

7

Membrana anular com inclusão rígida

Neste capítulo é apresentado o estudo desenvolvido para uma membrana anular plana indeformada a qual é acoplada uma inclusão rígida em forma de disco. Como o material da membrana considerada é hiperelástico, utiliza-se a teoria da elasticidade para grandes deformações.

Inicialmente, apresenta-se a modelagem matemática do problema e, posteriormente, estuda-se o seu comportamento estático e dinâmico linear e não linear.

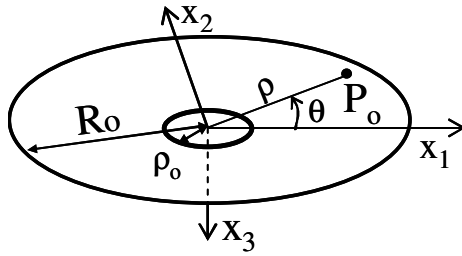
7.1.**Modelagem matemática**

Para a modelagem matemática, considera-se que a inclusão rígida produz, devido ao seu peso, deslocamentos estáticos transversais e axissimétricos na membrana, ou seja, o peso é transversal ao plano que contém a membrana indeformada. Nesta análise, considera-se além do peso da inclusão, a atuação de cargas transversais aplicadas no centro da inclusão rígida.

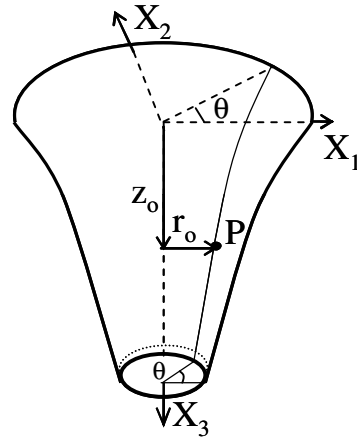
Utiliza-se uma formulação variacional e, através do princípio de Hamilton, obtêm-se as equações gerais de movimento e as condições de contorno para o problema.

Assim, seja uma membrana indeformada, anular e plana com uma inclusão central rígida na forma de um disco. A membrana possui espessura constante h e raio final indeformado R_o , sendo fixa em seu bordo externo, como ilustrado na Figura 7.1. A inclusão rígida possui raio ρ_o e espessura h_d .

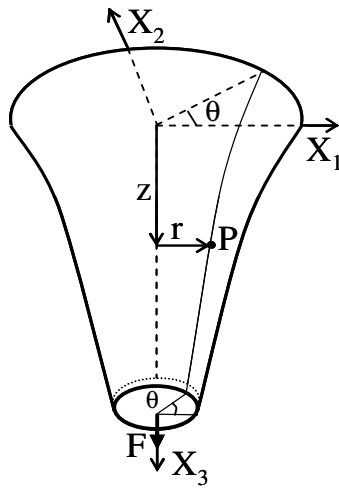
Posteriormente à aplicação da carga estática, perturba-se a membrana de forma axissimétrica, através da aplicação de uma carga transversal F (Figura 7.1-c), ou de forma assimétrica, através de um momento M (Figura 7.1-d).



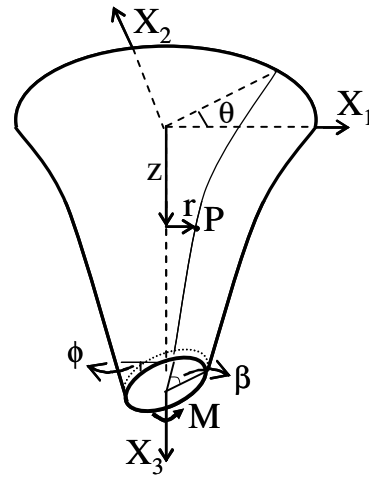
(a) Configuração indeformada



(b) Configuração deformada estática



(c) Perturbada axissimétrica



(d) Perturbada assimétrica

Figura 7.1 – Configurações da membrana anular acoplada a um disco rígido.

Dessa maneira, para um ponto P_0 na configuração indeformada, apresentada na Figura 7.1-a, tem-se:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \theta \\ x_2 &= \rho \sin \theta \\ x_3 &= x_3 \end{aligned} \quad (7.1)$$

onde ρ é a coordenada na direção radial da membrana indeformada, θ é a coordenada na direção circunferencial e x_3 é a coordenada na direção transversal à membrana.

Para o mesmo ponto na configuração deformada, após a tração e perturbação, tem-se:

$$\begin{aligned}
X_1 &= r(\rho, \theta, t) \cos \beta(\rho, \theta, t) \\
X_2 &= r(\rho, \theta, t) \sin \beta(\rho, \theta, t) \\
X_3 &= z(\rho, \theta, t)
\end{aligned} \tag{7.2}$$

onde r é o raio da membrana perturbada; β é a coordenada circunferencial da membrana perturbada; X_3 é a coordenada na direção transversal à membrana deformada e:

$$\begin{aligned}
r(\rho, \theta, t) &= r_o(\rho, \theta) + u(\rho, \theta, t) \\
\beta(\rho, \theta, t) &= \theta + \beta_o(\rho, \theta) + v(\rho, \theta, t) \\
z(\rho, \theta, t) &= z_o(\rho, \theta) + w(\rho, \theta, t)
\end{aligned} \tag{7.3}$$

onde $u(\rho, \theta, t)$, $v(\rho, \theta, t)$ e $w(\rho, \theta, t)$ representam os deslocamentos dependentes do tempo nas direções radial, circunferencial e transversal respectivamente; $r_o(\rho, \theta)$, $\beta_o(\rho, \theta)$ e $z_o(\rho, \theta)$ representam um ponto qualquer da membrana tracionada estaticamente nas direções radial, transversal e circunferencial, respectivamente.

Observa-se que as componentes das coordenadas nas duas configurações são idênticas às apresentadas no item 3.1 do capítulo 3. Dessa maneira, as extensões principais são dadas por (3.5) a (3.7), os tensores covariantes e contravariantes são dados por (3.9) a (3.12) e, finalmente, o primeiro invariante de deformação é dado por (3.13).

7.2.

Funcional de energia da membrana

Como a função de energia de deformação, W , pode ser descritas em função dos invariantes de deformação de superfície média da membrana, I_1 , I_2 e I_3 , obtém-se a função $W(r, r_\rho, r_\theta, z_\rho, z_\theta, \beta_\rho, \beta_\theta, \rho, \theta)$.

A energia elástica de deformação, U , é escrita como a integral volumétrica da função W , na configuração indeformada, sendo, para a membrana anular plana, dada por:

$$U = \int_{\rho_o}^{R_o} \int_0^{2\pi} \int_0^h W(\rho, r, r_\rho, r_\theta, z_\rho, z_\theta, \beta_\rho, \beta_\theta, \rho, \theta) \rho \, dz \, d\theta \, d\rho \tag{7.4}$$

O termo referente ao trabalho, W_e , realizado pelas forças externas é dado por:

$$W_e = P_e z|_{\rho=\rho_o} + F(t) z|_{\rho=\rho_o} + M(t) \phi \quad (7.5)$$

onde P_e é a força estática aplicada na direção transversal e $F(t)$ e $M(t)$ são uma força e um momento excitadores respectivamente, dependentes do tempo e ϕ é o deslocamento angular provocado pela aplicação de $M(t)$.

Na energia cinética, T , considera-se a influência da inclusão rígida, tendo-se:

$$\begin{aligned} T = & \int_{\rho_o}^{R_o} \int_0^{2\pi} h \Gamma \frac{(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)}{2} \rho \, d\theta \, d\rho + \int_0^{\rho_o} \int_0^{2\pi} h_d \Gamma_d \frac{(\dot{w}|_{\rho_o})^2}{2} \rho \, d\theta \, d\rho \\ & + h_d \Gamma_d \rho_o \int_0^{\rho_o} \int_0^{2\pi} \frac{\dot{\phi}^2}{2} h_d \sin(\theta) \, d\theta \, d\rho \end{aligned} \quad (7.6)$$

onde h e Γ são a espessura e a massa específica da membrana respectivamente; h_d e Γ_d são a espessura e a massa específica do disco rígido respectivamente; e $\dot{(\quad)} = \frac{\partial(\quad)}{\partial t}$.

O terceiro termo da energia cinética corresponde à força distribuída ao longo da extremidade interna da membrana, provocada pela inércia rotacional do disco rígido quando este é submetido a um momento.

A função que representa o amortecimento é dada por:

$$R_e = 2\omega_o \int_{\rho_o}^{R_o} \int_0^{2\pi} \int_0^h \zeta \Gamma \frac{\dot{w}}{2} \rho \, dz \, d\theta \, d\rho \quad (7.7)$$

onde ζ é o coeficiente de amortecimento e ω_o é a menor frequência natural do sistema.

Definidos os funcionais de energia, equações (3.14)-(3.18), chega-se à seguinte função de Lagrange:

$$L = T + R_e - U + W_e \quad (7.8)$$

Partindo da função de Lagrange e aplicando o princípio de Hamilton, chegam-se às equações diferenciais para cada caso particular analisado neste estudo.

7.3. Análise estática

Para a membrana anular plana submetida apenas a esforços de tração, as extensões principais podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\lambda_1 = \sqrt{\left(\frac{dr_o}{d\rho}\right)^2 + \left(\frac{dz_o}{d\rho}\right)^2} \quad (7.9)$$

$$\lambda_2 = \frac{r_o}{\rho} \quad (7.10)$$

$$\lambda_3 = \frac{\rho}{r_o \sqrt{r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2}} \quad (7.11)$$

onde r_o é o comprimento radial estático da membrana deformada, z_o é o comprimento transversal estático da membrana deformada, e $\frac{\partial(\)}{\partial\rho} = (\)_\rho$.

Neste caso, o primeiro invariante de deformação I_1 é definido por:

$$I_1 = r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2 + \frac{r_o^2}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{r_o^2 (r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)} \quad (7.12)$$

Dessa forma, a função energia de deformação pode ser descrita como $W = W(r_o, r_{o,\rho}, z_{o,\rho}, \rho)$.

Nesta análise consideram-se, primeiramente, os deslocamentos estáticos axissimétricos provocados pelo peso do disco rígido e pela aplicação de uma carga no centro do disco rígido. Têm-se então, um problema axissimétrico submetido a dois diferentes casos de carregamento:

- Caso 1: Apenas a força relativa ao peso do disco rígido ($P_e = P_d$);
- Caso 2: A força relativa ao peso do disco rígido (P_d) somada à uma força (p) de mesma intensidade, porém sem influência da massa do disco ($P_e = P_d + p$).

Aplicando-se o princípio da energia potencial estacionária, obtêm-se as equações de equilíbrio:

$$\rho \frac{\partial W}{\partial r_o} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial W}{\partial r_{o,\rho}} \right) = 0 \quad (7.13)$$

$$- \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial W}{\partial z_{o,\rho}} \right) = 0 \quad (7.14)$$

e as condições de contorno:

$$\frac{\partial W}{\partial r_{o,\rho}} = 0 \quad (7.15)$$

$$r_o(R_o) = R_o \quad (7.16)$$

$$z_o(R_o) = 0 \quad (7.17)$$

Para facilitar o desenvolvimento do problema, o sistema de equações de equilíbrio pode ser particularizado para cada caso de carregamento. Dessa maneira, para os casos estudados, onde todos os deslocamentos são axissimétricos, tem-se que as coordenadas radial e transversal da membrana deformada podem ser escritas apenas em função da coordenada radial ρ . Assim, o sistema de equações ((7.13)-(7.14)) torna-se:

$$2C_1 \left[\begin{aligned} & \frac{r_o}{\rho} - \frac{\rho^3}{r_o^3(r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)} - r_{o,\rho} + \frac{3\rho^2 r_{o,\rho}}{r_o^2(r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)^2} \\ & - \left(\rho + \frac{4\rho^3 r_{o,\rho}^2}{r_o^2(r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)^3} + \frac{\rho^3}{r_o^2(r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)^2} \right) r_{o,\rho\rho} \\ & - \frac{2\rho^3 r_{o,\rho}^2}{r_o^3(r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)^2} - \frac{4\rho^3 r_{o,\rho} z_{o,\rho} z_{o,\rho\rho}}{r_o^2(r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)^3} \end{aligned} \right] = 0 \quad (7.18)$$

$$2C_1 \left[\begin{aligned} & z_{o,\rho} + \frac{2\rho^3 z_{o,\rho} r_{o,\rho}}{r_o^3(r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)^2} - \frac{3\rho^2 z_{o,\rho}}{r_o^2(r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)^2} \\ & + \left(\rho + \frac{4\rho^3 z_{o,\rho}^2}{r_o^2(r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)^3} - \frac{\rho^3}{r_o^2(r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)^2} \right) z_{o,\rho\rho} \\ & + \frac{4\rho^3 r_{o,\rho} z_{o,\rho} r_{o,\rho\rho}}{r_o^2(r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)^3} \end{aligned} \right] = 0 \quad (7.19)$$

As tensões principais de uma membrana de material hiperelástico são obtidas através da equação dada em (3.29). Para esse exemplo, as tensões principais podem ser escritas como:

$$\sigma_1 = 2C_1 \left[(r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2) - \frac{\rho^2}{r_o^2 (r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)} \right] \quad (7.20)$$

$$\sigma_2 = 2C_1 \left[\frac{r_o^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{r_o^2 (r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)} \right] \quad (7.21)$$

Como as equações de equilíbrio da membrana são altamente não lineares, utiliza-se o método de integração numérica para a solução do problema.

Para a solução numérica através da integração numérica se utiliza o *shooting method* e o método de Runge-Kutta. Para o problema necessita-se de quatro condições iniciais e apenas duas são conhecidas ((7.16) e (7.17)). Assim, é usada uma metodologia incremental-iterativa, onde, as condições de contorno livres são inicialmente arbitradas e ajustadas pelo *shooting method*, sendo a convergência da solução obtida pelo método de Newton-Raphson e a integração numérica obtida pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Neste caso, as equações diferenciais de primeira ordem, utilizadas na integração numérica, são:

$$y_1(\rho) = \frac{dr_o}{d\rho} \quad (7.22)$$

$$y_2(\rho) = \frac{dz_o}{d\rho} \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_1(\rho)}{d\rho} = & \left[(r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)^4 (\rho r_o^5 r_{o,\rho} - r_o^6) + ((r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)^2 - 4z_{o,\rho}^4) \rho^2 r_o^4 + \right. \\ & + 3\rho^6 (r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2) + 3\rho^5 r_o r_{o,\rho} - 4(r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)^2 \rho^3 r_o^3 r_{o,\rho} + \\ & + (z_{o,\rho}^6 + 3r_{o,\rho}^6 + 7r_{o,\rho}^4 z_{o,\rho}^2 + 5r_{o,\rho}^2 z_{o,\rho}^4) \rho^4 r_o^2 \Big] / \left[2(r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2) \rho^4 r_o^3 + \right. \\ & \left. + (r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)^4 \rho^2 r_o^5 - 3\rho^6 r_o \right] \end{aligned} \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy_2(\rho)}{d\rho} = & \left[(r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)^4 z_{o,\rho} r_o^5 - 4(r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)^2 \rho^2 r_o^3 z_{o,\rho} + \right. \\
& + 4(r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)^2 \rho r_o^4 r_{o,\rho} + 3\rho^4 r_o z_{o,\rho} - 6\rho^5 r_{o,\rho} z_{o,\rho} + \\
& \left. + (2r_{o,\rho}^5 + 2r_{o,\rho} z_{o,\rho}^4 + 4r_{o,\rho}^3 z_{o,\rho}^2) \rho^3 r_o^2 z_{o,\rho} \right] / \left[2(r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2) \rho^3 r_o^3 + \right. \\
& \left. + (r_{o,\rho}^2 + z_{o,\rho}^2)^4 \rho r_o^5 - 3\rho^5 r_o \right]
\end{aligned} \quad (7.25)$$

e as condições iniciais dadas em (7.16) e (7.17).

Desta maneira, obtém-se a configuração deformada da membrana submetida a diferentes valores de carregamento trativo (P_e) e, posteriormente, as respectivas funções aproximadas que representam essa configuração. Essas funções são obtidas utilizando o método dos mínimos quadrados.

Assim, as coordenadas radial e transversal podem ser aproximadas pelas funções:

$$r_o(\rho) = (a_1 \rho^6 + a_2 \rho^5 + a_3 \rho^4 + a_4 \rho^3 + a_5 \rho^2 + a_6 \rho + a_7) \quad (7.26)$$

$$z_o(\rho) = (b_1 \ln \rho + b_2 \rho \ln \rho + b_3 \rho^2 \ln \rho + b_4 \rho^3 \ln \rho) \quad (7.27)$$

Para avaliar os resultados obtidos através da integração numérica e as expressões (7.26) e (7.27), a membrana é também analisada através do programa de elementos finitos Abaqus®.

Para a análise numérica no Abaqus foi utilizada uma malha de 1262 elementos de casca S4R na membrana e, 60 elementos rígidos R3D3 na inclusão rígida. Além disso, considera-se o nó central da inclusão rígida como o nó de referência onde se considera a aplicação da massa e da inércia.

Os resultados numéricos apresentados posteriormente neste trabalho são para uma membrana com as mesmas propriedades apresentadas anteriormente e para um disco rígido de raio $\rho_o = 0.2 \text{ m}$ e espessura h_d variável, com módulo de elasticidade $E = 2.10 \times 10^{11} \text{ Pa}$ e massa específica $\Gamma_d = 7860 \text{ Kg/m}^3$.

Para variação do peso do disco rígido variou-se a sua espessura (h_d). Na Figura 7.2 ilustra-se a variação do deslocamento transversal estático da membrana em função do peso do disco rígido. Observa-se que o comportamento inicial é altamente não-linear, mas que, a partir de um certo nível de carregamento, esta relação torna-se praticamente linear.

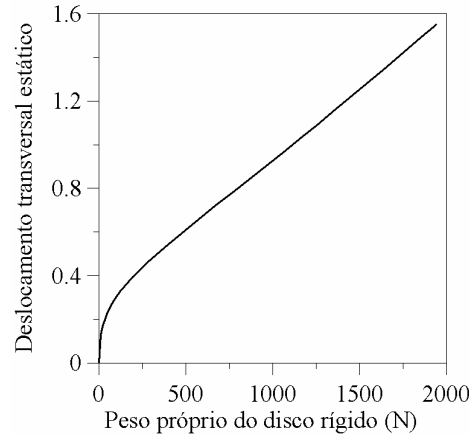


Figura 7.2 – Deslocamento transversal estático (m) - Peso do disco rígido (N).

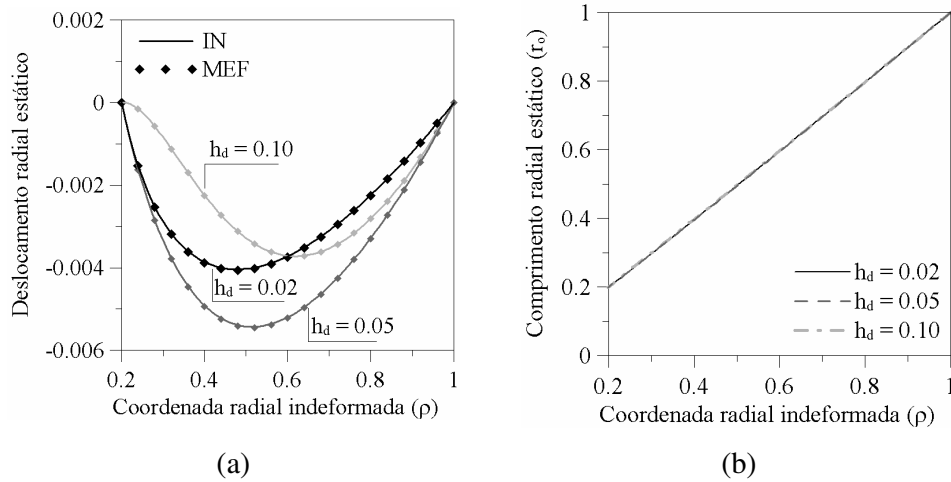
Como dito anteriormente, consideram-se dois casos de carregamento: no primeiro (Caso 1) considera-se como carga aplicada apenas o peso próprio do disco rígido e, no segundo (Caso 2) considera-se o peso do disco rígido somado a uma força atuante de mesma intensidade, porém, sem a influência de massa.

Neste estudo são consideradas três espessuras diferentes para o disco rígido (h_d) que geram os carregamentos apresentados na Tabela 7.1.

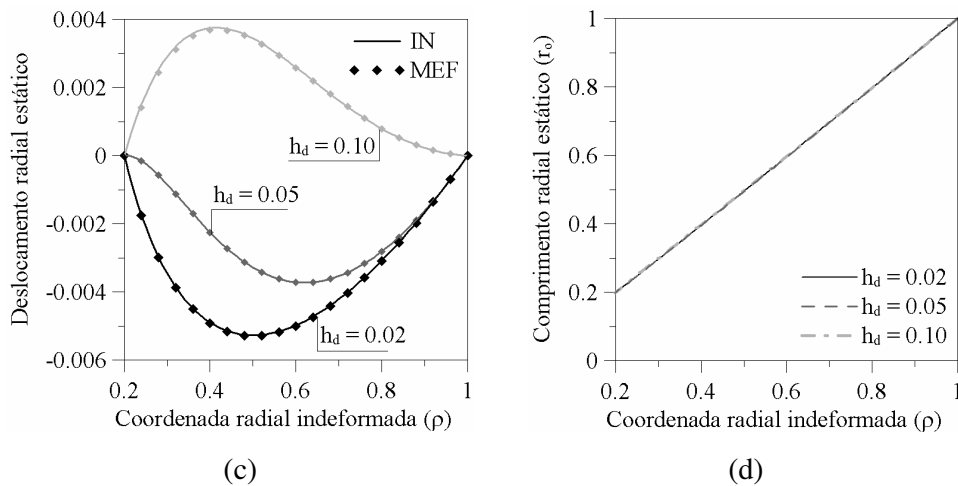
Tabela 7.1 – Espessura do disco rígido e carregamento aplicado.

Espessura (m)	Carga (N)	
	Caso 1	Caso 2
0.02	193.79	387.58
0.05	484.47	968.95
0.10	968.95	1937.90

Ilustra-se nas Figura 7.3 (a) e (c) a variação do deslocamento radial da membrana em função da coordenada radial indeformada para os valores de força aplicada (P_e) nos dois casos estudados. Ilustra-se também a variação do comprimento radial estático, r_o em função de ρ nas Figura 7.3 (b) e (d).



Caso 1



Caso 2

Figura 7.3 - Variação do deslocamento radial (m) estático da membrana.

Observa-se que a variação do deslocamento radial estático ao longo da coordenada radial indeformada é aproximadamente parabólica. Os valores dos deslocamentos radiais estáticos para a membrana com $h_d = 0.10 \text{ m}$ são positivos, ao contrário dos outros valores apresentados na Figura 7.3. Isso ocorre devido à variação não linear que o deslocamento radial tem em função da carga trativa aplicada à membrana. Isso pode ser melhor observado através da Figura 7.4, que mostra a variação deste deslocamento em um ponto de coordenadas $(0.5, 0)$ da membrana indeformada em função da carga estática aplicada na membrana. Observa-se entretanto que estes deslocamentos são muito pequenos o que torna a variação de r_o com ρ praticamente desprezível.

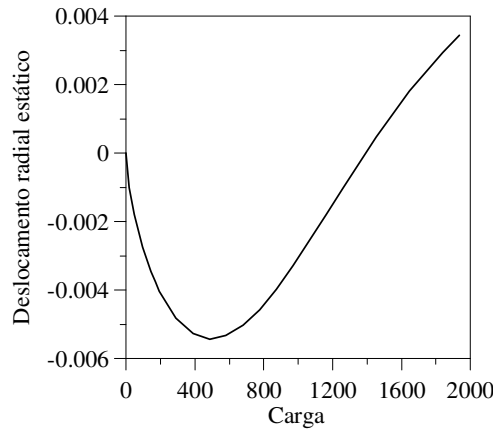


Figura 7.4 - Variação do deslocamento radial (m) estático da membrana em um ponto de coordenadas $(\rho, \theta) = (0.5; 0)$.

Os raios das membranas deformadas estaticamente (r_o) apresentados na Figura 7.3 podem ser aproximados pelas seguintes funções polinomiais em ρ :

• Caso 1

$$h_d = 0.02 \text{ m} \quad r_o(\rho) = 0.243494\rho^6 - 0.99961\rho^5 + 1.68893\rho^4 - 1.51609\rho^3 + 0.783036\rho^2 + 0.777326\rho + 0.02293 \quad (7.28)$$

$$h_d = 0.05 \text{ m} \quad r_o(\rho) = 0.07714\rho^6 - 0.33796\rho^5 + 0.62370\rho^4 - 0.63575\rho^3 + 0.40362\rho^2 + 0.85151\rho + 0.017743 \quad (7.29)$$

$$h_d = 0.10 \text{ m} \quad r_o(\rho) = -0.20410\rho^6 + 0.86323\rho^5 - 1.49932\rho^4 + 1.35858\rho^3 - 0.64443\rho^2 + 1.13623\rho - 0.01020 \quad (7.30)$$

• Caso 2

$$h_d = 0.02 \text{ m} \quad r_o(\rho) = 0.16592\rho^6 - 0.69592\rho^5 + 1.21150\rho^4 - 1.13737\rho^3 + 0.63488\rho^2 + 0.79878\rho + 0.02222 \quad (7.31)$$

$$h_d = 0.05 \text{ m} \quad r_o(\rho) = -0.20410\rho^6 + 0.86323\rho^5 - 1.49932\rho^4 + 1.35858\rho^3 - 0.64443\rho^2 + 1.13623\rho - 0.01020 \quad (7.32)$$

$$h_d = 0.10 \text{ m} \quad r_o(\rho) = 0.03412\rho^6 - 0.10101\rho^5 + 0.0480\rho^4 + 0.15712\rho^3 - 0.24023\rho^2 + 1.11715\rho - 0.01512 \quad (7.33)$$

As coordenadas transversais estáticas da membrana tracionada (z_o) são ilustrados na Figura 7.5.

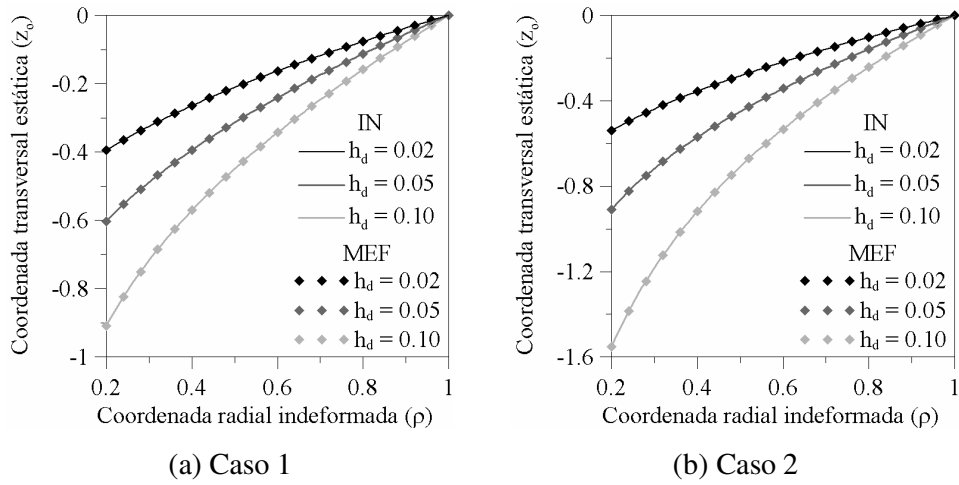


Figura 7.5 - Variação do deslocamento transversal (m) estático da membrana.

As coordenadas transversais estáticas (z_o) da membrana, apresentadas na Figura 7.5, podem ser aproximados pelas seguintes funções polinomiais em ρ :

• Caso 1

$$h_d = 0.02 \quad z_o(\rho) = (0.14578\rho^3 - 0.34028\rho^2 + 0.37738\rho + 0.18254)\ln(\rho) \quad (7.34)$$

$$h_d = 0.05 \quad z_o(\rho) = (0.15887\rho^3 - 0.38783\rho^2 + 0.46979\rho + 0.29481)\ln(\rho) \quad (7.35)$$

$$h_d = 0.10 \quad z_o(\rho) = (0.03566\rho^3 - 0.16537\rho^2 + 0.38081\rho + 0.49470)\ln(\rho) \quad (7.36)$$

• Caso 2

$$h_d = 0.02 \quad z_o(\rho) = (0.16528\rho^3 - 0.39367\rho^2 + 0.45619\rho + 0.25804)\ln(\rho) \quad (7.37)$$

$$h_d = 0.05 \quad z_o(\rho) = (0.03566\rho^3 - 0.16537\rho^2 + 0.38081\rho + 0.49470)\ln(\rho) \quad (7.38)$$

$$h_d = 0.10 \quad z_o(\rho) = (0.06483\rho^3 - 0.12001\rho^2 + 0.13709\rho + 0.93198)\ln(\rho) \quad (7.39)$$

Observa-se que as coordenadas radiais e transversais da membrana tracionada acoplada a um disco rígido de espessura $h_d = 0.10 \text{ m}$ do Caso 1 e da membrana tracionada a um disco rígido de espessura $h_d = 0.05 \text{ m}$ do Caso 2 são iguais, como era esperado, já que as cargas transversais (P_e) aplicadas nas duas

membranas são de mesma intensidade (equações (7.36) e (7.38), respectivamente). Nota-se que ao contrário de r_o , z_o varia de forma marcante com ρ e h_d , sendo esta variação não-linear.

Os valores das tensões principais σ_1 e σ_2 obtidos para a membrana anular, através dos elementos finitos e analiticamente (equações (3.30) e (3.31)), são comparados favoravelmente na Figura 7.6.

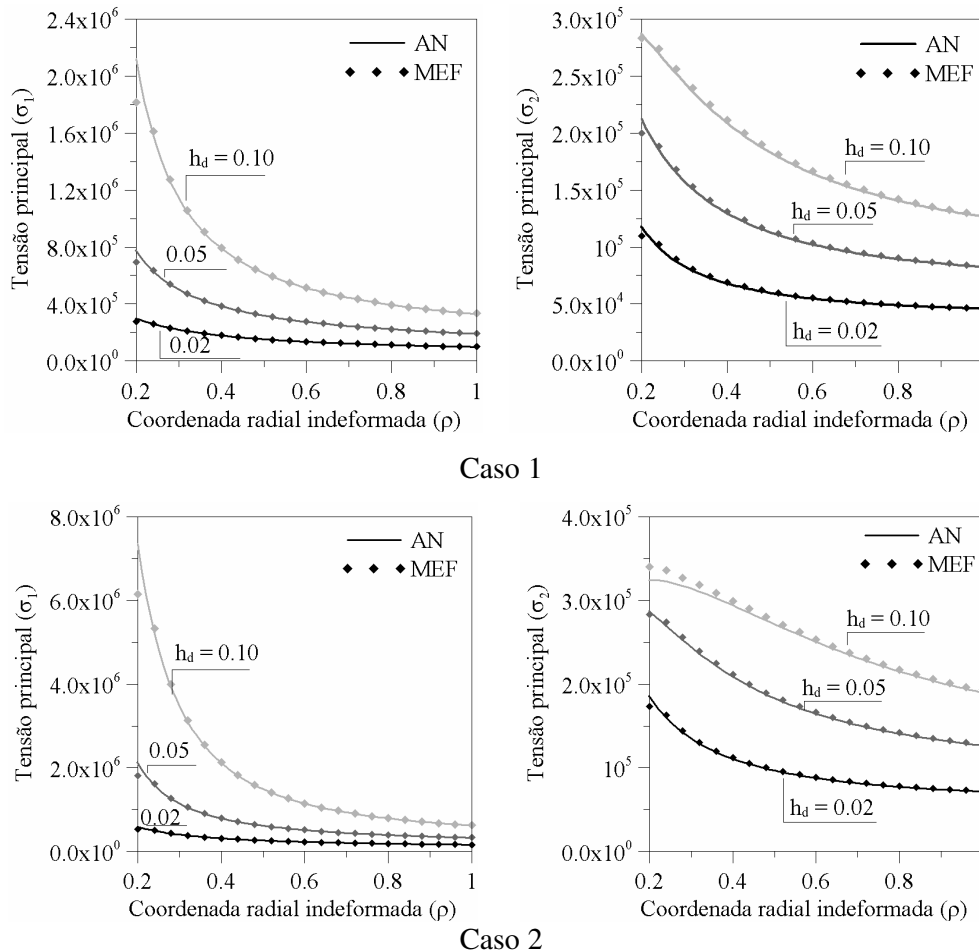


Figura 7.6 – Tensões principais (N/m^2) da membrana anular com um disco rígido acoplado.

7.4. Análise dinâmica

Nessa análise tem-se por objetivo o estudo das vibrações lineares e não-lineares da membrana anular com inclusão rígida. Após a tração estática, analisada anteriormente, a membrana é perturbada de duas diferentes maneiras

isoladas: uma axissimétrica e outra assimétrica. Portanto, serão apresentados os resultados para vibrações axissimétricas e assimétricas separadamente.

Os campos de deslocamentos radial u e circunferencial v são desprezíveis em relação ao deslocamento transversal w , como pode ser observado na Figura 7.7 que apresenta os deslocamentos da membrana pré-tensionada obtidos por elementos finitos. Assim sendo, as contribuições destes deslocamentos em termos de inércia e rigidez são desprezadas na análise das vibrações transversais da membrana.

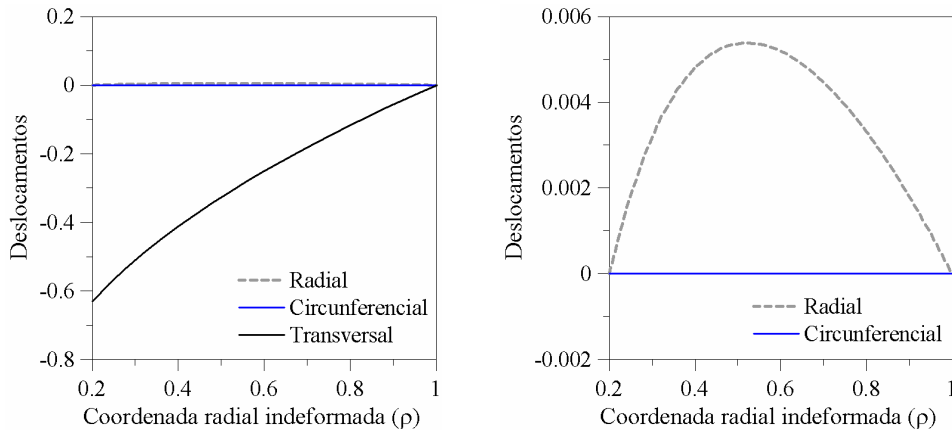


Figura 7.7 - Variação dos deslocamentos (m) da membrana ao longo do raio. (b) Detalhe dos deslocamentos radial e circunferencial (Caso 1; $h_d = 0.05 m$).

Através do método de Ritz o campo de deslocamentos transversal w pode ser aproximado por uma função que atenda as condições de contorno e continuidade. Dessa maneira, aproxima-se o deslocamento transversal $z_o(\rho)$ por uma função similar à utilizada na análise estática. Assim, para a vibração axissimétrica tem-se:

$$w(\rho, \theta, t) = A(t) z_o(\rho) \quad (7.40)$$

e para a vibração assimétrica:

$$w(\rho, \theta, t) = A(t) z_o(\rho) \sin \theta \quad (7.41)$$

$$\phi(t) = \frac{A(t) \rho|_{\rho_o}}{\rho_o} \quad (7.42)$$

onde $A(t)$ corresponde à amplitude de vibração, $z_o(\rho)$ é uma aproximação do deslocamento transversal, $\phi(t)$ é o deslocamento angular provocado pela perturbação assimétrica e ρ_o é o raio interno da membrana.

Para a determinação das equações de movimento aplica-se o princípio de Hamilton e encontra-se a seguinte equação de movimento para a membrana anular:

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{A}(t)}\right) - \frac{\partial U}{\partial A(t)} + \frac{\partial W_e}{\partial A(t)} - \frac{\partial R_e}{\partial A(t)} = 0 \quad (7.43)$$

onde T é a energia cinética, U é a energia elástica de deformação, W_e é o trabalho dos esforços externos e R_e é o trabalho das forças de dissipação, apresentados anteriormente em (3.14) a (3.18).

Chega-se, assim, à equação não-linear de movimento da membrana para vibração axissimétrica:

$$\begin{aligned} h C_1 \frac{\partial}{\partial A(t)} \left(\int_{\rho_o}^{R_o} \int_0^{2\pi} (I_1 - 3) \rho \, d\theta \, d\rho \right) + 2\pi h \Gamma \frac{\partial^2 A(t)}{\partial t^2} \int_{\rho_0}^{R_o} z_o(\rho)^2 \rho \, d\rho + \\ + \pi h_d \Gamma_d \rho_o^2 z_o(\rho_o)^2 \frac{\partial^2 A(t)}{\partial t^2} - 2\pi \zeta \Gamma h \omega_o \frac{\partial A(t)}{\partial t} \int_{\rho_0}^{R_o} z_o(\rho)^2 \rho \, d\rho + \\ + P_e z_o + P(t) z_o = 0 \end{aligned} \quad (7.44)$$

e para vibração assimétrica:

$$\begin{aligned} h C_1 \frac{\partial}{\partial A(t)} \left(\int_{\rho_o}^{R_o} \int_0^{2\pi} (I_1 - 3) \rho \, d\theta \, d\rho \right) + 4 h_d^2 \rho_o^2 \frac{\partial^2 A(t)}{\partial t^2} + \\ - 2\pi \zeta \Gamma h \omega_o \frac{\partial A(t)}{\partial t} \int_{\rho_0}^{R_o} z_o(\rho)^2 \rho \, d\rho + P_e z_o + M(t) \phi = 0 \end{aligned} \quad (7.45)$$

onde $A(t) = A \cos(\omega_o t)$; ζ é uma taxa de amortecimento crítico; ω_o é a frequência natural do sistema e, $P(t)$ e $M(t)$ são forças de excitação.

Na análise dinâmica por elementos finitos é utilizada a mesma malha que na análise estática.

7.4.1.

Análise linear das vibrações livres

Para a análise linear as equações de movimento (7.44) e (7.45) são linearizadas, obtendo-se a seguinte equação linear para a vibração livre axissimétrica:

$$4C_1 h \int_{\rho_o}^{R_o} \left\{ \rho^3 \frac{(3z_{o,\rho}^4 - z_{o,\rho}^2 r_{o,\rho}^2)}{r_{o,\rho}^2 (r_{o,\rho}^2 - z_{o,\rho}^2)^3} + \rho z_{o,\rho}^2 \right\} d\rho +$$

$$\left[-2\Gamma h \int_{\rho_o}^{R_o} \rho z_{o,\rho}^2 d\rho - \Gamma_d h_d z_o \Big|_{\rho=\rho_o} \rho_o^2 \right] \omega^2 = 0 \quad (7.46)$$

e para a vibração livre assimétrica:

$$2C_1 h \pi \int_{\rho_o}^{R_o} \left\{ \frac{z_o^4}{\rho} + \rho z_{o,\rho}^2 - \rho^3 z_o^2 \frac{(r_{o,\rho}^4 - z_{o,\rho}^2 r_{o,\rho}^2)}{r_{o,\rho}^4 (r_{o,\rho}^2 - z_{o,\rho}^2)^3} + \right.$$

$$\left. \rho^3 \frac{(3z_{o,\rho}^4 - z_{o,\rho}^2 r_{o,\rho}^2)}{r_{o,\rho}^2 (r_{o,\rho}^2 - z_{o,\rho}^2)^3} \right\} d\rho - 4\Gamma_d h_d^2 \rho_o^2 \omega^2 = 0 \quad (7.47)$$

Substituem-se as coordenadas radiais e transversais estáticas (equações (7.28)-(7.39)) e soluciona-se as equações, obtendo-se as frequências de vibração.

Na Tabela 7.2 apresentam-se os valores das frequências de vibração axissimétricas e assimétricas, obtidos através da formulação analítica e do método dos elementos finitos. São apresentados resultados para as três diferentes espessuras do disco rígido nos Casos 1 e 2.

Tabela 7.2 – Frequências de vibração lineares (rad/s).

Vibração Axissimétrica				
Caso 1			Caso 2	
	MEF	Analítico	MEF	Analítico
$h_d = 0.02 \text{ m}$	7.5046	7.4986	8.4434	8.4471
$h_d = 0.05 \text{ m}$	5.5414	5.5640	5.6007	5.6774
$h_d = 0.10 \text{ m}$	3.9765	4.0349	3.8199	3.8499

Vibração Assimétrica				
Caso 1			Caso 2	
	MEF	Analítico	MEF	Analítico
$h_d = 0.02 \text{ m}$	16.161	16.8748	18.763	19.4013
$h_d = 0.05 \text{ m}$	12.640	12.1613	13.399	12.9289
$h_d = 0.10 \text{ m}$	9.5346	9.5753	9.6305	9.5851

Observa-se uma boa concordância entre os valores das frequências de vibração obtidos pela solução analítica e pelo método dos elementos finitos. Além disso, observa-se que, com o aumento da espessura do disco rígido, o que provoca o aumento da sua massa, as frequências diminuem e que o aumento do carregamento sem aumento da massa do disco provoca, na maioria dos exemplos, um aumento das frequências de vibração.

Verifica-se, também, que as frequências de vibração da membrana tracionada acoplada a um disco rígido de espessura $h_d = 0.10 \text{ m}$ do Caso 1 e da membrana tracionada a um disco rígido de espessura $h_d = 0.05 \text{ m}$ do Caso 2 não são iguais. Apesar das membranas estarem tracionadas por uma força transversal (P_e) de mesma intensidade, a massa do disco rígido nos dois exemplos é diferente, já que no Caso 2 apenas metade da força aplicada é devida ao peso próprio do disco e a outra metade é a uma força sem influência de massa.

As formas dos modos lineares de vibração para a membrana anular são apresentadas na Figura 7.8.

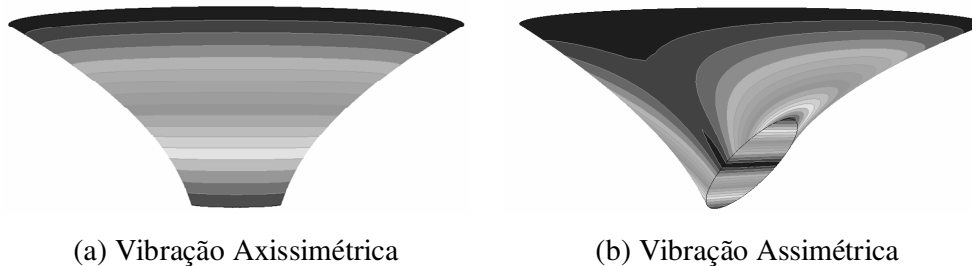


Figura 7.8 – Modos de vibração da membrana anular com disco rígido.

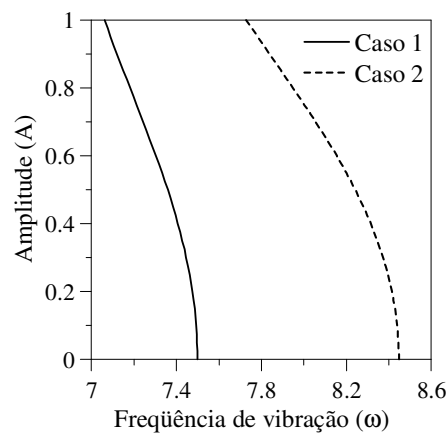
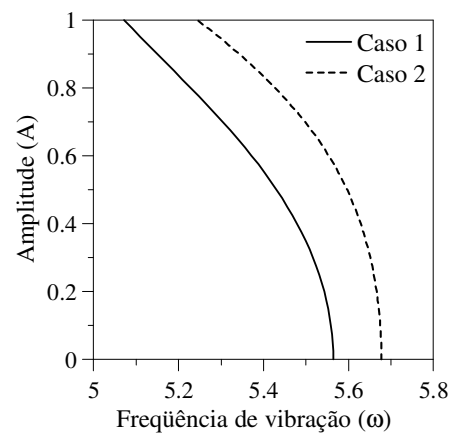
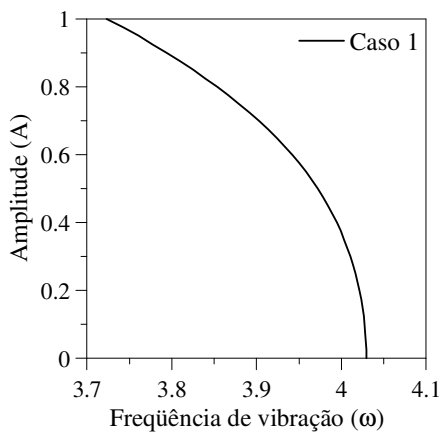
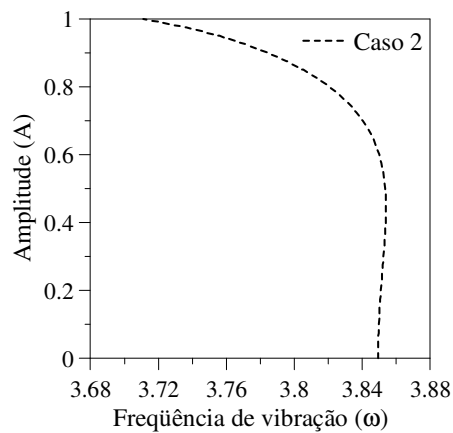
7.4.2.

Análise não linear das vibrações livres

Na membrana em vibração livre parte-se das equações apresentadas em (7.44) e (7.45), desconsiderando as forças de excitação e dissipação. As equações de movimento são resolvidas e a relação frequência de vibração-amplitude é obtida sendo apresentada na Figura 7.9 para as vibrações axissimétricas e assimétricas da membrana anular.

Observa-se que com o aumento da amplitude de vibração ocorre uma diminuição na frequência na maioria dos exemplos apresentados. Porém, esse efeito *softening* não acontece para o exemplo da membrana acoplada a um disco

rígido de espessura $h_d = 0.02 \text{ m}$ e vibrando assimetricamente. Neste exemplo observa-se um comportamento *hardening* para o Caso 1 e, para o Caso 2, observa-se que para pequenas amplitudes de vibração ocorre um aumento na frequência e que, com o aumento da amplitude de vibração a curva muda de direção, ocorrendo uma diminuição da frequência para grandes amplitudes de vibração. Observa-se esse mesmo comportamento para o Caso 2 da membrana vibrando axissimetricamente acoplada a um disco de espessura $h_d = 0.10 \text{ m}$.

 $h_d = 0.02 \text{ m}$  $h_d = 0.05 \text{ m}$  $h_d = 0.10 \text{ m}$ 

Vibração Axissimétrica

Segue

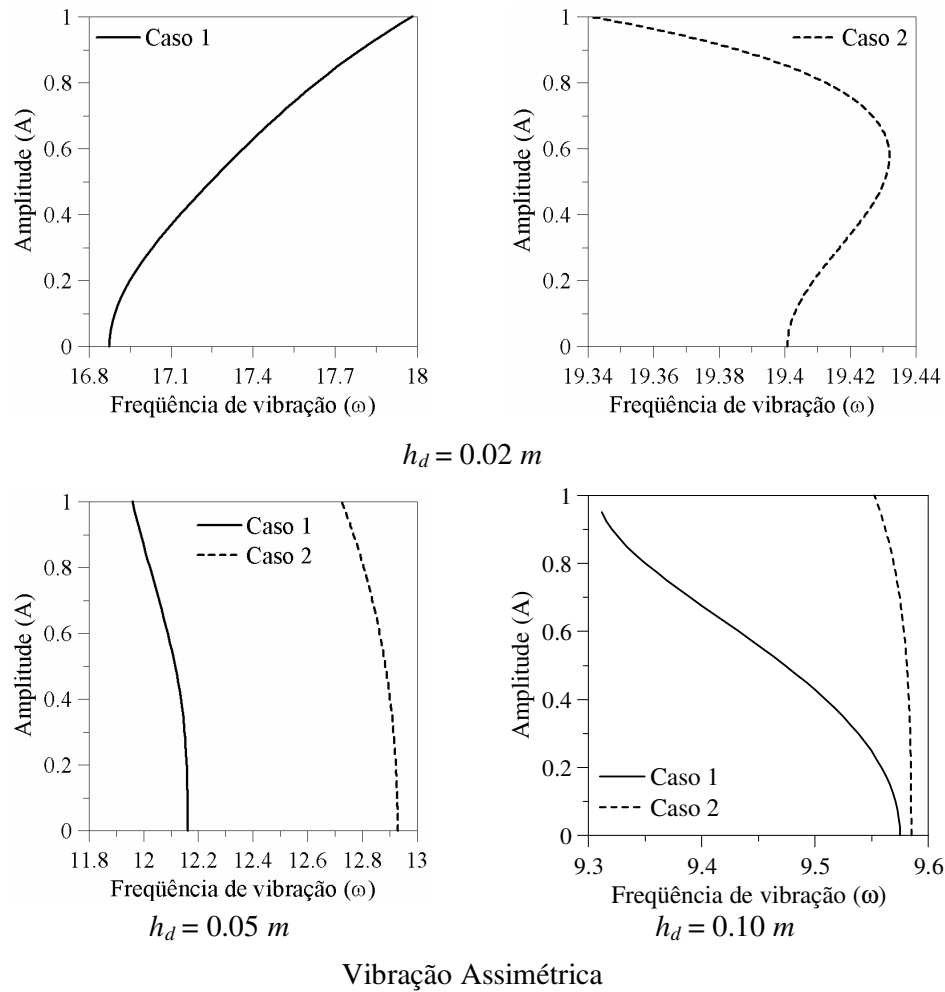


Figura 7.9 – Relação frequência (rad/s)-amplitude (m) para a vibração livre da membrana anular com um disco rígido acoplado.

Na Figura 7.10 apresenta-se a relação normalizada frequência-amplitude para a vibração livre da membrana anular com inclusão rígida. A frequência de vibração foi normalizada com relação à frequência natural de cada caso.

Verifica-se que as curvas das relações normalizadas das duas membranas vibrando axissimetricamente após serem tracionadas por um carregamento de mesma intensidade ($h_d = 0.10 \text{ m}$ do Caso 1 e $h_d = 0.05 \text{ m}$ do Caso 2), se sobrepõem. Com exceção da membrana vibrando assimetricamente acoplada a um disco rígido de $h_d = 0.02 \text{ m}$ no Caso 1, as membranas apresentam um comportamento predominantemente *softening*, um comportamento bastante diferente dos observados nos casos anteriores. Observa-se também que o grau de não-linearidade varia de forma marcante com h_d , sendo mais acentuado no modo axissimétrico.

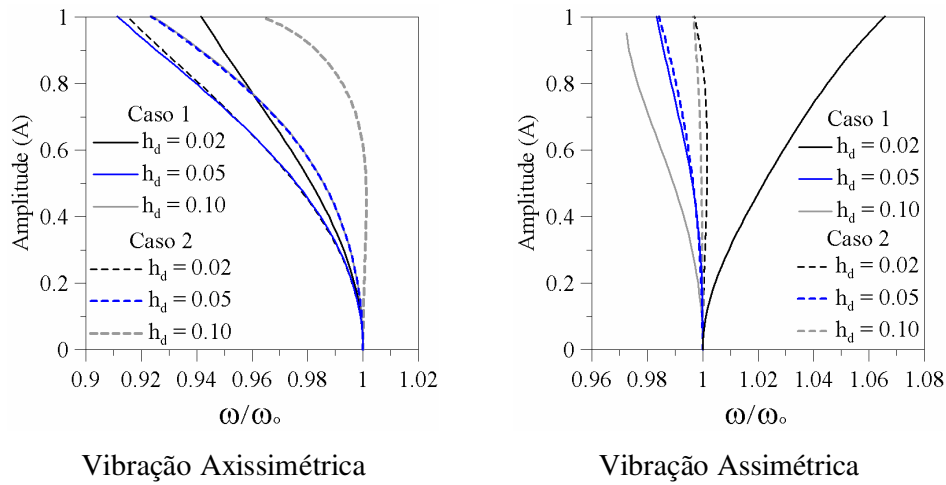


Figura 7.10 – Relação frequência- amplitude normalizada para a vibração livre da membrana anular com um disco rígido acoplado

Cabe ressaltar que neste problema, a massa do disco é bem superior à massa total da membrana, sendo o disco o principal responsável pelas forças de inércia, atuando a membrana como uma mola não-linear.

Posteriormente, obtém-se a relação frequência normalizada-deslocamento transversal para um ponto da membrana indeformada de coordenadas $(0.5; \pi/2)$. O método dos elementos finitos também é usado para calcular essa relação para alguns exemplos e observa-se na Figura 7.11 que os resultados obtidos pelas duas metodologias apresentam o mesmo comportamento, corroborando a qualidade da modelagem matemática e aproximações adotadas na solução analítica.

Nota-se neste exemplo, analisando-se a faixa de variação de ω/ω_0 , que a não-linearidade deste problema é bem menor que nos casos anteriores. Isto se deve aos grandes deslocamentos transversais iniciais da membrana, $z_0(\rho)$, o que leva a membrana a trabalhar em um regime quase linear.

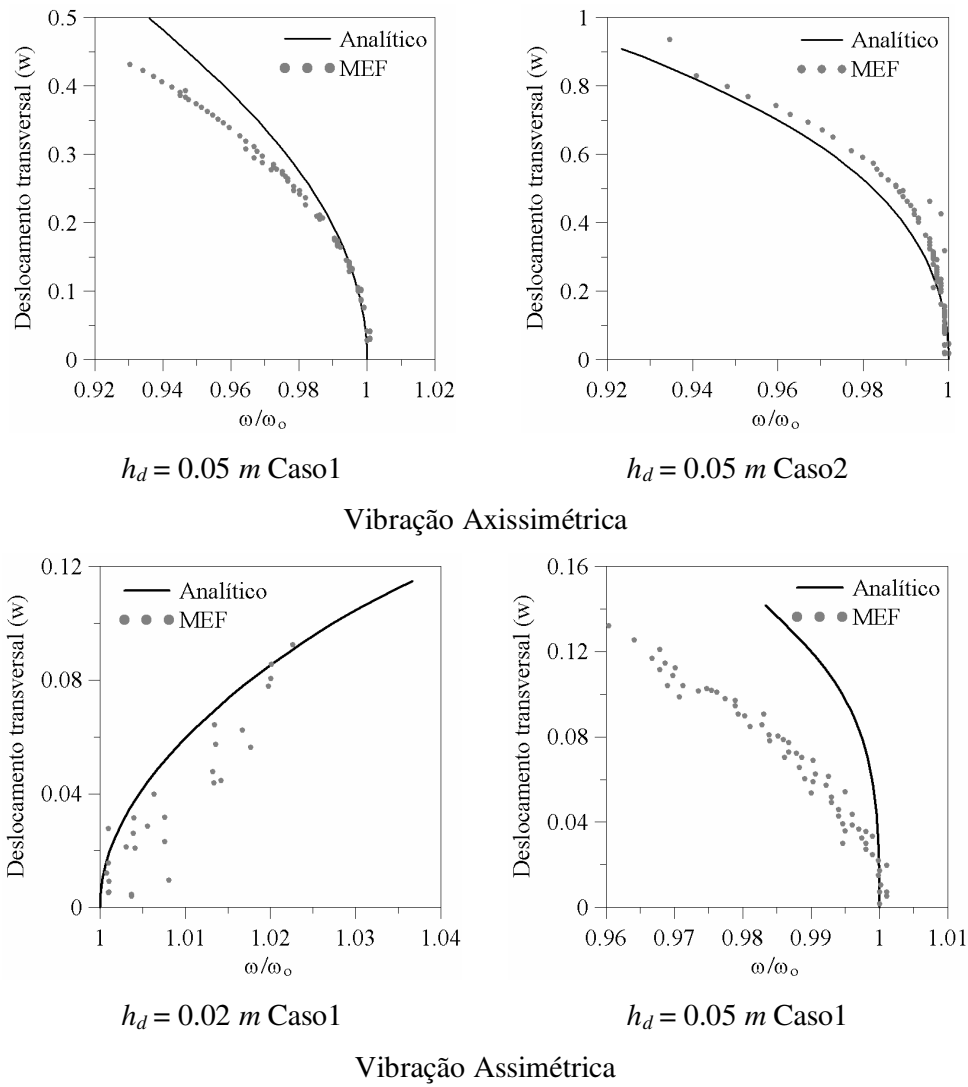


Figura 7.11 – Relação frequência- deslocamento transversal para a vibração livre da membrana anular com um disco rígido acoplado.

7.4.3.

Análise não linear da vibração forçada

A membrana anular sujeita a uma tensão inicial de tração (peso do disco rígido) é, então, submetida a uma força de excitação distribuída ao longo da sua extremidade interna dada por:

$$\text{Axissimétrica} \quad P(t) = P_o \cos(\Omega t) \quad (7.48)$$

$$\text{Assimétrica} \quad M(t) = M_o \cos(\Omega t) \quad (7.49)$$

onde P_o (N) e M_o (Nm) são as amplitudes da excitação e Ω a frequência da excitação.

7.4.3.1.

Vibração Axissimétrica

As vibrações axissimétricas forçadas da membrana anular são obtidas utilizando a solução modal, considerando uma força com amplitude excitação $P_o = 1 \text{ N}$. A curva de ressonância é apresentada na Figura 7.12.

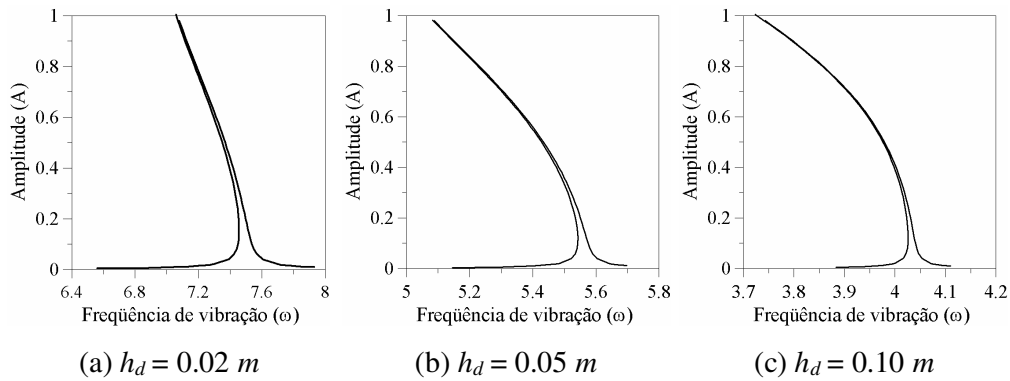


Figura 7.12 – Curva de ressonância não linear da membrana anular com um disco rígido acoplado vibrando axissimetricamente.

Os diagramas de bifurcação do mapa de Poincaré da membrana são obtidos utilizando o método da continuação e apresentados na Figura 7.13, para uma amplitude da excitação $P_o = 1 \text{ N}$ e valores crescentes da espessura do disco rígido e, conseqüentemente, da pré-tensão aplicada à membrana. As linhas contínuas representam posições de equilíbrio estáveis e as linhas tracejadas representam posições de equilíbrio instáveis.

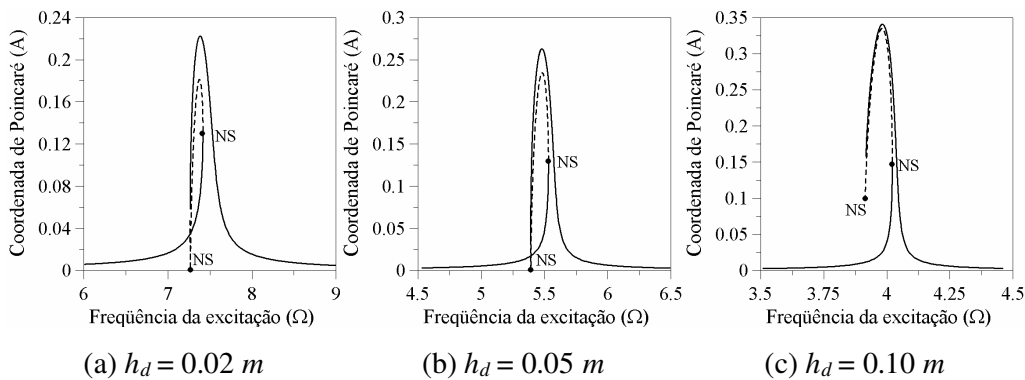
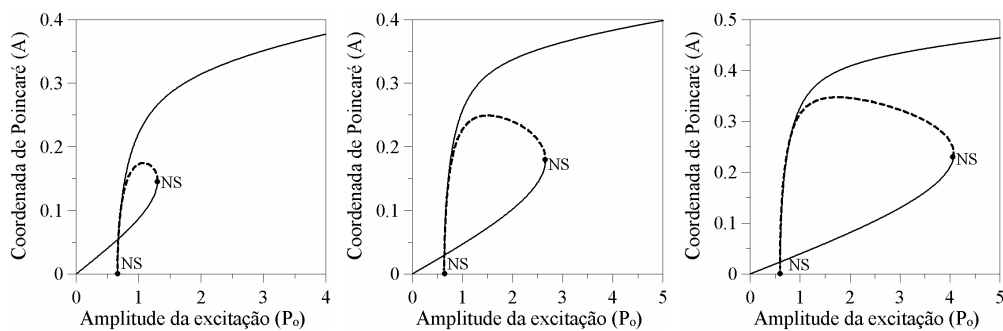


Figura 7.13 – Diagrama de bifurcação. Coordenada de Poincaré $A \text{ (m)}$ como função da frequência de excitação $\Omega \text{ (rad/s)}$ – ($P_o = 1 \text{ N}$; $\zeta = 0.05$).

Observa-se em cada caso da Figura 7.13 que, para uma magnitude de força unitária, a membrana pode exibir uma ou três respostas, dependendo do valor de Ω . Os diagramas apresentam duas bifurcações nó-sela que conectam os ramos estáveis com os instáveis.

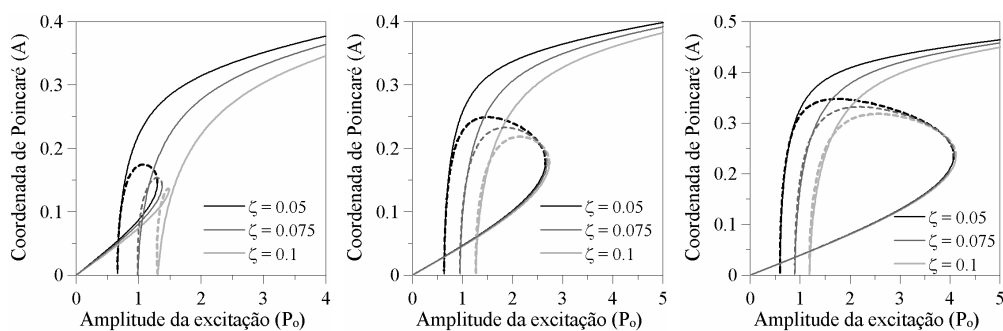
Na Figura 7.14 apresenta-se, para valores seleccionados da frequência de excitação na região principal de ressonância, o diagrama de bifurcação que tem como parâmetro de controle P_o . Verifica-se com o aumento da tração na membrana o aumento da faixa de carregamento onde as soluções instáveis existem, ou seja, um aumento da região de ressonância não-linear.



(a) $h_d=0.02\text{ m}$; $\Omega=7.4\text{ rad/s}$ (b) $h_d=0.05\text{ m}$; $\Omega=5.5\text{ rad/s}$ (c) $h_d=0.10\text{ m}$; $\Omega=4.0\text{ rad/s}$

Figura 7.14 – Diagramas de bifurcação para valores seleccionados da frequência de excitação. Coordenada de Poincaré A (m) como função da amplitude da excitação P_o (N). ($\zeta = 0.05$)

Ilustram-se na Figura 7.15 os diagramas de bifurcação para diferentes valores de amortecimento. O aumento do amortecimento diminui a região onde a multiplicidade das soluções e os saltos entre as soluções estáveis co-existent podem ocorrer, ou seja, diminui a não-linearidade da resposta.



(a) $h_d= 0.02m$; $\Omega= 7.4\text{ rad/s}$ (b) $h_d= 0.05m$; $\Omega= 5.5\text{ rad/s}$ (c) $h_d= 0.10m$; $\Omega= 4.0\text{ rad/s}$

Figura 7.15 – Diagramas de bifurcação com diferentes valores de amortecimento. Coordenada de Poincaré A (m) como função da amplitude da excitação P_o (N).

Na Figura 7.16 apresentam-se diagramas de bifurcação em função da amplitude da excitação, para diferentes valores da frequência da excitação para a membrana com $h_d = 0.02 \text{ m}$. Para as frequências de excitação bem próximas à menor frequência natural, há duas soluções estáveis e uma instável. Para valores da frequência de excitação distantes da região de ressonância só é observada uma resposta estável, como esperado.

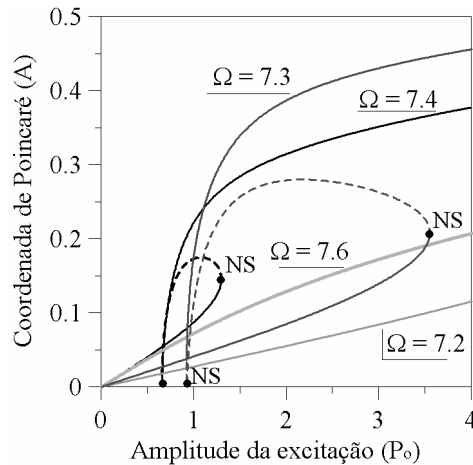


Figura 7.16 - Diagramas de bifurcação com diferentes valores da frequência de excitação. Coordenada de Poincaré A_1 (m) em função da amplitude da excitação P_o (N). ($h_d = 0.02 \text{ m}$; $\zeta = 0.05$)

Bacias de atração no plano fase $A \times \dot{A}$ das soluções na região principal de ressonância são ilustradas na Figura 7.17. As cores diferentes correspondem aos atratores distintos, cinza escuro corresponde a bacia de atração da oscilação de grande amplitude e cinza claro corresponde a oscilação de pequena amplitude. Os atratores são realçados por uma cruz preta nas bacias de atração.

Com o aumento da tração inicial, a complexidade da forma da bacia aumenta com um número maior de faixas claras e escuras aumentando assim a sensibilidade às condições iniciais. Nota-se que na região principal de ressonância, para as membranas mais tracionadas, a maioria das condições iniciais conduz a soluções que convergem para o atrator de menor amplitude. Este é mais um aspecto onde o presente exemplo difere dos casos anteriores.

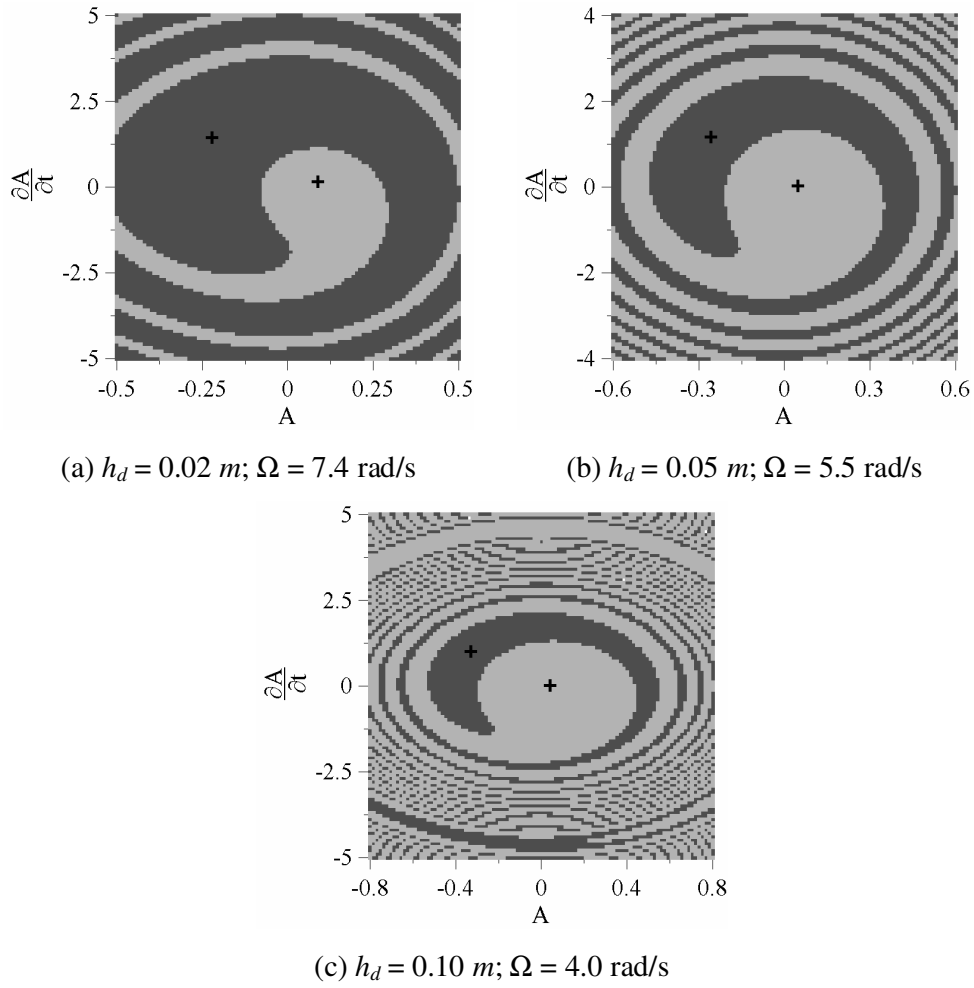


Figura 7.17 – – Bacia de atração no plano fase das condições iniciais $A \times \dot{A}$ ($P_o = 1 \text{ N}$; $\zeta = 0.05$).

7.4.3.2. Vibração Assimétrica

A vibração assimétrica forçada ocorre após o disco rígido ser carregado por um momento excitador $M(t)$, descrito em (7.49), o que provoca na membrana vibrações como a ilustrada na Figura 7.7 -b.

Para a solução analítica, considera-se uma força com amplitude de excitação $M_o = 0.5 \text{ Nm}$ e obtêm-se as curvas de ressonância para a membrana acoplada a um disco rígido. Essas curvas são apresentadas na Figura 7.18 para valores crescentes da espessura do disco e, conseqüentemente, da pré-tensão aplicada à membrana.

Verifica-se que inicialmente para pequenos valores de pré-tensão a membrana apresenta um comportamento *hardening* e, à medida que a pré-tensão aumenta, a membrana passa a apresentar perda de rigidez (*softening*) com o aumento das amplitudes de vibração.

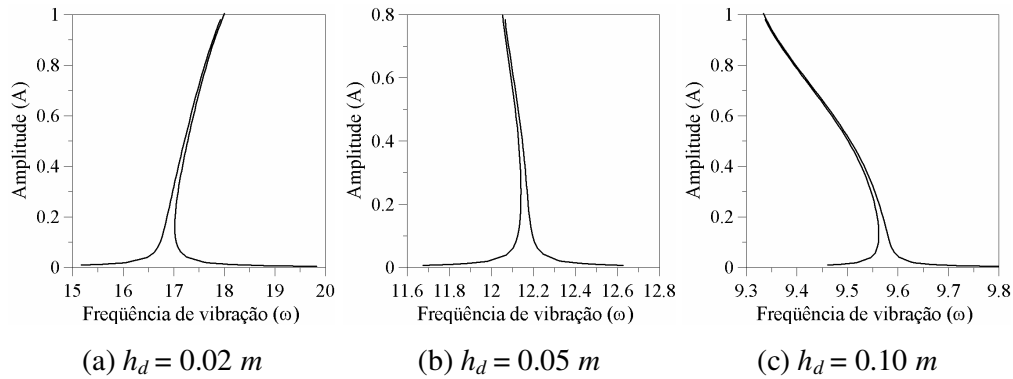


Figura 7.18 – Curva de ressonância não linear da membrana anular com um disco rígido acoplado vibrando assimetricamente.

Novamente, o método de continuação é utilizado para o cálculo dos diagramas de bifurcação do mapa de Poincaré. Na Figura 7.19 são ilustrados os diagramas de bifurcação da membrana utilizando uma amplitude da excitação $M_o = 0.5 \text{ Nm}$. Observa-se que para as membranas que possuem um comportamento com perda de rigidez (b e c) o aumento da pré-tensão aumenta a faixa de frequência onde as soluções instáveis existem. A não-linearidade da membrana com ganho de rigidez (Figura 7.19-a) é maior que a não-linearidade dos outros dois casos.

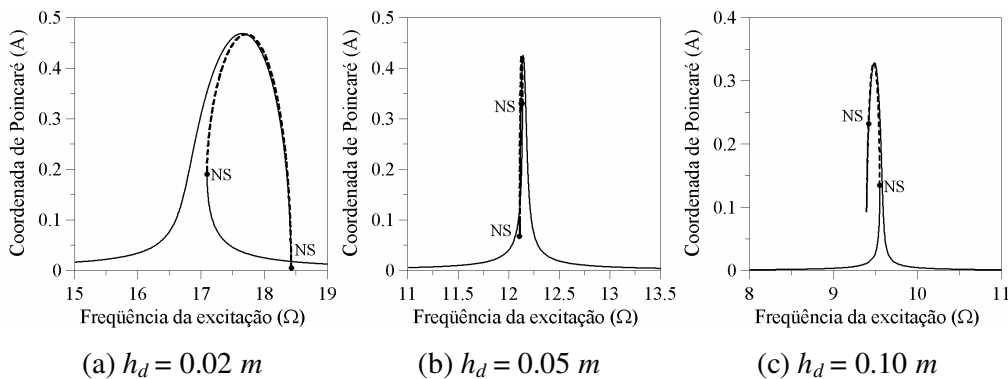


Figura 7.19 – Diagramas de bifurcação. Coordenada de Poincaré $A \text{ (m)}$ como função da frequência de excitação $\Omega \text{ (rad/s)}$ ($M_o = 0.5 \text{ Nm}$; $\zeta = 0.01$).

Na Figura 7.20 apresenta-se, para valores selecionados da frequência de excitação na região principal de ressonância, o diagrama de bifurcação em função da amplitude da excitação M_o . Como nos casos anteriores, os diagramas apresentam duas bifurcações nó-sela que conectam os ramos estáveis com os instáveis.

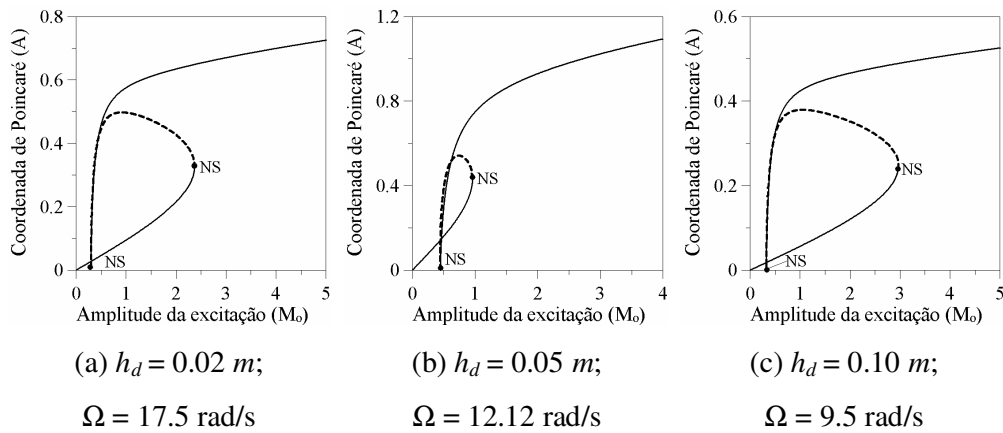


Figura 7.20 – Diagramas de bifurcação para valores selecionados da frequência de excitação. Coordenada de Poincaré $A \text{ (m)}$ como função da amplitude da excitação $M_o \text{ (Nm)}$ ($\zeta = 0.01$).

A influência do amortecimento é ilustrada na Figura 7.21.

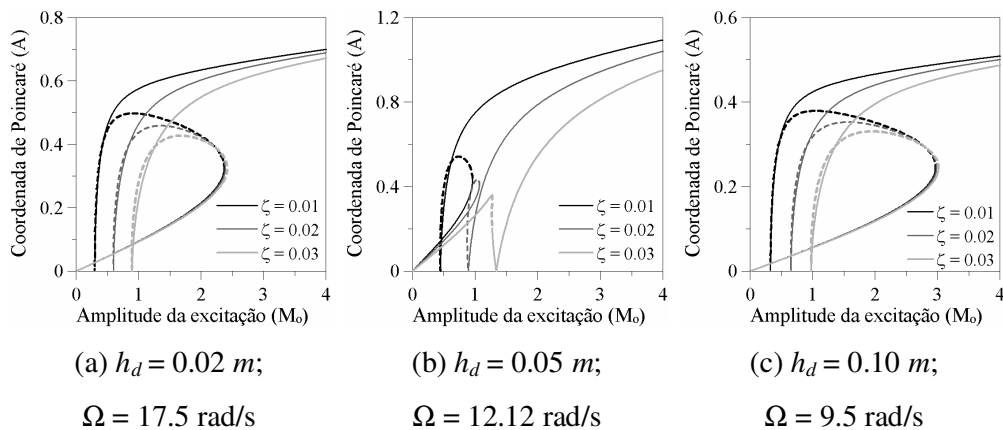


Figura 7.21 – Diagramas de bifurcação com diferentes valores de amortecimento. Coordenada de Poincaré $A \text{ (m)}$ como função da amplitude da excitação $M_o \text{ (Nm)}$.

Na Figura 7.22 apresenta-se diagramas de bifurcação em função da amplitude da excitação para diferentes valores da frequência da excitação para a

membrana com $h_d = 0.02 \text{ m}$. Observa-se o mesmo comportamento da multiplicidade de soluções notado para a vibração axissimétrica.

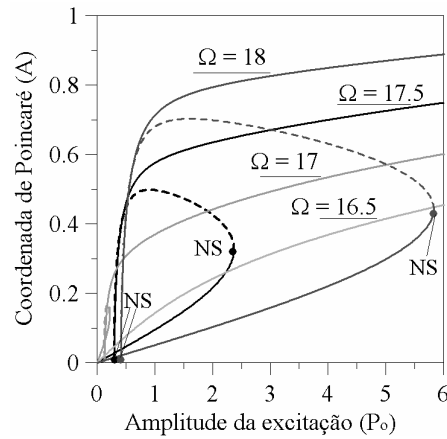


Figura 7.22 - Diagramas de bifurcação com diferentes valores da frequência de excitação. Coordenada de Poincaré $A \text{ (m)}$ em função da amplitude da excitação $M_0 \text{ (Nm)}$. ($h_d = 0.02 \text{ m}$; $\zeta = 0.01$)

Por fim, analisou-se o comportamento das bacias de atração das soluções na região principal de ressonância. A Figura 7.23 ilustra as bacias de atração no plano fase $A \times \dot{A}$. Observa-se que a membrana acoplada ao disco com $h_d = 0.05 \text{ m}$ apresenta uma bacia menos complexa, com um número menor de faixas claras (oscilação de menor amplitude) e escuras (oscilação de maior amplitude). Nota-se que a maioria das condições iniciais conduz a soluções que convergem ao atrator (cruz preta) de menor amplitude.

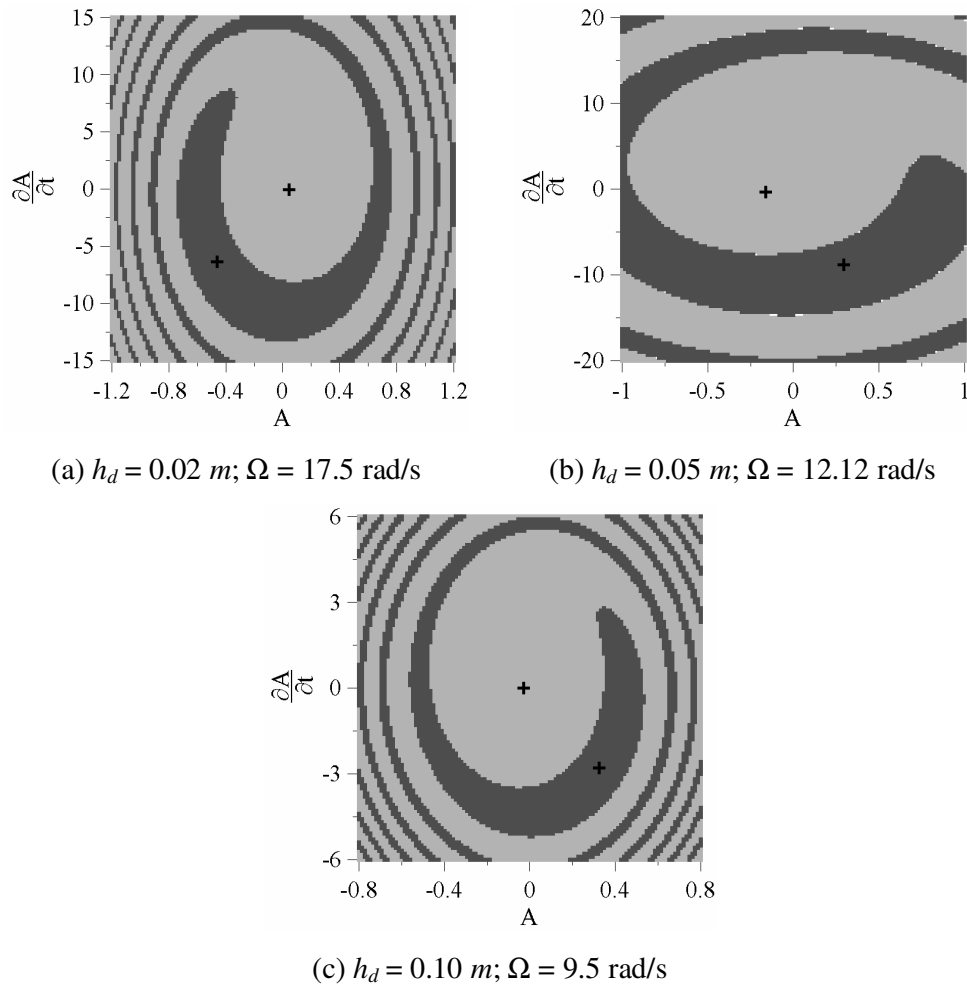


Figura 7.23 – Bacia de atração no plano fase $A \times \dot{A}$ ($\zeta = 0.05$; $M_o = 0.5 \text{ Nm}$).