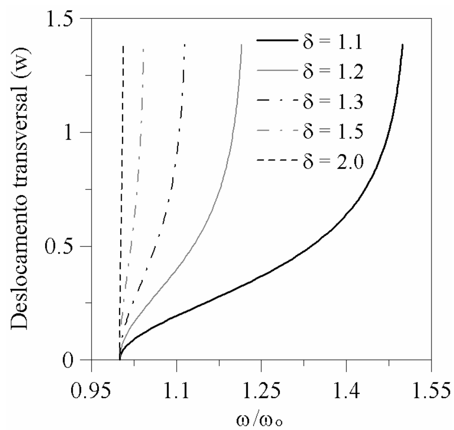
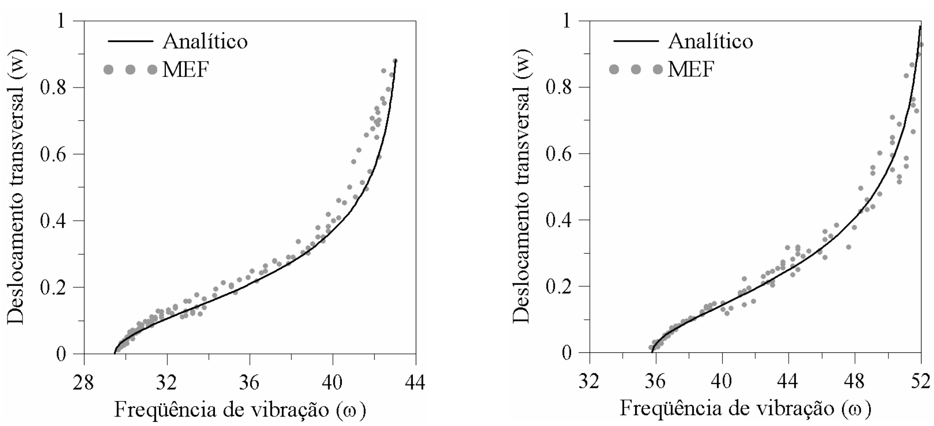


Figura 6.36 - Relação normalizada freqüência – deslocamento transversal (*m*) da membrana anular ($\kappa = 0.5$; $\rho_o = 0.20$ *m*).

A relação freqüência – deslocamento também é obtida a partir da resposta no tempo, encontrada por elementos finitos. Essa relação é favoravelmente comparada com a relação obtida analiticamente, para um ponto de coordenadas (0.5; 0) da membrana indeformada, para duas variações da massa específica. Esses resultados são apresentados na Figura 6.37.



κ = 0.5 κ = -0.5

Figura 6.37 - Relação freqüência de vibração (rad/s) - deslocamento transversal (*m*) ($\delta = 1.10$; $\rho_o = 0.20$ *m*)

Para a solução por elementos finitos é utilizado um modelo com uma malha com 2880 elementos de casca S4R e S3 que gera um sistema com 8643 equações.

6.3. Variação da espessura na direção radial da membrana anular

Para a membrana com espessura variável considerou-se que a variação da espessura na direção radial da configuração indeformada é dado por:

$$h(\rho) = h_o \exp(\eta \rho^2) \tag{6.27}$$

onde, como no capítulo 5, h_o é um valor de referência e η é uma constante que descreve a variação da espessura ao longo do raio indeformado.

6.3.1. Análise estática

A solução estática da membrana com espessura variável sob deslocamento radial uniforme é obtida através da integração numérica das equações (3.36) e (3.37) atendendo as condições de contorno (3.38) e (3.39).

Para a solução via método dos elementos finitos, utiliza-se, no programa comercial Abaqus®, 1152 elementos sólidos tri-dimensionais C3D8RH que gera um sistema com 8496 equações.

Dessa forma, obteve-se a configuração tracionada da membrana anular com raio interno $\rho_o = 0.20$ *m* e diferentes valores de δ. Na Figura 6.38 apresenta-se a variação do comprimento radial tracionado obtido pela integração numérica (IN) e pelo método dos elementos finitos (MEF), para membranas anulares com três valores de δ e coeficiente de variação da espessura $\eta = 0.5$.

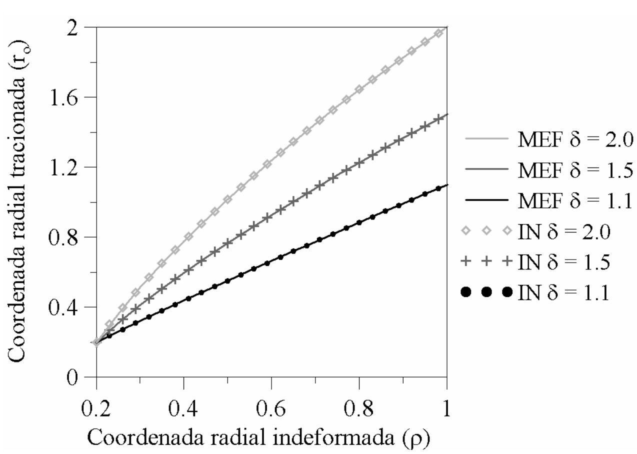
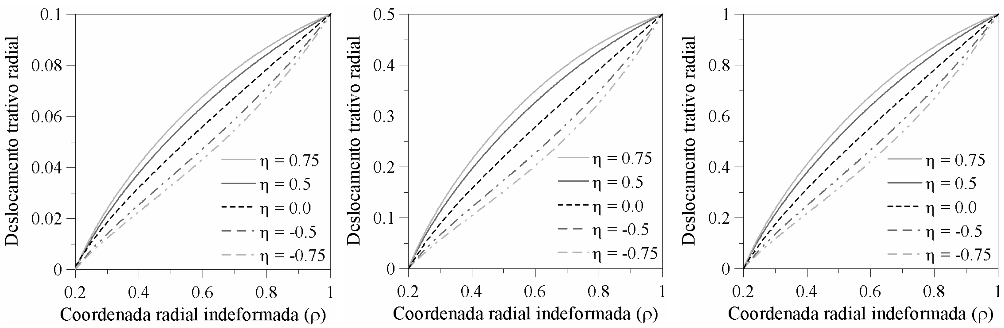


Figura 6.38 – Variação do comprimento radial tracionado da membrana anular com espessura variável ($\eta = 0.5$; $\rho_o = 0.20$ *m*).

Para visualizar a influência da variação radial da espessura ao longo do raio tracionado (r_o), apresenta-se na Figura 6.39 a variação do deslocamento radial após a aplicação da tração radial na membrana anular para diferentes valores do coeficiente de variação da espessura. Os valores apresentados são os obtidos pela integração numérica.



$\delta = 1.1$ $\delta = 1.5$ $\delta = 2.0$

Figura 6.39 – Variação do deslocamento radial (m) da membrana anular com espessura variável para diferentes valores de η ($\rho_o = 0.20$ m).

Uma função que representa a variação da coordenada radial tracionada é então determinada através do método dos mínimos quadrados, sendo dada por:

$$r_o(\rho) = a_1\rho^2 + a_2\rho^2\ln(\rho) + a_3\rho + a_4\ln(\rho) + a_5 \tag{6.28}$$

onde a_i são constantes que dependem da configuração tracionada da membrana.

As membranas anulares com raio interno $\rho_o = 0.20$ m apresentadas na Figura 6.39 apresentam as seguintes distribuições radiais:

$$\delta{=}1.1 \quad \begin{array}{ll} \eta = 0.75 & r_o(\rho) = 0.061\rho^2 - 0.072\rho^2\ln(\rho) + 0.944\rho + 0.056\ln(\rho) + 0.095 \\ \eta = 0.50 & r_o(\rho) = 0.095\rho^2 - 0.086\rho^2\ln(\rho) + 0.909\rho + 0.055\ln(\rho) + 0.096 \\ \eta = -0.50 & r_o(\rho) = 0.003\rho^2 + 0.057\rho^2\ln(\rho) + 1.071\rho + 0.0220\ln(\rho) + 0.025 \\ \eta = -0.75 & r_o(\rho) = -0.098\rho^2 + 0.157\rho^2\ln(\rho) + 1.219\rho + 0.050\ln(\rho) + 0.022 \end{array} \tag{6.29}$$

$$\delta{=}1.5 \quad \begin{array}{ll} \eta = 0.75 & r_o(\rho) = -0.011\rho^2 - 0.175\rho^2\ln(\rho) + 1.171\rho + 0.239\ln(\rho) + 0.340 \\ \eta = 0.50 & r_o(\rho) = 0.289\rho^2 - 0.332\rho^2\ln(\rho) + 0.809\rho + 0.246\ln(\rho) + 0.401 \\ \eta = -0.50 & r_o(\rho) = 0.050\rho^2 + 0.386\rho^2\ln(\rho) + 1.462\rho + 0.095\ln(\rho) + 0.088 \\ \eta = -0.75 & r_o(\rho) = -0.011\rho^2 + 0.974\rho^2\ln(\rho) + 2.304\rho + 0.001\ln(\rho) - 0.174 \end{array} \tag{6.30}$$

$$\delta = 2.0 \quad \begin{array}{ll} \eta = 0.75 & r_o(\rho) = 0.498\rho^2 - 0.706\rho^2 \ln(\rho) + 0.0676\rho + 0.513\ln(\rho) + 0.825 \\ \eta = 0.50 & r_o(\rho) = 0.619\rho^2 - 0.675\rho^2 \ln(\rho) + 0.636\rho + 0.459\ln(\rho) + 0.744 \\ \eta = -0.50 & r_o(\rho) = 0.153\rho^2 + 0.487\rho^2 \ln(\rho) + 1.585\rho + 0.219\ln(\rho) + 0.262 \\ \eta = -0.75 & r_o(\rho) = -0.586\rho^2 + 1.306\rho^2 \ln(\rho) + 2.673\rho + 0.086\ln(\rho) - 0.087 \end{array} \tag{6.31}$$

Os valores das tensões principais σ_1 e σ_2 da membrana anular com δ = 1.10 e diferentes valores do coeficiente de variação da espessura, obtidos através da integração numérica e por elementos finitos, são comparados favoravelmente na Figura 6.40.

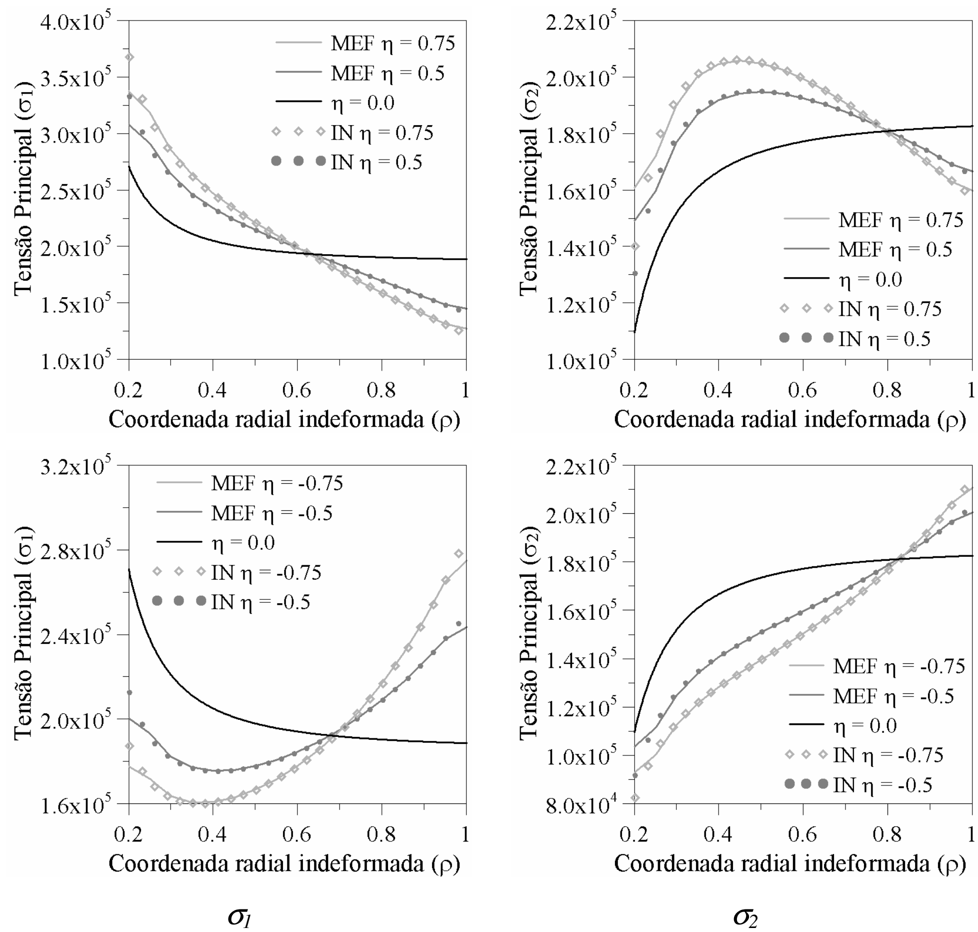


Figura 6.40 – Tensões principais (N/m^2) da membrana anular tracionada com espessura variável para diferentes valores de η. (δ = 1.10; ρ_o = 0.20 *m*).

Observa-se na Figura 6.40 que para uma variação com aumento da espessura,, ao longo da direção radial (η > 0), os valores das tensões principais diminuem em direção a borda externa da membrana. Enquanto que, para uma variação com diminuição da espessura na direção radial (η < 0), os valores das tensões principais aumentam. Quanto maior é a variação de η, maior é a variação das tensões ao longo da direção radial. Observa-se neste caso uma variação de tensões bem mais complexa que nos casos anteriores.

6.3.2. Análise linear da vibração livre

Para a análise linear da vibração livre, parte-se da equação de movimento linear na direção transversal da membrana dada em (3.42) que para este caso se reduz à seguinte equação diferencial parcial com coeficientes variáveis:

$$\begin{aligned}
&2C_1\left[\left(-1+\frac{\rho^2}{r_o'^4 r_o^2}\right)\frac{\partial^2 w(\rho,\theta,t)}{\partial\rho^2}+\left(-\frac{1}{\rho^2}+\frac{\rho^2}{r_o'^2 r_o^4}\right)\frac{\partial^2 w(\rho,\theta,t)}{\partial\theta^2}+\right.\\
&\left.+\left(-\frac{1}{\rho}-\frac{4\rho^2 r_o''}{r_o'^5 r_o^2}+\frac{3\rho}{r_o'^4 r_o^2}-\frac{2\rho^2}{r_o'^3 r_o^3}+\frac{2\rho^3\eta}{r_o'^4 r_o^2}-2\rho\eta\right)\frac{\partial w(\rho,\theta,t)}{\partial\rho}\right]+\\
&+\Gamma\left(\frac{\partial^2 w(\rho,\theta,t)}{\partial t^2}\right)=0
\end{aligned} \tag{6.32}$$

onde r_o é dado por (6.28).

Novamente, utiliza-se da mesma metodologia de separação de variáveis, usada para a membrana circular e apresentada no capítulo 5. Dessa forma, obtém-se uma equação semelhante à equação diferencial de Whittaker (Abramowitz e Stegun, 1972), dada em (5.16). Utilizando a solução da equação diferencial de Whittaker juntamente com as condições de contorno do problema obtém-se a seguinte aproximação para o deslocamento transversal da membrana circular:

$$\begin{aligned}
&w(\rho,\theta,t)=A_{mn}\cos(n\theta)\cos(\omega_{mn}t)\,\frac{e^{-0.5\eta\rho^2}}{\rho}\,*\\
&\left[M_n\left(\frac{-1}{2}-\frac{\Gamma b_{mn}}{4B\eta};\frac{n}{2};-\eta\rho^2\right)-C\,W_n\left(\frac{-1}{2}-\frac{\Gamma b_{mn}}{4B\eta};\frac{n}{2};-\eta\rho^2\right)\right]
\end{aligned} \tag{6.33}$$

sendo:

$$B = \frac{\left(r_o'(R_o)\right)^3 R_f{}^3}{2\, C_1 R_o (R_f{}^2 \left(r_o'(R_o)\right)^4 - R_o{}^2)} \tag{6.34}$$

$$C = \frac{M_n\left(\dfrac{-1}{2} - \dfrac{\Gamma b_{mn}}{4B\eta}; \dfrac{n}{2}; -\eta\rho_o{}^2\right)}{W_n\left(\dfrac{-1}{2} - \dfrac{\Gamma b_{mn}}{4B\eta}; \dfrac{n}{2}; -\eta\rho_o{}^2\right)} \tag{6.35}$$

$$\begin{aligned} Z(b_{mn}) = Wn\left(\frac{-1}{2} - \frac{\Gamma b_{mn}}{4B\eta}; \frac{n}{2}; -\eta\rho_o{}^2\right) M_n\left(\frac{-1}{2} - \frac{\Gamma b_{mn}}{4B\eta}; \frac{n}{2}; -\eta R_o{}^2\right) - \\ M_n\left(\frac{-1}{2} - \frac{\Gamma b_{mn}}{4B\eta}; \frac{n}{2}; -\eta\rho_o{}^2\right) W_n\left(\frac{-1}{2} - \frac{\Gamma o_{mn}}{4B\eta}; \frac{n}{2}; -\eta R_o{}^2\right) \end{aligned} \tag{6.36}$$

onde A_{mn} corresponde à amplitude modal; M_n é a função hipergeométrica confluente Whittaker M; W_n é a função hipergeométrica confluente Whittaker W; m, o número de semi-ondas radiais; n, o número de ondas circunferenciais; b_{mn} é a m-ésima raiz de $Z(b_{mn})$; ω_{mn} é a freqüência de vibração e $r_o'(R_o) = \dfrac{dr_o(R_o)}{d\rho}$.

Substitui-se o deslocamento transversal (6.33) na equação de movimento (6.32), aplica-se o método de Galerkin e da solução do problema de auto-valor resultante obtêm-se as freqüências naturais da membrana anular com espessura variável.

As freqüências e os modos de vibração lineares são comparados com os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos. Para a solução via método dos elementos finitos, utiliza-se a mesma malha empregada na análise estática com elementos sólidos tri-dimensionais C3D8RH. Os resultados analíticos (AN) e obtidos por elementos finitos (MEF) são comparados na Tabela 6.5

Apresenta-se na Figura 6.41 a variação da freqüência de vibração ω_{10} com a tração radial (δ) da membrana para três diferentes leis de variação da espessura. Novamente, observa-se um grande aumento na freqüência natural para pequenos valores de δ.

Tabela 6.5 – Freqüências de vibração lineares (rad/s) para a membrana anular com raio interno ρ_o = 0.20 *m* e espessura variável na direção radial.

				$\eta = -0.75$			
m	*n*	$\delta = 1.1$		$\delta = 1.5$		$\delta = 2.0$	
		AN	MEF	AN	MEF	AN	MEF
1	0	31.129	31.015	44.079	43.301	45.936	44.948
1	1	34.079	34.052	47.719	48.147	49.522	50.205
1	2	41.982	41.512	59.632	59.634	62.161	62.461
				$\eta = -0.5$			
m	*n*	$\delta = 1.1$		$\delta = 1.5$		$\delta = 2.0$	
		AN	MEF	AN	MEF	AN	MEF
1	0	31.701	31.639	44.563	44.190	46.121	45.665
1	1	34.702	34.726	48.719	49.045	50.367	50.884
1	2	42.636	42.270	60.580	60.536	62.863	63.061
				$\eta = 0.5$			
m	*n*	$\delta = 1.1$		$\delta = 1.5$		$\delta = 2.0$	
		AN	MEF	AN	MEF	AN	MEF
1	0	33.190	33.034	46.902	46.804	48.771	48.814
1	1	35.920	36.204	52.126	51.595	54.569	53.778
1	2	43.723	43.778	63.452	62.862	66.308	65.401
				$\eta = 0.75$			
m	*n*	$\delta = 1.1$		$\delta = 1.5$		$\delta = 2.0$	
		AN	MEF	AN	MEF	AN	MEF
1	0	33.472	32.224	47.416	47.518	49.603	49.628
1	1	35.911	36.284	52.744	52.186	55.769	54.526
1	2	43.631	43.802	63.874	63.235	67.284	66.096

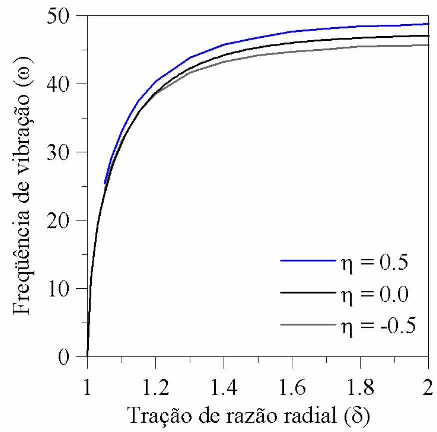


Figura 6.41 - Freqüência de vibração (rad/s) - razão de tração radial para diferentes variações da espessura da membrana anular ($\rho_o = 0.20$ *m*).

Na Figura 6.42 apresenta-se a influência do coeficiente de variação espessura (η) na menor freqüência de vibração da membrana com raio interno $\rho_o = 0.20$ *m*. Observa-se um aumento dos valores da freqüência natural com o aumento do valor de η. Isso ocorre devido ao aumento da espessura para valores crescentes de η e, conseqüentemente, da rigidez da membrana, o que proporciona um aumento da freqüência de vibração. Deve-se lembrar que ocorre também um aumento da massa que é, entretanto, compensada pelo maior aumento de rigidez.

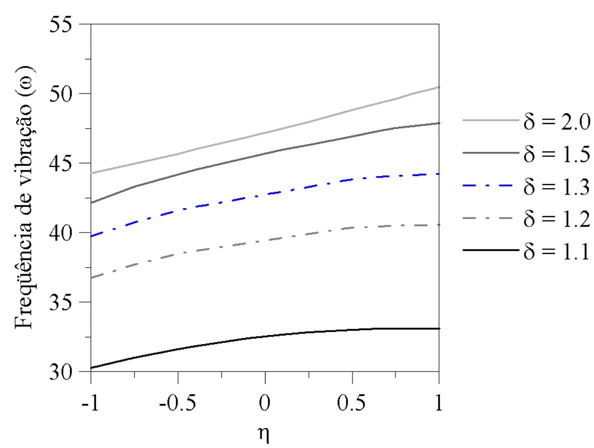


Figura 6.42 - Freqüência de vibração (rad/s) em função do coeficiente de variação da espessura η para diferentes valores de δ ($\rho_o = 0.20$ *m*).

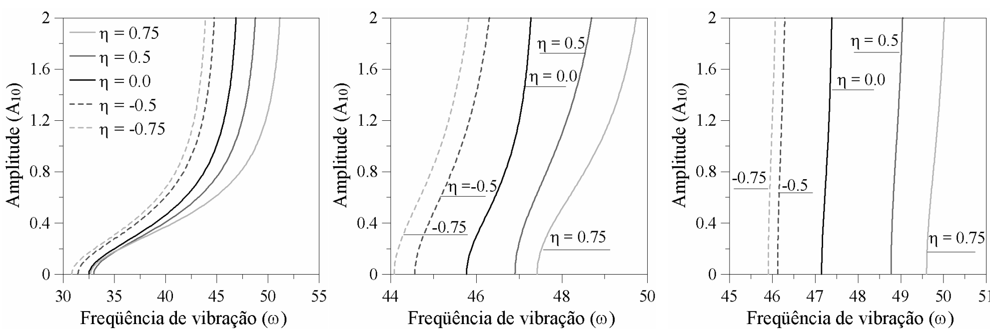
6.3.3.
Análise não linear da vibração livre

Desprezando os deslocamentos *u* e *v* com base nos resultados obtidos por elementos finitos, a equação de movimento não linear na direção transversal da membrana anular com espessura variável se reduz a:

$$-2\eta\,\rho\frac{\partial W}{\partial z_{,\rho}}-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial z_{,\rho}}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial z_{,\theta}}\right)+\rho\,\Gamma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{6.37}$$

Para a análise não linear aproxima-se a resposta não linear pela expressão (6.33) e utiliza-se o método de Galerkin-Urabe para se obter a relação freqüência de vibração-amplitude associada à menor freqüência natural (m = 1 e n = 0).

Essa relação é apresentada na Figura 6.43 para membrana anulares com raio interno $\rho_o = 0.20$ *m* e com diferentes valores do coeficiente de variação da espessura η. Observa-se que, para valores crescentes de η, as freqüências de vibração aumentam deslocando a curva para a direita.



$\delta = 1.1$ $\delta = 1.5$ $\delta = 2.0$

Figura 6.43 - Relação freqüência (rad/s) – amplitude (*m*) para vibração livre da membrana anular com diferentes valores de η (ρ_o = 0.20 *m*).

Na Figura 6.44 ilustra-se a relação freqüência de vibração-amplitude modal para diferentes valores da razão de tração radial com η = 0.5. Verifica-se o mesmo tipo de comportamento *hardening* observado nas membranas circulares.

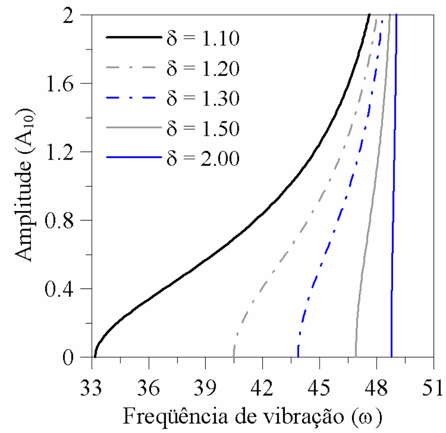


Figura 6.44 - Relação freqüência (rad/s) - amplitude (*m*) para vibração livre da membrana anular com diferentes valores de δ (η = 0.5; ρ_o = 0.20 *m*).

Na Figura 6.45 mostra-se a relação normalizada freqüência-deslocamento da membrana para um ponto de coordenadas (0; 0.5) da membrana indeformada com raio interno $\rho_o = 0.20$ *m*. Novamente verifica-se que, quanto mais tracionada a membrana, menor o grau de não-linearidade da resposta.

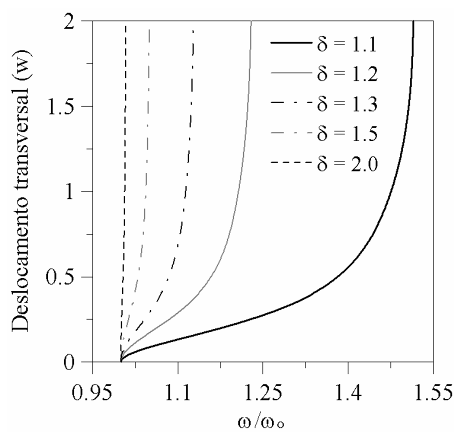


Figura 6.45 - Relação normalizada freqüência – deslocamento transversal (*m*) da membrana anular (η = 0.5; ρ_o = 0.20 *m*).

A relação normalizada freqüência-deslocamento transversal da membrana anular com raio interno $\rho_o = 0.20$ *m*, $\delta = 1.1$ e valores crescentes de η é apresentada na Figura 6.46. Observa-se que as curvas com diferentes valores de η se sobrepõe inicialmente, mas tendem a diferentes valores de $\omega/\ \omega_o$ à medida que o deslocamento transversal cresce. Nota-se que o grau de não-linearidade é uma função de η sendo a maior não-linearidade observada para η = 0.75.

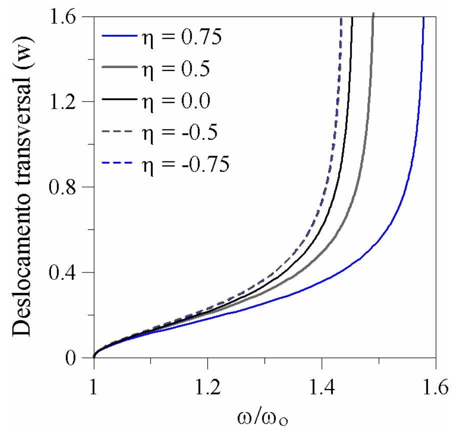


Figura 6.46 - Relação normalizada freqüência-deslocamento transversal (m) da membrana circular ($\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.20\ m$).

A relação freqüência-deslocamento também é obtida a partir da resposta no tempo obtida por elementos finitos juntamente com a metodologia proposta por Nandakumar e Chatterjee (2005) e é favoravelmente comparada com a relação obtida analiticamente, para um ponto de coordenadas (0.5; 0) da membrana indeformada e para duas variações da massa específica na Figura 6.47.

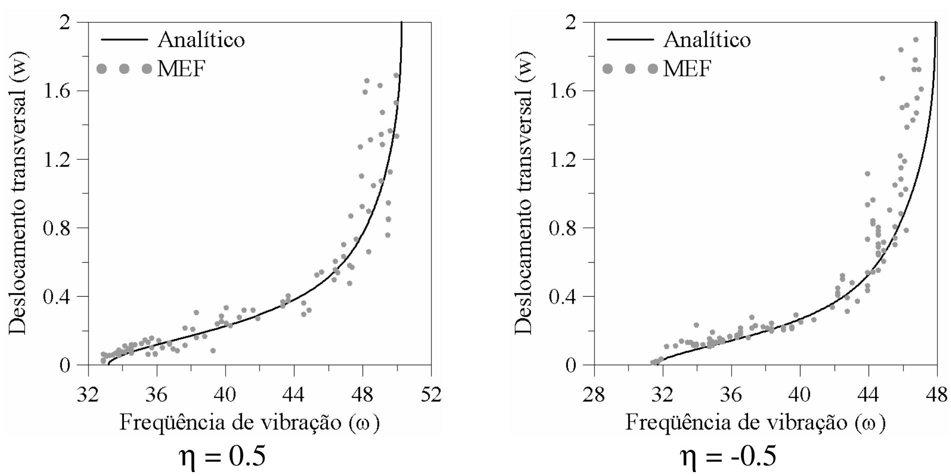


Figura 6.47 - Relação freqüência de vibração (rad/s) - deslocamento transversal (m) ($\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.20\ m$).

Como a membrana anular com coeficiente de variação da espessura $\eta = 0.5$ possui a mesma massa total que a membrana anular com coeficiente de variação de massa específica $\kappa = 0.595$, comparam-se as suas relações normalizadas freqüência-deslocamento na Figura 6.48. A freqüência de vibração foi normalizada com relação à freqüência natural de cada caso e o deslocamento apresentado é no ponto de coordenadas (0.5; 0) da membrana indeformada.

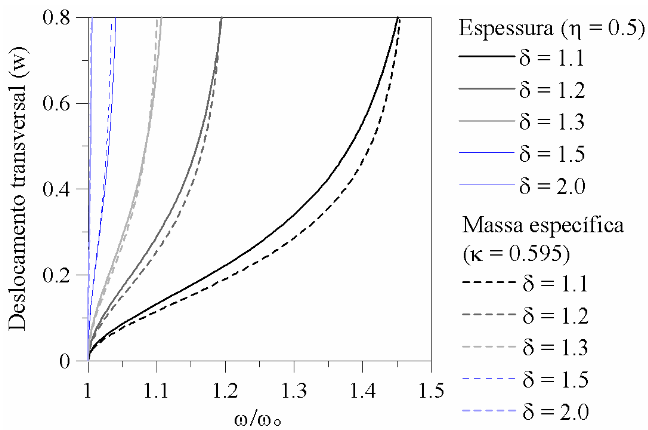


Figura 6.48 - Relação normalizada freqüência – deslocamento transversal (*m*) da membrana anular com variação de espessura e massa específica ($\rho_o = 0.20\ m$).

Observa-se que, apesar da massa da membrana ser a mesma, os resultados do deslocamento não se sobrepõe, mas possuem valores bem próximos e com o mesmo comportamento global, sendo maior a não-linearidade observada para a variação da massa específica.

6.3.4. Análise não linear da vibração forçada

Novamente considera-se a vibração transversal axissimétrica provocada por uma pressão hidrostática uniforme dependente do tempo *P(t)* e os campos de deslocamentos radial *u* e circunferencial *v* desprezíveis.

Assim, a equação de movimento não linear da membrana anular com espessura variável sob vibração forçada axissimétrica é dada por:

$$-2\eta\,\rho\frac{\partial W}{\partial z_{,\rho}}-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial z_{,\rho}}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial z_{,\theta}}\right)+\rho\,\Gamma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\zeta\,C_c\frac{\partial w}{\partial t}-P(t)r_o\frac{dr_o}{d\rho}=0 \quad (6.38)$$

onde a pressão excitadora *P(t)* é dada em (4.29).

Como a vibração axissimétrica transversal é associada ao primeiro modo axissimétrico ($n = 0$ e $m = 1$), utiliza-se o deslocamento transversal (6.33) aproximado com $N = 0$ e aumentando o número de modos radiais (M = 1, 2 e 3).

Para obtenção dos resultados numéricos, consideram-se a força com amplitude excitação de $P_o = 1\ N/m^2$. A relação freqüência de vibração-amplitude é apresentada na Figura 6.49 para diferentes valores do coeficiente de variação da espessura η.

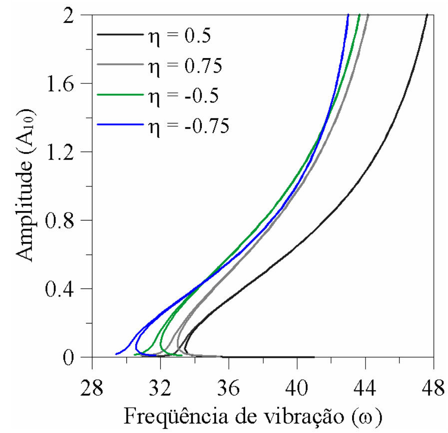
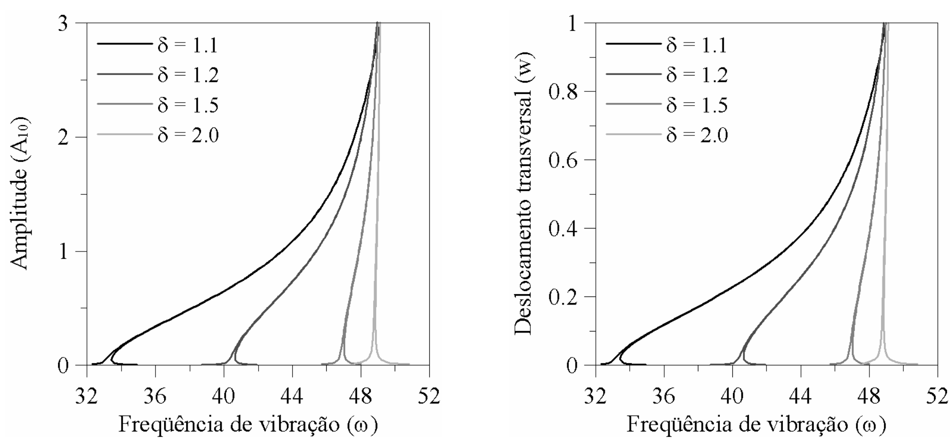


Figura 6.49 - Relação freqüência (rad/s) – amplitude (m) para vibração forçada da membrana anular com diferentes valores de η ($\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.20$ m).

As curvas de ressonância para diferentes valores de δ são apresentadas na Figura 6.50 para uma variação da espessura com $\eta = 0.5$. Observa-se que as curvas tendem a um mesmo valor constante para grandes amplitudes de vibração.



(a) Amplitude (b) Deslocamento transversal

Figura 6.50 – Curva de ressonância para a vibração forçada da membrana anular com espessura variável com diferentes δ. ($\eta = 0.5$; $\rho_o = 0.20$ m)

O método de continuação é utilizado para o cálculo dos diagramas de bifurcação do mapa de Poincaré da membrana anular tracionada. Os diagramas de bifurcação são apresentadas na Figura 6.51, para uma membrana anular com $\rho_o = 0.20$ m, $\delta = 1.1$ considerando $P_o = 1$ N/m^2 e três diferentes valores de η.

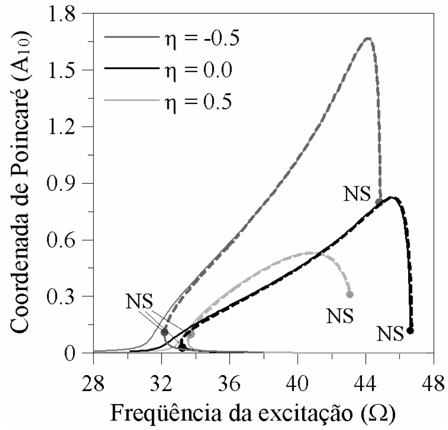
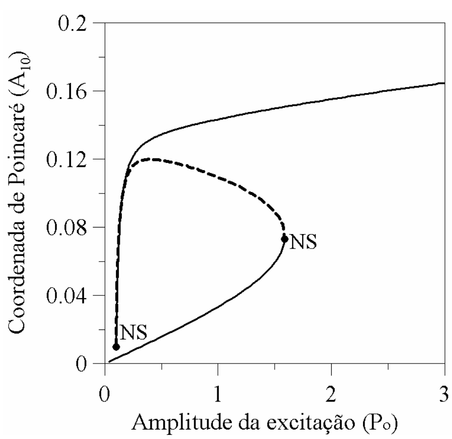


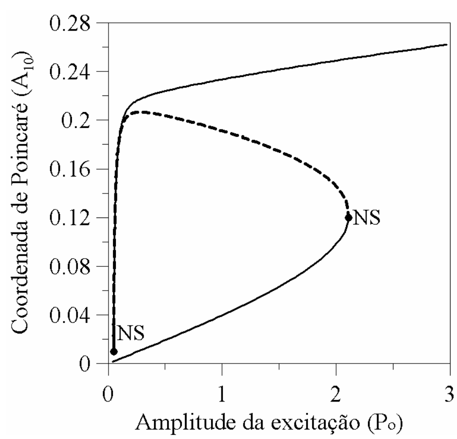
Figura 6.51 – Diagrama de bifurcação. Coordenada de Poincaré A_{10} (*m*) como função da freqüência de excitação Ω (rad/s) (P_o = 1 *N/m*^{2}; ζ = 0.05; δ = 1.1; ρ_o = 0.20 *m*).

Observa-se que, dependendo do valor de P_o e Ω, a membrana pode exibir uma ou três respostas e que os ramos estáveis e instáveis estão conectados por bifurcações do tipo nó-sela (NS nas figuras).

Na Figura 6.52 apresenta-se o diagrama de bifurcação que tem como parâmetro de controle a magnitude da força P_o para valores selecionados de Ω na região principal de ressonância e dois valores de η. Observam-se em cada caso duas bifurcações do tipo nó-sela e que para o caso onde η = 0.5 a faixa da magnitude da carga onde as soluções instáveis existem é menor.



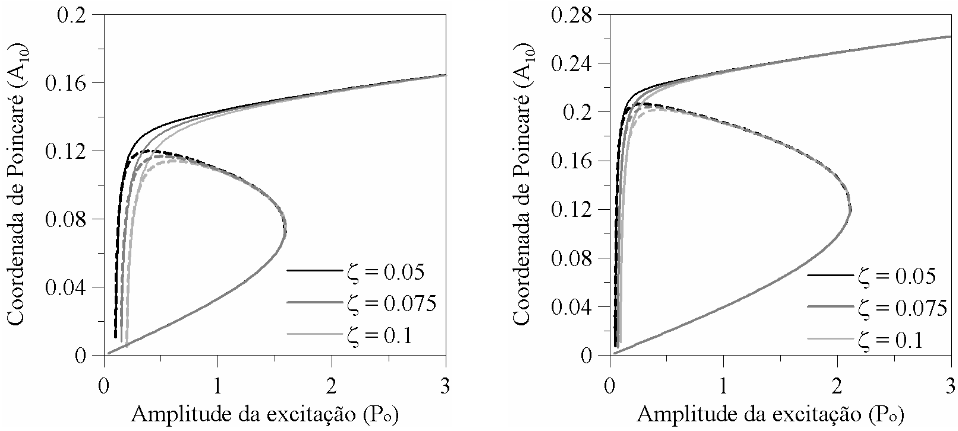
(a) Ω = 33.7 rad/s; η = 0.5



(b) Ω = 32.5 rad/s; η = -0.5

Figura 6.52 – Diagramas de bifurcação para valores selecionados da freqüência de excitação. Coordenada de Poincaré A_{10} (*m*) como função da amplitude da excitação P_o (*N/m*^{2}) (ζ = 0.05; δ = 1.1; ρ_o = 0.20 *m*).

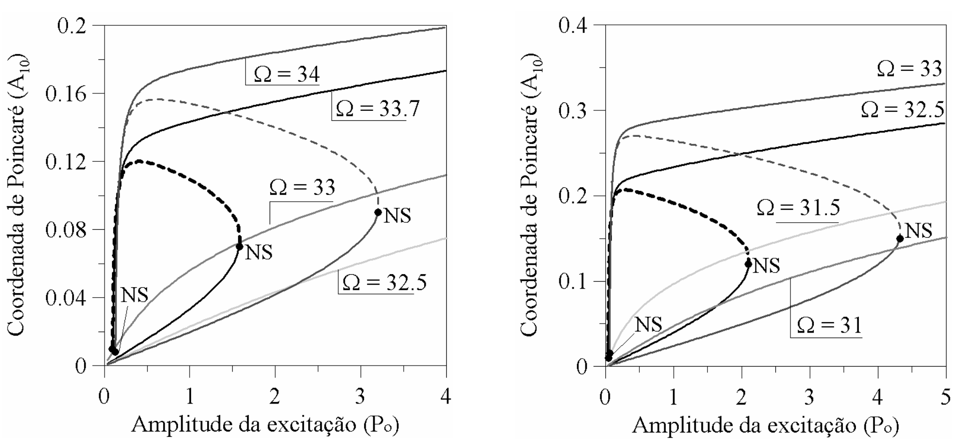
A influência do amortecimento é ilustrada na Figura 6.53 onde os diagramas de bifurcação são obtidos com diferentes valores de amortecimento. Observa-se o mesmo comportamento anteriormente observado para a membrana circular.



(a) δ = 1.1; Ω = 33.7 rad/s; η = 0.5 (b) δ = 1.1; Ω = 32.5 rad/s; η = -0.5

Figura 6.53 – Diagramas de bifurcação com diferentes valores de amortecimento. Coordenada de Poincaré A_{10} (*m*) como função da amplitude da excitação P_o (N/m^2) (ρ_o = 0.20 *m*).

Na Figura 6.54 apresenta-se diagramas de bifurcação em função da amplitude da excitação para diferentes valores da freqüência da excitação para a membrana anular com raio interno ρ_o = 0.20 *m*, δ = 1.1 e dois valores de η.

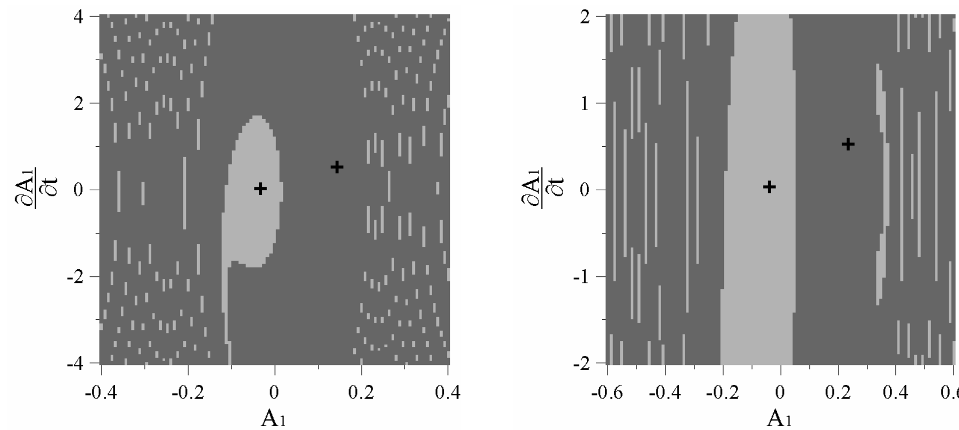


(a) η = 0.5 (b) η = -0.5

Figura 6.54 - Diagramas de bifurcação com diferentes valores da freqüência de excitação. Coordenada de Poincaré A_{10} (*m*) em função da amplitude da excitação P_o. (N/m^2) (δ = 1.1; ζ = 0.05; ρ_o = 0.20 *m*)

A Figura 6.55 ilustra as das bacias de atração para valores de parâmetros escolhidos de tal modo que a resposta permaneça na região principal de ressonância onde ocorrem três soluções. Essa figura corresponde à bacia de atração no plano fase $A_{10} \times \dot{A}_{10}$ e as cores diferentes correspondem aos atratores distintos (cinza escuro corresponde a bacia de atração da oscilação de grande amplitude e cinza claro corresponde a oscilação de pequena amplitude). Os atratores são realçados nas bacias pela cruz negra.

Nota-se que na região principal de ressonância a maioria das condições iniciais conduz a soluções que convergem para o atrator de maior amplitude.



(a) $\Omega = 33.7$ rad/s; $\eta = 0.5$ (b) $\Omega = 32.5$ rad/s; $\eta = -0.5$

Figura 6.55 – Bacia de atração no plano fase das condições iniciais $A_{10} \times \dot{A}_{10}$ ($P_o = 1\ N/m^2$; $\zeta = 0.05$; $\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.20$).