

2

OFDM: Princípios Básicos

Esse capítulo visa mostrar os princípios fundamentais da transmissão OFDM. Primeiramente, apresentamos um breve histórico. Trabalhos mais detalhados sobre a evolução do OFDM podem ser encontrados em (Zou95, Bin90). Boas introduções ao assunto (algumas bem mais detalhadas do que a análise que segue) podem ser achadas em (Edf96, Wan00, Muq02, Mar05).

OFDM é um tipo de tecnologia variante do *Frequency Division Multiplexing* (FDM) (em português, multiplexação por divisão de frequência)ⁱ. Dado um canal de banda limitada, os sistemas FDM transmitem sinais simultâneos em bandas distintas. O receptor separa os sinais de cada banda por meio de filtros. Esses sistemas necessitam de filtros relativamente precisos para não haver desperdício de espectro com bandas de guarda. Apesar disso e de outras deficiências, há muito tempo sistemas multi-portadoras chamam atenção por qualidades importantes em relação a sistemas de portadora única. Comentaremos mais a seguir.

Na década de 60, alguns pesquisadores analisaram a transmissão de sinais em bloco multiplexados em frequência com a utilização de sub-canais ortogonaisⁱⁱ – a partir desse ponto podemos falar em OFDM. Um banco de osciladores tanto no transmissor quanto no receptor separava os sinais referentes a cada sub-canal e um intervalo de guarda entre blocos subsequentes evitava interferência de blocos anteriores. Em condições ideais, o sistema proposto eliminava tanto a interferência entre sub-portadoras (*inter-channel interference*, ou ICI) quanto a interferência entre blocos (*inter-block interference*, ou IBI).

Um grande passo adiante para a praticidade de sistemas OFDM veio com o trabalho de Weinstein e Ebert (Wei71). A utilização do banco de osciladores tornava complicada e custosa a geração de sinais OFDM, e Weinstein e Ebert contornaram esse problema ao descrever um esquema de modulação e demodulação que podia ser facilmente implementado com a transformada de Fourier discreta (*Discrete Fourier Transform*, ou DFT). Esse trabalho propunha a utilização de intervalos de guarda entre blocos subsequentes e

ⁱO Apêndice A lista as abreviações utilizadas ao longo desse trabalho.

ⁱⁱNesse trabalho, usaremos os termos sub-canal, sub-portadora e tom de forma intercambiável.

pulsos cosseno levantado para mitigar a ICI e a IBI. Mesmo assim, perdia-se um pouco da ortogonalidade entre as sub-portadoras, ou seja, ainda havia ICI presente.

A tecnologia OFDM ganhou maturidade com o trabalho de Peled e Ruiz (Pel80), que introduziram o prefixo-cíclico (*cyclic-prefix*, ou CP). O CP consistia em replicar a parte final do bloco a ser transmitido no intervalo de guarda anterior ao bloco. Em outras palavras, ao invés de se utilizar um intervalo de guarda silencioso, propunha-se transmitir uma cópia da parte final do bloco no intervalo de guarda. O sistema equivalente pode ser interpretado como uma série de sub-canais ortogonais, ou seja, em condições ideais com zero ICI e zero IBI. Cada sub-canal apresentava uma resposta em frequência aproximadamente plana, ou seja, os símbolos de dados eram multiplicados por uma constante complexa equivalente à resposta de frequência daquele sub-canal.

Esse capítulo apresenta a técnica OFDM em seus princípios básicos. Primeiramente analisamos o OFDM em seu modelo contínuo, que é de entendimento mais fácil, na Seção 2.1. Analisamos brevemente uma comparação entre sistemas paralelos e seriais na Seção 2.2. A seguir, voltamos atenção para o equivalente discreto na Seção 2.3, que é o modelo mais moderno e o que é realmente utilizado. Finalmente, comentamos na Seção 2.4 sobre o modelo de canal que será adotado.

2.1

Modelo Contínuo

Considere um canal de banda B Hz. O sistema OFDM divide o espectro disponível em K sub-canais de largura $\Delta_f = B/K$. O modelo contínuo deve contar, portanto, com K osciladores, cada um referente a um sub-canal. A Fig. 2.1 mostra o diagrama de blocos para o processamento a ser feito. A envoltória complexa do sinal referente ao n -ésimo bloco é dada por

$$s_n(t) = \sum_{l=0}^{K-1} x_n^l \phi^l(t - nT'), \quad nT' \leq t \leq (n+1)T', \quad (2-1)$$

onde

$$\phi^l(t) = \frac{1}{\sqrt{T'}} \exp[j2\pi l \Delta_f (t - T_{cp})] \Pi_{T'}(t) \quad (2-2)$$

são as sub-portadoras, indexadas por $l = 0, \dots, K-1$ e espaçadas de $\Delta_f = 1/T' = B/K$ Hz e

$$\Pi_{T'}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T' \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2-3)$$

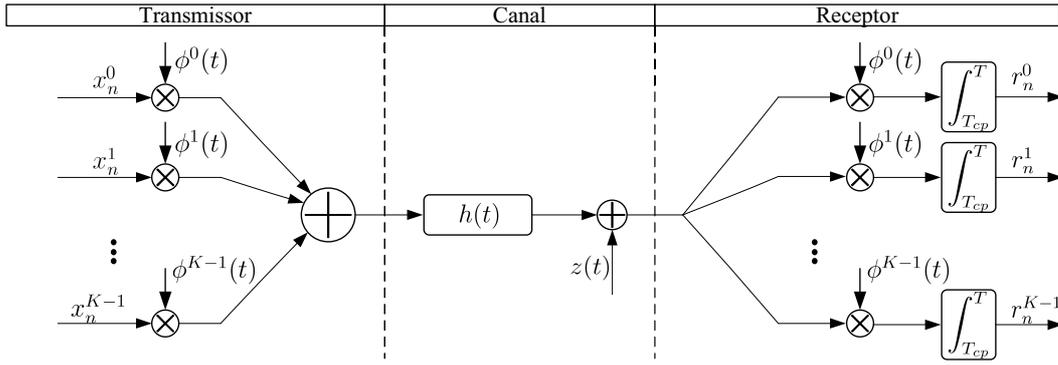


Figura 2.1: Modelo de transmissão OFDM contínuo.

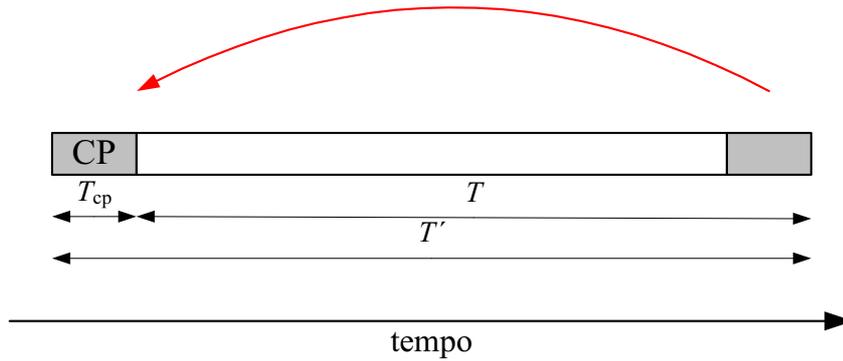


Figura 2.2: Prefixo cíclico para o n -ésimo bloco de dados para o modelo contínuo.

é a função pulso retangular. As variáveis complexas x_n^k são pontos da constelação \mathcal{X} , com cada ponto codificando $\log_2 |\mathcal{X}|$ bits – $|\mathcal{X}|$ indica a cardinalidade do conjunto. Usaremos sempre o sub-escrito para designar tempo (nesse caso, o bloco de transmissão) e o sobre-escrito para indexar frequência (nesse caso, um determinado sub-canal). Portanto, x_n^l deve ser lido como o símbolo do l -ésimo sub-canal referente ao n -ésimo bloco.

A análise de (2-1) deixa claro o porquê da interpretação usual do sistema OFDM, que é a de K sub-canais carregando simultânea e independentemente uma taxa de dados baixa. A transmissão é simultânea porque o bloco de símbolos $\mathbf{x}_n = [x_n^0 \ \dots \ x_n^{K-1}]^T$ é transmitido de uma só vez, cada símbolo em uma sub-portadora diferente. E as sub-portadoras são independentes pois são ortogonais entre si, ou seja,

$$\int_{T_{cp}}^{T'} \phi^l(t) \phi^k(t) dt = \begin{cases} 1, & l = k \\ 0, & l \neq k. \end{cases} \quad (2-4)$$

Observar em (2-2) que a duração de cada bloco é de $T' = T_{cp} + T = T_{cp} + K/B$. O intervalo T_{cp} é o intervalo de guarda entre blocos OFDM adjacentes. Esse tempo é preenchido por uma cópia dos últimos $T' - T_{cp}$ segundos da forma de

onda moduladora, como mostrado na Fig. 2.2. A essa cópia damos o nome de prefixo cíclico. Veremos em breve sua utilidade.

O sinal recebido referente ao n -ésimo bloco transmitido é dado por

$$r_n(t) = h(t - \tau) \star s_n(t) + h(t - \tau) \star s_{n-1}(t) + z(t),$$

$$nT' \leq t \leq (n + 1)T', \quad (2-5)$$

onde \star denota convoluçãoⁱⁱⁱ, $h(t - \tau)$ é a resposta do canal a um impulso aplicado no instante τ e $z(t)$ é ruído complexo, gaussiano, branco e com densidade espectral de potência σ . O termo que contém $s_{n-1}(t)$ é relativo ao IBI.

Consideramos duas coisas sobre a resposta do canal em (2-5). Primeiramente, ela será tida como constante durante um bloco OFDM. Isso faz com que possamos escrevê-la como $h_n(t)$ para o n -ésimo bloco. Essa hipótese é usual em grande parte dos estudos sobre OFDM. Além disso, considera-se que a resposta ao impulso do canal tem duração máxima de T_h segundos, isto é, $h_n(t) = 0, \forall n, \forall t > T_h$. É fundamental para o bom funcionamento do sistema OFDM que a duração do CP exceda T_h , i.e. $T_{cp} > T_h$. Em outras palavras, a resposta ao impulso do canal deve caber toda ela na duração do prefixo cíclico. Sempre consideraremos isso a partir de agora. Levando em conta esses dois fatos, podemos re-escrever (2-5) como

$$r_n(t) = \int_0^{T_{cp}} \left[h_n(\tau) s_n(t - \tau) + h_{n-1}(\tau) s_{n-1}(t - \tau) \right] d\tau + z(t),$$

$$nT' \leq t \leq (n + 1)T'. \quad (2-6)$$

O receptor consiste em K correlatores, cada um casado ao intervalo $[T_{cp}, T']$ de uma das formas de onda em (2-2) (ver Fig. 2.1). Definimos a saída do k -ésimo integrador como

$$r_n^k = \int_{nT' + T_{cp}}^{(n+1)T'} r_n(t) \phi^k(t - nT') dt, \quad (2-7)$$

que, após troca de variável, resulta em

$$r_n^k = \int_{T_{cp}}^{T'} r_n(t + nT') \phi^k(t) dt, \quad (2-8)$$

que, por sua vez, ao ser combinada com (2-6), vem a ser

$$r_n^k = \int_{T_{cp}}^{T'} \left[\int_0^{T_{cp}} h_n(\tau) s_n(t + nT' - \tau) d\tau + z(t + nT') \right] \phi^k(t) dt. \quad (2-9)$$

Aqui já não precisamos levar em conta o termo relativo ao IBI, pois a resposta

ⁱⁱⁱO Apêndice B lista os operadores matemáticos usados ao longo desse trabalho.

ao bloco anterior fica toda ela limitada ao intervalo $[0, T_{cp}]$. Lembrar que estamos considerando $h_n(t) = 0, \forall n, t > T_{cp}$. Essa é uma das funções do CP. Caso $T_{cp} > T_h$, que é o que estamos considerando, a IBI sempre será zero.

Utilizando a definição de $s_n(t)$ em (2-1) e re-organizando, obtemos

$$\begin{aligned} r_n^k &= \int_{T_{cp}}^{T'} \left[\int_0^{T_{cp}} h_n(\tau) \sum_{l=0}^{K-1} x_n^k \phi^l(t - \tau) d\tau + z(t + nT') \right] \phi^k(t) dt \\ &= \sum_{l=0}^{K-1} x_n^l \int_{T_{cp}}^{T'} \left[\int_0^{T_{cp}} h_n(\tau) \phi^l(t - \tau) \phi^k(t) d\tau \right] dt + z_n^k. \end{aligned} \quad (2-10)$$

Aqui $z_n^k = \int_{T_{cp}}^{T'} \phi^k(t) z(t + nT') dt$ é a componente do ruído na detecção. Essa perturbação tem variância σ , é complexa, gaussiana e branca^{iv}.

Focaremos agora na integral em τ , que definimos por \mathcal{T} . Seja

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \int_0^{T_{cp}} h_n(\tau) \phi^l(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi l \Delta_f (t - T_{cp})} \int_0^{T_{cp}} h_n(\tau) \exp[-j2\pi l \Delta_f \tau] \Pi_{T'}(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2-11)$$

A integral acima é a convolução de dois sinais. Abaixo, aplicamos a transformada inversa e direta de Fourier, representadas por \mathbf{F}^{-1} e \mathbf{F} , respectivamente. Obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi l \Delta_f (t - T_{cp})} \mathbf{F}^{-1} \left(\mathbf{F} \left(h_n(t) \exp[-j2\pi l \Delta_f t] \star \Pi_{T'}(t) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi l \Delta_f (t - T_{cp})} \mathbf{F}^{-1} \left(q_n(f + l\Delta_f) \times \frac{1}{\Delta_f} \text{sinc} \left(\frac{f}{\Delta_f} \right) \exp[-j2\pi f T' / 2] \right) \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi l \Delta_f (t - T_{cp})} q_n(l\Delta_f) \Pi_{T'}(t) \\ &= q_n^l \phi^l(t), \end{aligned} \quad (2-12)$$

onde usamos a propriedade de que a convolução de funções no tempo equivale ao produto das respectivas transformadas na frequência e definimos q_n^l como a transformada de Fourier da resposta ao impulso $h_n(t)$ amostrada no subcanal l . Matematicamente, escrevemos $q_n(f) = \mathbf{F}(h_n(t))$ e $q_n^l = q_n(l\Delta_f)$. A aproximação vem do fato de que a função $\text{sinc}(\cdot)$ em (2-12) é tão estreita em relação às variações da resposta de frequência do canal que podemos considerar que essa última é constante na duração efetiva do $\text{sinc}(\cdot)$ e aproximar o produto $q_n(f + l\Delta_f) \times 1/\Delta_f \text{sinc}(f/\Delta_f)$ por $q(f + l\Delta_f)|_{f=0} \times 1/\Delta_f \text{sinc}(f/\Delta_f)$. Em outras palavras, $q_n^l = q(f + l\Delta_f)|_{f=0}$ funciona como um ganho para a função $\text{sinc}(\cdot)$, e

^{iv}Notar que a variância do ruído é definida por σ , e não σ^2 , como é mais usual.

dessa forma pode ser ignorado na operação da transformada inversa de Fourier.

Substituindo (2-12) em (2-10), obtemos

$$r_n^k \approx \sum_{l=0}^{K-1} x_n^l q_n^l \int_{T_{cp}}^{T'} \phi^l(t) \phi^k(t) dt + z_n^k. \quad (2-13)$$

Utilizando (2-4), é fácil chegar a (ignora-se a aproximação a partir desse ponto)

$$r_n^k = x_n^k q_n^k + z_n^k, \quad (2-14)$$

que por sua vez pode ser escrita em forma matricial para a transmissão do n -ésimo bloco como

$$\mathbf{r}_n = \text{diag} \{ \mathbf{q}_n \} \mathbf{x}_n + \mathbf{z}_n, \quad (2-15)$$

onde $\mathbf{q}_n = [q_n^0 \cdots q_n^{K-1}]^T$ e $\text{diag} \{ \cdot \}$ é um operador de transformação de um vetor para uma matriz quadrada com os elementos do vetor na diagonal principal. Ou seja, o esquema de transmissão mostrado na Fig. 2.1 se reduz essencialmente a um sistema paralelo e ruidoso de transmissão de dados onde os símbolos são multiplicados pela resposta em frequência do sub-canal correspondente. Caso as hipóteses feitas sobre o canal sejam verdadeiras e caso haja sincronismo perfeito entre transmissor e receptor, não há ICI nem IBI. Como cada símbolo é distorcido por somente um número complexo, um equalizador de apenas 1 tap é necessário para cada sub-canal.

2.2

Transmissão paralela vs. Transmissão serial

Dada a mesma banda de B Hz, poderíamos projetar um sistema de transmissão serial, de portadora única, com a mesma taxa de dados para comparação com o OFDM. O símbolo da portadora única (*single carrier*, ou SC) seria de curta duração, $T_s = T'/K$ e a banda ocupada seria $K\Delta_f$ – ou seja, um símbolo SC ocuparia a banda inteira disponível.

As vantagens do sistema OFDM nessa disputa são várias. Pelo fato de que os símbolos são de longa duração, os efeitos de espalhamento do canal são limitados. Na transmissão serial, os efeitos da interferência entre símbolos consecutivos é bastante nociva, o que faz com que sistemas de portadora única necessitem de equalizadores complexos, de vários taps. A equalização do sinal recebido OFDM, como visto anteriormente, é muito mais simples. Esse fato pode ser interpretado com a ajuda da Fig. 2.3. Pelo fato de Δ_f ser relativamente pequeno, cada sub-portadora experimenta um canal aproximadamente plano na frequência, enquanto que o sinal serial sofre distorção seletiva em frequência.

O sistema OFDM também dá margem para manobras interessantes. Como a transmissão em cada sub-canal é independente das outras, pode-se

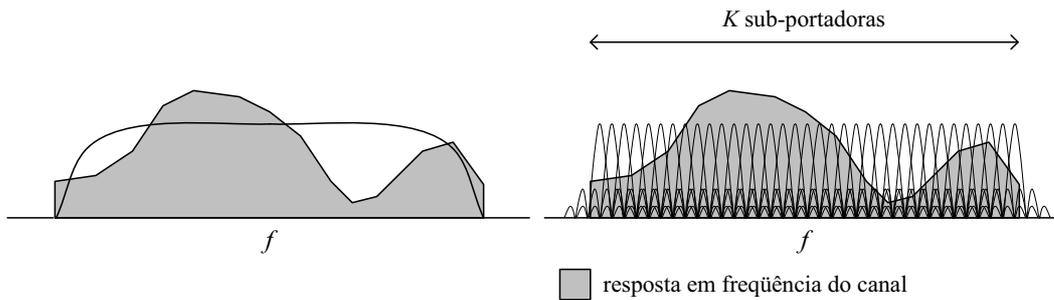


Figura 2.3: À esquerda, ilustração de um sistema com portadora única. O espectro do sinal é seriamente distorcido pelo canal. À direita, sistema de multi-portadoras ortogonais. Sub-canais OFDM encontram canais aproximadamente planos na frequência.

carregar mais bits em canais mais favoráveis e menos bits em canais ruins. Isto é, a potência não precisa necessariamente ser uniformemente distribuída entre os sub-canais. Isso é especialmente indicado em comunicações cabeadas, já que essas contam com canais com pouca variação temporal. Os sistemas DSL (*Digital Subscriber Lines*) foram padronizados com uma variante do OFDM, chamada *Discrete Multitone* (DMT), em que há margem para alocação dinâmica de potência. Trabalhos sobre como melhor alocar potência ou bits em um sistema DMT existem tanto para um único usuário (ver, por exemplo (Cam99) e referências) quanto para vários usuários que interferem entre si (ver (Mor08) e referências).

Outra opção interessante, essa mais voltada para sistemas sem fio, é a alocação dinâmica de símbolos-piloto. Esse assunto será abordado em detalhe no Capítulo 4.

2.3

Modelo Discreto

As vantagens de sistemas multi-portadoras sobre sistemas de transmissão serial são bastante importantes, mas os sistemas OFDM contínuos sofrem de graves problemas de complexidade de implementação. Cada sub-canal equivale a um oscilador e um correlator, um no transmissor e outro no receptor, respectivamente, o que para valores de K elevados é bastante problemático. Esses problemas provêm tanto da implementação física como para questões de sincronismo de portadora.

Os sistemas OFDM tiveram imenso ganho em praticidade com o uso de uma implementação completamente digital do esquema de modulação. A Fig. 2.4 ilustra os passos para a transmissão. Nesse esquema não há bancos de osciladores. O processamento é feito todo em banda básica, e a obtenção da ortogonalidade entre as portadoras dispensa filtros ou correlatores.

$$\mathbf{H}_C = \begin{bmatrix} h_n[0] & & & h_n[L_h-1] & \cdots & h_n[1] \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & h_n[L_h-1] \\ h_n[L_h-1] & & & & & \\ & & & h_n[L_h-1] & \cdots & h_n[0] \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

que é uma *matriz circulante* de tamanho $(K \times K)$. De novo os valores não-nulos em (2-22) são limitados pelas linhas pontilhadas. Assim, re-escrevemos (2-21) como

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{F}\mathbf{H}_C\mathbf{F}^{-1}\mathbf{x}_n + \mathbf{z}_n. \quad (2-23)$$

E, finalmente, aproveita-se o fato de que uma matrix circulante pode ser diagonalizada com pré- e pós-multiplicação por matrizes de DFT e IDFT, respectivamente (Wan00). O resultado é uma matriz quadrada com a diagonal contendo a resposta em frequência do canal discreto, isto é,

$$\mathbf{r}_n = \text{diag} \{ \mathbf{q}_n \} \mathbf{x}_n + \mathbf{z}_n. \quad (2-24)$$

Note a similaridade entre os vetores (2-24) e (2-15). Vê-se que no modelo discreto as utilidades do CP são duas: evitar o IBI e tornar a matriz do canal circulante. Vale enfatizar que, para o modelo discreto, a ortogonalidade entre as sub-portadoras é obtida por *processamento de sinal em banda-base*, e não por meio de *filtragem em banda passante* (Bin90). Isso corresponde a um ganho de simplicidade imenso. Usando a *fast fourier transform* (FFT), sistemas OFDM de grande escala são implementados hoje em dia em diversas tecnologias, tanto para sistemas sem fio quanto para cabeados.

A título de curiosidade, citamos uma alternativa à transmissão OFDM com CP. Essa proposta acrescenta L_{cp} zeros ao bloco a ser transmitido, e por isso é usualmente chamada de *zero-padding* (ZP) (Muq02, Mar05). O receptor ZP é mais robusto do que o CP, porém mais complexo. Nesse trabalho, trabalhamos apenas com o CP. A partir desse ponto sempre que nos referirmos a OFDM, estamos implicitamente referindo-nos ao CP-OFDM.

O modelo em (2-24) supõe sincronização perfeita entre transmissor e receptor. Consideramos isso ao longo desse texto. Cenários menos ideais quebram a ortogonalidade entre as sub-portadoras, o que produz ICI. Há também o problema do pico de potência elevado (mais conhecido como *peak to average power ratio*, ou PAPR). O somatório de K senóides de frequência diferentes pode gerar picos que, ao passarem por um amplificador de potência, geram distorção e desperdício de energia. A pesquisa sobre redução desse efeito

é interessante e rica (ver, por exemplo, (Jia08) e referências). Entretanto, também ignoramos essa dificuldade.

2.4

Modelagem do canal discreto

O canal discreto no tempo \mathbf{h}_n possui L_h taps e é modelado como estacionário no sentido amplo (ESA) e variante no tempo. Os taps são independentes entre si e cada seqüência $\{h_n[l]\}$ segue uma correlação do tipo

$$\mathcal{R}_{h,t}[n] = \mathcal{J}_0(2\pi f_m |n|), \quad (2-25)$$

em que $\mathcal{J}_0(\cdot)$ é a função de Bessel de ordem zero, e f_m é o máximo desvio Doppler. Isso quer dizer que para uma dada realização de canal, o canal no instante seguinte é gerado seguindo a função autocorrelação de Rayleigh, mais conhecida como modelo de Jakes (Jak74). Seguimos um perfil decrescente para as potências médias dos taps, ou seja, os primeiros elementos do vetor \mathbf{h} terão mais potência que os últimos. O perfil de potência é o mesmo sugerido em (Pan08),

$$\gamma[l] = \sigma_l = \rho \exp\left(\frac{1-l}{2L_h}\right), \quad l = 0, 1, \dots, L_h - 1, \quad (2-26)$$

onde σ_l é a potência do l -ésimo tap, e ρ é uma constante de controle que garante $\sum_{l=0}^{L_h-1} \gamma[l] = 1$. Cada tap tem, portanto, correlação $\mathcal{R}_{l,t}[n] = \mathcal{E}[h_i[l]h_{i+n}^*[l]] = \gamma[l]\mathcal{R}_{h,t}[n]$. Como os taps são independentes, a correlação espacial entre eles pode ser organizada em forma de matriz da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{h}\mathbf{h}} &= \mathcal{E}[\mathbf{h}_n \mathbf{h}_n^H] = \begin{bmatrix} \gamma(0) & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma(L_h - 1) \end{bmatrix} \\ &= \text{diag}\{\boldsymbol{\gamma}\}, \end{aligned} \quad (2-27)$$

onde $\boldsymbol{\gamma}$ é um vetor $(L \times 1)$ com as potências de cada tap do canal, isto é, $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma[0] \ \dots \ \gamma[L_h - 1]]^T$.

Cada tap é gerado com o modelo autoregressivo de variação proposto em (Bad05) e ilustrado na Fig. 2.6. O n -ésimo valor atual do canal é obtido com a filtragem dos valores anteriores pelo filtro $\boldsymbol{\alpha}$, de comprimento Q .

$$h_n[l] = -\sum_{i=0}^{Q-1} \alpha_i h_{n-i-1}[l] + c_n. \quad (2-28)$$

Os coeficientes do filtro são obtidos com

$$\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{R}_{l,t}^{-1} \mathbf{v}, \quad (2-29)$$

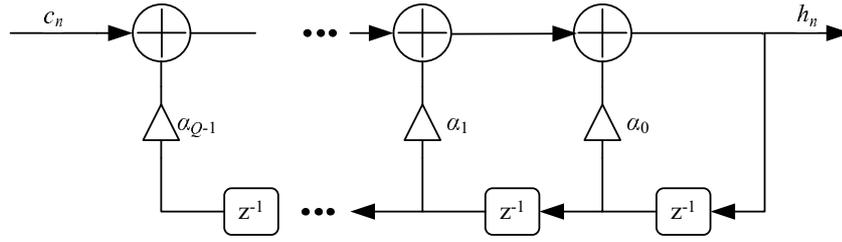


Figura 2.6: Filtro autoregressivo para a geração do canal Rayleigh.

em que $\mathcal{R}_{ll,t}$ é a matriz autocorrelação da seqüência $\{h_n[l]\}$ do l -ésimo tap, de tamanho $(Q \times Q)$, que contém os valores da correlação do canal do instante 0 até o instante $Q - 1$; e \mathbf{v} é um vetor $(Q \times 1)$ que contém os valores da correlação temporal do canal do instante 1 até Q . Em forma matemática,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ll,t} &= \gamma[l] \mathcal{R}_{hh,t} \\ &= \gamma[l] \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{h,t}[0] & \mathcal{R}_{h,t}[1] & \dots & \mathcal{R}_{h,t}[Q-1] \\ \mathcal{R}_{h,t}[1] & \mathcal{R}_{h,t}[0] & & \mathcal{R}_{h,t}[Q-2] \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathcal{R}_{h,t}[Q-1] & \mathcal{R}_{h,t}[Q-2] & \dots & \mathcal{R}_{h,t}[0] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-30)$$

e

$$\mathbf{v} = \gamma[l] \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{h,t}[1] & \mathcal{R}_{h,t}[2] & \dots & \mathcal{R}_{h,t}[Q] \end{bmatrix}^T. \quad (2-31)$$

Ainda em (2-28), a seqüência $\{c_n\}$ é composta de variáveis aleatórias (VA) gaussianas, complexas e independentes de média zero e matriz autocorrelação dada por $\sigma_c \mathbf{I}_N$, onde

$$\sigma_c = \mathcal{R}_{l,t}[0] + \sum_{i=1}^{Q-1} \alpha_{i-1} \mathcal{R}_{l,t}[-i]. \quad (2-32)$$

O filtro proposto em (Bad05) funciona apenas se houver Q valores com a correlação desejada disponíveis como condição inicial do filtro. Referindo à Fig. 2.6, é necessário que, quando da geração de h_Q , os atrasos tenham em suas entradas valores iniciais com a correlação desejada. Caso isso não ocorra, a correlação desejada seria obtida apenas com $n \rightarrow \infty$. A geração da condição inicial do filtro pode ser calculada resolvendo a Eq. (2-29) separadamente para os $Q - 1$ primeiros instantes. O primeiro valor da saída, h_0 , tem suas componentes em fase e quadratura sorteadas independentemente de uma VA $\mathcal{N}(0, \mathcal{R}_{l,t}[0]) - \mathcal{N}(x, y)$ denota gaussiana com média x e variância y . A partir daí, para $n = 1, \dots, Q - 1$, os coeficientes do filtro α seriam calculados para o n -ésimo estágio por (2-29) e h_n gerado a cada passo. Quando $n = Q$, o filtro α pode ser usado para a geração de todas as amostras seguintes. De novo analisando a Fig. 2.6, esse processo equivale a adicionar um estágio do

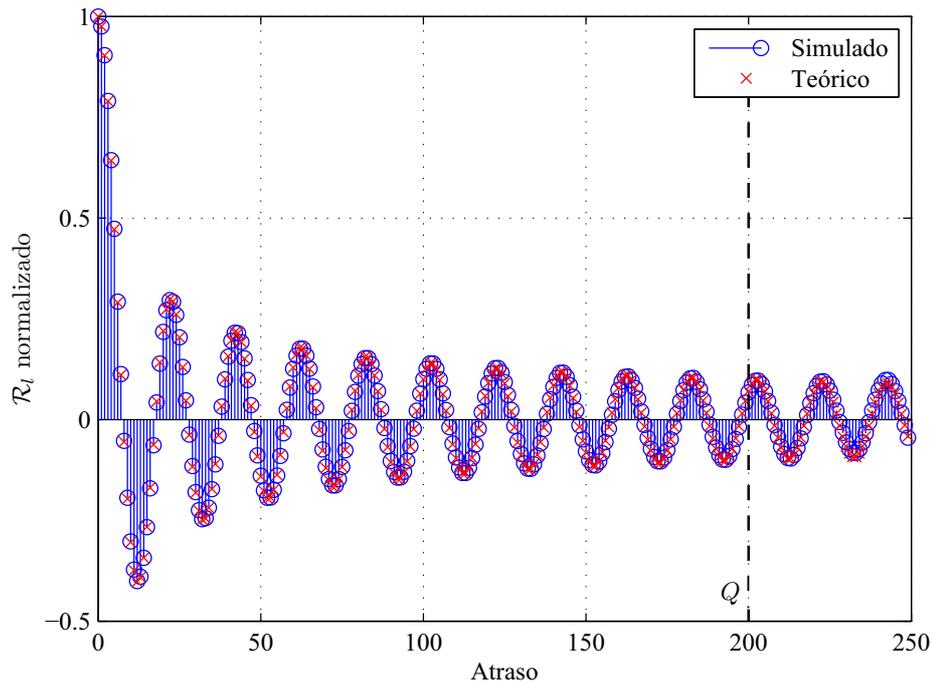


Figura 2.7: Autocorrelação para 5×10^6 amostras de uma VA gerada com o modelo autoregressivo com $Q = 200$.

filtro a cada novo instante, com seus respectivos coeficientes $\alpha(n)$ calculados, até que o filtro contenha Q estágios. Garante-se a que a autocorrelação da seqüência gerada é igual àquela desejada até o instante Q (para mais detalhes, ver (Bad05)).

A Fig. 2.7 mostra a autocorrelação simulada e a desejada para um gerador autoregressivo de tamanho $Q = 200$. A autocorrelação desejada é dada por (2-27) com $f_m = 5 \times 10^{-2}$. Para a geração da figura, foram criadas 5×10^6 valores da VA de saída.