

## 4 Referencial Teórico Empregado

Dentre os modelos de previsão mais utilizados em gestão de risco podem ser citados os processos estocásticos. Neste mote, destacam-se o Movimento Aritmético Browniano (MAB), Movimento Geométrico Browniano (MGB) e Processo de Reversão à média. Modelos baseados em séries temporais são de grande importância. No meio deles estão o Alisamento Exponencial, os de séries temporais univariados, como é o caso do ARIMA (auto-regressivo integrado de médias móveis) e também aqueles para séries multivariadas, como o VAR (modelo vetorial auto-regressivo) e VECM (modelo vetorial de correção de erros).

Quando existe mais de uma variável afetando os valores dos fluxos financeiros das empresas, a geração de cenários deve seguir critérios que garantam a construção de projeções verossímeis. É de fundamental importância, por exemplo, que as correlações entre os fatores de risco sejam observadas. Para tanto, pode-se utilizar uma técnica bastante conhecida como a Fatoração de Cholesky, levando em consideração a dependência linear entre as variáveis. Por ela, a estrutura dos modelos de previsão dos fatores de risco não é alterada, apenas o fator aleatório do modelo de previsão passa a carregar a influência da correlação entre as séries.

Por fim, para a geração de observações da distribuição de probabilidades e o uso da amostra obtida para aproximar a função de interesse será utilizada a Simulação de Monte Carlo, que é um método estatístico bastante utilizado em simulações estocásticas.

Este capítulo será dedicado a realizar uma breve revisão sobre todo o arcabouço teórico descrito acima por possuir fundamental importância para a implementação de um modelo de gestão de riscos em instituições não-financeiras.

## 4.1. Processos Estocásticos

Um processo estocástico é uma variável que se desenvolve no tempo de uma forma que é ao menos em parte aleatória. Formalmente, é definido como sendo a lei de probabilidade para a evolução  $x_t$  da variável aleatória  $x$  durante um tempo  $t$ .

Dizemos que um processo é estacionário quando as propriedades estatísticas da variável permanecem constantes por longos períodos, ou seja, a distribuição conjunta de  $(x_{t_1}, \dots, x_{t_k})$  é idêntica à distribuição de  $(x_{t_1 + t}, \dots, x_{t_k + t})$  para todo  $t$ . Na maioria das vezes basta que a média e a variância da variável aleatória sejam constantes no tempo. Se isso acontece, dizemos se tratar de um processo estacionário fraco, ou de segunda ordem.

Além disso, um processo estocástico pode ser classificado como de estado contínuo quando a variável de interesse pode assumir qualquer valor, ou de estado discreto quando aquela só pode assumir alguns valores discretos. Seguindo o mesmo raciocínio, quando a variável pode ter o seu valor alterado a qualquer instante do tempo, o processo é definido como sendo um processo de tempo contínuo, e caso ele só possa sofrer mudanças em intervalos fixo de tempo, é chamado de processo de tempo discreto.

### 4.1.1. Processo de Wiener

Também conhecido como Movimento Browniano, é um processo estocástico a tempo contínuo que possui três importantes propriedades:

1. É um processo de Markov, o que significa que a distribuição de probabilidade para  $x_{t+1}$  depende somente do que ocorreu em  $x_t$ , não importando o que tenha acontecido antes do tempo  $t$ . Desta forma, para realizar uma previsão do valor futuro da variável, tudo que se precisa é conhecer a sua distribuição de probabilidade e o seu valor atual.
2. Possui incrementos independentes. A distribuição de probabilidade para mudanças no processo para qualquer período de tempo é independente de qualquer outra mudança em qualquer outro intervalo, ou seja,  $p(x_{t_2} - x_{t_1}, x_{t_3} - x_{t_2}, \dots) = p(x_{t_2} - x_{t_1})p(x_{t_3} - x_{t_2}) \dots$

3. Mudanças no processo, sobre qualquer intervalo de tempo, são normalmente distribuídas, com variância que aumenta proporcionalmente com o intervalo de tempo.

Se  $z(t)$  é um processo de Wiener, então:

$$\Delta z = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t} \quad (24)$$

onde  $\Delta z$  representa uma variação em  $z$ ,  $\Delta t$  correspondente a um intervalo de tempo e  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ . Além disso, a variável aleatória  $\varepsilon_t$  é serialmente decorrelata, ou seja,  $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ , para  $t \neq s$ .

Fazendo  $\Delta t$  se tornar um intervalo infinitesimalmente pequeno, podemos representar o incremento do processo de Wiener,  $dz$ , em tempo contínuo como

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt} \quad (25)$$

#### 4.1.1.1.

#### Movimento Browniano com Drift

O processo de Wiener é um processo estacionário sem termo de drift. Caso seja adicionado um crescimento de longo prazo e sua volatilidade ao processo de Wiener, obtém-se um Movimento Browniano com Drift, ou simplesmente Movimento Aritmético Browniano (MAB), que é representado da seguinte forma:

$$ds = \mu dt + \sigma dz \quad (26)$$

onde  $dz = \varepsilon_t \sqrt{dt}$  e  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$

É importante ressaltar que para qualquer intervalo de tempo  $\Delta t$ , a mudança em  $s$ , determinada por  $\Delta s$ , é normalmente distribuída com os seguintes parâmetros:

Média:

$$E(\Delta s) = E(\mu \Delta t + \sigma \Delta z) \quad (27)$$

$$E(\Delta s) = E(\mu \Delta t) + E(\sigma \Delta z) \quad (28)$$

$$E(\Delta s) = \mu \Delta t + \sigma E(\Delta z) \quad (29)$$

$$E(\Delta s) = \mu \Delta t \quad (30)$$

Variância:

$$Var(\Delta s) = E[\Delta s - E(\Delta s)]^2 \quad (31)$$

$$Var(\Delta s) = E[\Delta s - \mu\Delta t]^2 \quad (32)$$

$$Var(\Delta s) = E[\mu\Delta t + \sigma\Delta z - \mu\Delta t]^2 \quad (33)$$

$$Var(\Delta s) = E[\sigma^2 \Delta z^2] = E[\sigma^2 \varepsilon^2 \Delta t] \quad (34)$$

$$Var(\Delta s) = E(\varepsilon^2) \sigma^2 \Delta t \quad (35)$$

$$Var(\Delta s) = \sigma^2 \Delta t \quad (36)$$

$$\text{Sendo assim, } \Delta s \sim N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t) \quad (37)$$

e sua evolução é a combinação de duas parcelas.

#### 4.1.1.2. Movimento Geométrico Browniano

Este popular modelo é o processo estocástico mais utilizado tanto na teoria econômica financeira quanto na prática. É o mais adequado para modelar preço de ações, taxas de juros, preços de produtos e outras variáveis financeiras e econômicas. Um MGB possui a seguinte representação matemática:

$$ds = \mu s dt + \sigma s dz \quad (38)$$

Ao dividir-se este modelo por  $s$  chega-se ao resultado que  $\frac{ds}{s}$  segue um MAB, ou seja, a variação proporcional de  $s$ ,  $\left(\frac{ds}{s}\right)$ , possui distribuição Normal.

É fácil perceber que  $\frac{ds}{s}$  é o incremento no  $\ln(s)$ :

$$d(\ln s) = \frac{1}{s} ds = \frac{ds}{s}. \text{ Então, seja } F = \ln s \rightarrow dF = d \ln s = \frac{ds}{s} \quad (39)$$

Já foi dito que o incremento no  $\ln(s)$  segue uma distribuição Normal. Para determinar os seus parâmetros será utilizado o Lema de Ito, que diz o seguinte:

“Se um processo estocástico a tempo contínuo,  $s(t)$ , puder ser representado pela equação abaixo, o mesmo será chamado de processo de Ito, sendo  $a(s,t)$  e  $b(s,t)$  funções não aleatórias conhecidas que representam a média e variância do processo.”

$$ds = a(s,t)dt + b(s,t)dz \quad (40)$$

Então, dada uma função  $F(s,t)$ , diferenciável no mínimo duas vezes em  $s$ , e uma vez em  $t$ , o Lema de Ito diz que esta função seguirá o seguinte processo:

$$dF = \left[ \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial s} ds + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} ds^2 \right] \quad (41)$$

É possível reescrever esta equação em uma forma expandida substituindo ds:

$$dF = \left[ \frac{\partial F}{\partial t} + a(s,t) \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{2} b^2(s,t) \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \right] dt + b(s,t) \frac{\partial F}{\partial s} dz \quad (42)$$

Desta forma, no caso de um Movimento Geométrico Browniano S e utilizando o Lema de Ito, temos que F(s,t) = ln s segue o seguinte processo:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{1}{s}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = -\frac{1}{s^2} \quad (43)$$

$$dF = \left[ 0 + \mu s \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{-1}{s^2} \right] dt + \sigma s \frac{1}{s} dz \quad (44)$$

$$dF = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (45)$$

Isto significa que, para qualquer intervalo de tempo T, a variação no log s é normalmente distribuída com média  $\left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T$  e variância  $\sigma^2 T$ .

#### 4.1.2. Processo de Reversão à Média

Um processo estocástico s(t) que segue um movimento geométrico browniano tende a seguir um caminho que muitas vezes se afasta completamente do seu ponto inicial. Isto realmente caracteriza a evolução de algumas variáveis econômicas, como no caso de preços de ativos especulativos, porém não retrata muito bem a realidade de outras variáveis, como por exemplo, o preço de *commodities*, tais como o petróleo. Neste último caso, por mais que em curto prazo o preço do petróleo possa flutuar aleatoriamente para cima ou para baixo, a longo prazo o preço provavelmente será trazido de volta para o custo marginal da produção de petróleo.

Sendo assim, é entendido por grande parte da doutrina que a forma mais adequada para se modelar a evolução do preço do petróleo, por exemplo, é utilizando o processo de reversão à média, que é representado matematicamente pela seguinte equação:

$$ds = \eta(\bar{s} - s)dt + \sigma dz \quad (46)$$

onde,  $\eta$  representa a velocidade de reversão, e  $\bar{s}$  é o nível para o qual  $s$  tende a retornar.

Cabe ressaltar que a variação esperada em  $s$  depende da diferença entre  $s$  e  $\bar{s}$ . Se  $s$  for maior do que  $\bar{s}$ , haverá uma variação negativa e o preço esperado será menor no próximo curto período de tempo.

O processo na forma citada acima é o mais utilizado e é também conhecido por processo de Ornstein-Uhlenbeck, porém existem outras formas para se representar um processo de reversão à média, tais como:

$$ds = \eta s(\bar{s} - s)dt + \sigma s dz \quad (47)$$

Ou,

$$ds = \eta(\bar{s} - s)dt + \sigma s dz \quad (48)$$

## 4.2. Modelos ARIMA

Uma série temporal é definida como um conjunto de observações, geralmente distribuídas de maneira equidistante pelo fator tempo, de uma dada variável e que possuem como característica central a presença de uma dependência serial entre elas.

Uma condição necessária para aplicação dos modelos ARIMA, é de que o processo que gerou a série temporal seja estacionário de segunda ordem, ou seja, que sua média e variância sejam constantes no tempo.

Um processo estocástico estacionário pode ser otimamente representado por um modelo auto regressivo (AR) e/ou médias móveis (MA) – ARMA (p,q).

A equação geral dos modelos ARMA(p,q) é dada por:

$$y_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + a_t - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i} \quad (49)$$

onde  $p$  e  $q$  são constantes positivas que representam os graus dos polinômios  $\phi$  e  $\theta$ , e  $a_t$  é uma série de ruído branco, ou seja,  $\{a_t\}$  é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média e variância finita.

Aplicando o operador de atraso, o modelo pode ser escrito como:

$$(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p) y_t = \phi_0 + (1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q) a_t \quad (50)$$

onde o polinômio  $(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)$  é o polinômio AR do modelo e similarmente, o polinômio  $(1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q)$  é referente à parte MA do modelo.

Para que este processo seja estacionário, as raízes do polinômio  $\phi$  devem estar fora do círculo unitário. Se isso acontece, a média incondicional do modelo é dada por

$$E(y_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p} \quad (51)$$

Caso a série temporal observada não apresente a condição de estacionariedade, nela deverá ser aplicado o operador de diferença, que efetuará uma filtragem, que poderá ser repetida quantas vezes se julgarem necessárias, até sua estacionarização. Se isto se fizer necessário, obtém-se a seguinte função:

$$\nabla Y_t = (1 - B)^d Y_t = w_t \quad (52)$$

Se  $w_t$  for resultado de uma diferenciação de  $Y_t$ , pode-se afirmar que  $Y_t$  é uma integração de  $w_t$ . O modelo resultante deste procedimento passa a ser, então, além de auto regressivo e médias móveis, integrado ARIMA(p,d,q).

Para se prever uma série temporal através dos modelos ARIMA, torna-se necessário identificar a ordem dos parâmetros p, d, q. O primeiro parâmetro a ser identificado é o grau de diferenciação d necessário à estabilização dos dados. Isto é feito através da análise do diagrama da função de autocorrelação (FAC), no qual são apresentados os valores das autocorrelações em relação aos lags k. Se as autocorrelações decrescerem de forma exponencial, realizam-se diferenciações na série, até que o diagrama apresente um corte abrupto para um valor qualquer de autocorrelação, quando a série será considerada estacionária.

Lembrando que a autocorrelação mede a intensidade com que um valor observado no tempo t é influenciado por aquele observado no tempo t - k, e é dada pela seguinte fórmula:

$$\rho_k = \frac{Cov(Y_t, Y_{t+k})}{\sqrt{Var(Y_t) \cdot Var(Y_{t+k})}} \quad (53)$$

A ordem auto-regressiva p é determinada pela verificação da função de autocorrelação parcial (FACP)  $\phi_{kk}$  da série estudada. Se a série for unicamente auto-regressiva ARIMA (p,d,0), sua função de autocorrelação parcial sofrerá uma

queda repentina após o lag  $k$ . Se não, efetua-se uma análise dos estimadores  $\phi_{kk}$  para verificar até que ordem de defasagem do correlograma desta função ele é estatisticamente significativa. Essa será sua ordem auto-regressiva.

A autocorrelação parcial por sua vez, é uma função que mensura a correlação entre  $Y_t$  e  $Y_{t+k}$ , excluindo a dependência dos valores intermediários  $Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots, Y_{t+k-1}$ .

### 4.3. Alisamento Exponencial

Os métodos de Alisamento Exponenciais devem ser usados quando os dados não proporcionam uma boa informação da relação dinâmica entre as observações passadas da série. Isto pode acontecer por qualquer das seguintes razões:

1. o passado da série é muito pequeno para encontrar seu padrão de comportamento;
2. não existe um padrão definido do passado da série; ou
3. os modelos não se ajustam bem ao passado da série. Além disso, os modelos podem ajustar bem ao passado da série, mas não ajustar muito bem para prever os valores futuros da série.

Uma série temporal é constituída por um conjunto de componentes individuais que influenciam a variável que está sendo estimada. Esta relação pode ser representada da seguinte forma:

$$Y_t = T_t + I_t + R_t \quad (54)$$

onde  $Y_t$  representa a variável estudada,  $T_t$  a tendência da variável ao longo do tempo,  $I_t$  as variações sazonais dentro da tendência, e  $R_t$  representa as variações inexplicáveis residuais ou remanescentes.

Se o interesse está em estabelecer projeções de uma variável que apresenta variação constante em torno de um valor central, é utilizado o método de Alisamento Exponencial Simples, que é representado pela seguinte fórmula:

$$L_t = \alpha Y_t + (1 - \alpha)L_{t-1} \quad (55)$$

Este método aplica um peso diferenciado a todas as observações da série, sendo este definido pela constante de alisamento  $\alpha$ . Quando esta constante está próxima de zero, a nova previsão será muito próxima da previsão anterior. Quando o método Alisamento Exponencial Simples é aplicado na previsão de

séries temporais que apresentam tendência entre as observações passadas, os valores prognosticados superestimam (ou subestimam) os valores reais. Para evitar esse erro sistemático, o método Alisamento Exponencial Linear, ou Alisamento de Holt, foi desenvolvido procurando reconhecer a presença de tendência na série de dados.

O valor da previsão  $m$  passos a frente obtido através deste método é alcançado pela aplicação da equação:

$$\hat{Y}_t^{(m)} = L_t + mT_t \quad (56)$$

As equações de alisamento são:

$$L_t = \alpha Y_t + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) \quad (57)$$

$$T_t = \gamma(L_t - L_{t-1}) + (1 - \gamma)T_{t-1} \quad (58)$$

A equação de  $L_t$  mostra que o alisamento do nível é uma média ponderada das novas observações e a estimativa do nível passado da série. Da mesma maneira, a equação de  $T_t$  mostra que a tendência alisada é uma combinação das estimativas velhas e novas de um período de mudança do nível alisado. Normalmente séries de variáveis econômicas apresentam sazonalidade, portanto, incluir mais esta componente ao modelo, utiliza-se o método de alisamento exponencial de Winters. Neste método é assumido que cada observação é o produto de um valor não sazonalizado e um índice sazonal para um particular mês ou trimestre. Assume-se que os valores não sazonais são descritos pelo modelo de Holt.

A equação de previsão  $m$  passos à frente, a partir do instante de tempo  $t$ , para o modelo de Winters multiplicativo de período  $s$  é:

$$\hat{Y}_t^{(m)} = (L_t + mT_t)I_t m \quad (59)$$

Enquanto as equações de alisamento são dadas por:

$$L_t = \alpha(Y_t / I_{t-s}) + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) \quad (60)$$

$$T_t = \gamma(L_t - L_{t-1}) + (1 - \gamma)T_{t-1} \quad (61)$$

$$I_t = \delta(Y_t / L_t) + (1 - \delta)I_{t-s} \quad (62)$$

A equação do nível  $L_t$  é semelhante à equação para o modelo de Holt, exceto que a medida mais recente é dessazonalizada, dividindo pelo índice sazonal calculado um ano antes. As equações de alisamento da tendência  $T_t$  dos dois modelos são idênticas. Já o índice sazonal é calculado como a razão entre a

observação e o alisamento do nível no instante de tempo  $t$ , (sendo que a média é calculada com os valores prévios daquele período particular).

#### 4.4. Modelos Multivariados

##### 4.4.1. Modelo Vetorial Auto-Regressivo

Um modelo VAR (vetor auto-regressivo) nada mais é do que uma análise multivariada de uma série de tempo. É uma extensão natural do modelo auto-regressivo univariado. Enquanto nos modelos univariados, as variáveis são números, no caso multivariado estes valores são substituídos por vetores e matrizes.

O interesse agora está em determinar a influência de variáveis dependentes na trajetória da variável até então designada “independente”. Em outras palavras, podemos permitir que o caminho de  $\{y_t\}$  seja afetado por realizações atuais e passadas da seqüência  $\{z_t\}$  e deixar também que a trajetória de  $\{z_t\}$  seja afetada por realizações atuais e passadas de  $\{y_t\}$ .

Um modelo de vetores auto-regressivos de  $p$ -ésima ordem, VAR( $p$ ), é então representado por:

$$y_t = c + \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (63)$$

Neste caso  $c$  denota um vetor de constantes ( $n \times 1$ ) e  $\Phi_j$  uma matriz ( $n \times n$ ) de coeficientes auto regressivos, para  $j = 1, 2, \dots, p$ . O vetor ( $n \times 1$ )  $\varepsilon_t$  é uma generalização de uma série de ruído branco:

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_\tau') = \begin{cases} \Omega, t = \tau \\ 0, t \neq \tau \end{cases}$$

Onde  $\Omega$  é uma matriz ( $n \times n$ ) simétrica e positiva definida.

Seja  $c_i$  o  $i$ -ésimo elemento do vetor  $c$  e  $\phi_{ij}^1$  o elemento da linha  $i$  e coluna  $j$  da matriz  $\Phi_1$ . Então a primeira linha do sistema de vetores é dada por:

$$y_{1t} = c_1 + \phi_{11}^{(1)} y_{1,t-1} + \phi_{12}^{(1)} y_{2,t-1} + \dots + \phi_{1n}^{(1)} y_{n,t-1} + \phi_{11}^{(2)} y_{1,t-2} + \phi_{12}^{(2)} y_{2,t-2} + \dots + \phi_{1n}^{(2)} y_{n,t-2} + \dots + \phi_{11}^{(p)} y_{1,t-p} + \phi_{12}^{(p)} y_{2,t-p} + \dots + \phi_{1n}^{(p)} y_{n,t-p} \quad (64)$$

Então, um vetor auto-regressivo é um sistema no qual é realizada uma regressão em cada variável, relacionando-a a uma constante  $c$  e a seus próprios  $p$  lags, bem como aos  $p$  lags de cada uma das outras variáveis do VAR. Cada regressão possui as mesmas variáveis explicativas.

Usando operadores de atraso, a equação (63) pode ser escrita da seguinte forma:

$$[I_n - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p] y_t = c + \varepsilon_t \quad (65)$$

ou

$$\Phi(L) y_t = c + \varepsilon_t \quad (66)$$

Na última expressão,  $\Phi(L)$  significa uma matriz de polinômios ( $n \times n$ ) no lag do operador.

Um processo de vetor é dito ser estacionário se os seus primeiro e segundo momentos forem independentes do tempo  $t$ . Em particular, se a média e a matriz de variância e covariância forem constantes no tempo. Se o processo for estacionário, a média  $\mu$  do processo é dada por:

$$\mu = (I_n - \Phi_1 - \Phi_2 - \dots - \Phi_p)^{-1} c \quad (67)$$

Já a matriz de variância e covariância é definida pela seguinte fórmula:

$$\Gamma_0 = E[(y_t - \mu)(y_{t-n} - \mu)'] \quad (68)$$

Esta é uma matriz ( $n \times n$ ), onde o  $i$ ésimo elemento da diagonal de  $\Gamma_0$  é a variância de  $y_{it}$  e o elementos  $(i, j)$  representam a covariância entre  $y_{it}$  e  $y_{jt}$ .

Abaixo encontra-se o formato detalhado da matriz  $\Gamma_0$ :

$$\Gamma_0 = E \left\{ \begin{bmatrix} y_t - \mu \\ y_{t-1} - \mu \\ \vdots \\ y_{t-n+1} - \mu \end{bmatrix} \times \left[ (y_t - \mu)' (y_{t-1} - \mu)' \dots (y_{t-n+1} - \mu)' \right] \right\} = \begin{bmatrix} \Gamma_0 & \Gamma_1 & \dots & \Gamma_{n-1} \\ \Gamma_1' & \Gamma_0 & \dots & \Gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Gamma_{n-1}' & \Gamma_{n-2}' & \dots & \Gamma_0 \end{bmatrix}. \quad (69)$$

#### 4.4.2. Modelo Vetorial de Correção de Erros

Na análise multivariada, se as variáveis forem estacionárias pode-se utilizar o modelo de vetores auto-regressivos (VAR) sem problemas, porém se as mesmas forem não-estacionárias é melhor que o modelo vetorial de correção de erros (VECM) seja utilizado.

O modelo VEC restringe o comportamento a longo prazo das variáveis endógenas para que as mesmas convirjam para o seu relacionamento de equilíbrio a longo prazo e permite uma movimentação nos períodos a curto prazo.

Este modelo pode ser escrito da seguinte forma:

$$\Delta Y_t = k + \Psi_1 \Delta Y_{t-1} + \dots + \Psi_{n-1} \Delta Y_{t-n+1} + \Pi Y_{t-1} + a_t \quad (70)$$

onde  $\Delta$  é o operador de diferença.  $\Psi$  representa uma matriz de coeficientes ( $n \times n$ ) e carrega informações a cerca do relacionamento a curto prazo das variáveis.

#### 4.5. Simulação de Monte Carlo

Um dos principais passos para o gerenciamento de risco de uma instituição não-financeira consiste na geração de cenários que permitem avaliar a distribuição de probabilidade do resultado financeiro e contábil de tal instituição. Para tanto, um método comumente utilizado é a Simulação de Monte Carlo.

Esta simulação consiste basicamente na geração aleatória de observações de alguma distribuição de probabilidade e o uso da amostra obtida para aproximar a função de interesse. No caso do presente trabalho, esta simulação pode ser implementada da seguinte forma:

1. Geram-se amostras aleatórias dos fatores de risco aos quais a instituição esteja exposta, a partir da distribuição de probabilidades de cada fator de risco considerado;
2. Realiza-se uma avaliação do resultado da instituição considerando cada valor gerado na amostragem dos fatores de risco, obtendo-se, portanto  $n$  valores de resultado, sendo  $n$  o tamanho da amostra. Com a simulação, os fatores de risco passam a ser considerados como determinísticos, e não mais estocásticos;

3. Feitos os cálculos apontados no item 2, obtém-se uma distribuição aproximada para o resultado da instituição, e a partir da mesma, podem ser estimados todos os momentos da variável de interesse.

Assim sendo, a esperança da variável resultado ( $R$ ) poderá ser estimada da seguinte forma:

$$E[\hat{R}] = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n} \quad (71)$$

E um estimador da variância será:

$$Var(\hat{R}) = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - E(\hat{R}))^2}{n-1} \quad (72)$$

#### 4.6. Gerando Variáveis Aleatórias Normais Correlatas – Decomposição de Cholesky

Diversas vezes nos deparamos com situações onde supomos independência entre as variáveis que estão sendo modeladas, porém esta é uma suposição muito forte e que nem sempre é verdade. O retorno de ativos, por exemplo, exibe um alto grau de correlação. Desta forma, precisamos então ser capazes de simular, neste caso, retornos aleatórios e correlatos. No caso do Movimento Geométrico Browniano (e em outros modelos baseados no Movimento Browniano) simular retornos aleatórios e correlatos significa gerar variáveis aleatórias Normais correlatas.

Portanto, o interesse está em gerar  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ , um vetor aleatório com distribuição NMV(0,  $\Sigma$ ), onde  $\Sigma$  é a matriz ( $n \times n$ ) de variância e covariância de  $Y$ .

A matriz  $\Sigma$  possui as seguintes propriedades:

- 1- É simétrica, ou seja,  $\Sigma^T = \Sigma$
- 2- Os elementos da diagonal satisfazem  $\Sigma_{i,i} \geq 0$
- 3- É positiva semi-definida, então  $y^T \Sigma y \geq 0$  para todo  $y \in \mathbb{R}^n$ .

Como motivação, suponha a variável aleatória  $Z_i \sim N(0,1)$  independente e identicamente distribuídas para todo  $i = 1, \dots, n$ . Então,

$$c_1 Z_1 + \dots + c_n Z_n \sim N(0, \sigma^2) \quad (73)$$

onde  $\sigma^2 = c_1^2 + \dots + c_n^2$ . Ou seja, a combinação linear de variáveis aleatórias com distribuição Normal será também Normal.

Generalizando, seja  $C$  uma matriz ( $n \times n$ ) e  $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^T$ . Então,

$$C^T Z \sim NMV(0, C^T C) \quad (74)$$

Desta forma, o problema em se encontrar a matriz de variâncias e covariâncias  $\Sigma$  se reduz a encontrar a matriz  $C$ , pois

$$C^T C = \Sigma \quad (75)$$

Para encontrar a matriz  $C$  será necessário utilizar o processo de decomposição de Cholesky em  $\Sigma$ .

Para utilizar o processo de Cholesky a matriz do sistema precisa ser simétrica e positiva definida, como é o caso de  $\Sigma$ . Suponha uma matriz  $\Sigma$  ( $3 \times 3$ ). Pelo método de Cholesky podemos então reescrever a matriz  $\Sigma$  da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11}^2 & c_{11}c_{12} & c_{11}c_{13} \\ c_{11}c_{12} & c_{12}^2 + c_{22}^2 & c_{12}c_{23} + c_{23}c_{22} \\ c_{11}c_{13} & c_{13}c_{12} + c_{23}c_{22} & c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 \end{bmatrix} \quad (76)$$

E assim é possível encontrar os elementos da matriz  $C$  da seguinte forma:

$$c_{11} = 1$$

$$c_{12} = \rho_{12}$$

$$c_{13} = \rho_{13}$$

$$c_{22} = (1 - \rho_{12}^2)^{1/2}$$

$$c_{23} = \frac{\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}}{(1 - \rho_{12}^2)^{1/2}}$$

$$c_{33} = \left[ 1 - \rho_{13}^2 - \left( \frac{\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}}{(1 - \rho_{12}^2)^{1/2}} \right)^2 \right]^{1/2}$$

De posse da matriz  $C$ , para simularmos uma distribuição Normal Multivariada correlata (NMVC), basta gerarmos uma amostra de uma distribuição NMV(0,1) e realizarmos a seguinte operação:

$$NMVC = C^T (NMV + \mu) \quad (77)$$

onde  $\mu$  é a média da distribuição NMV correlata de interesse.