

**Gleudson Fonseca Soares**

**Algoritmos Primais e Duais para o Problema  
das p-Mediana**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Informática do Departamento de Informática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Marcus Vinicius Soledade Poggi de Aragão

Rio de Janeiro  
Abril de 2009

**Gleudson Fonseca Soares**

## **Algoritmos Primais e Duais para o Problema das p-Mediana**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Informática do Departamento de Informática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Marcus Vinicius Soledade Poggi de Aragão**

Orientador

Departamento de Informática — PUC-Rio

**Prof. Ruy Luiz Milidiú**

Departamento de Informática — PUC-Rio

**Prof. Haroldo Gambini Santos**

Departamento de Computação — UFOP

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 13 de Abril de 2009

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### Gleudson Fonseca Soares

Graduou-se na Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP (Ouro Preto-MG, Brasil), cursando Ciência da Computação. Durante sua graduação, foi pesquisador da FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais) em um trabalho de iniciação científica no LIAO (Laboratório de Inteligência Artificial e Otimização), vinculado ao GLPO (Grupo de Logística e Pesquisa Operacional) da UFOP. Durante o Mestrado foi bolsista CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), desenvolvendo um trabalho tratando um problema clássico de localização de facilidades, o problema das p-Medianas.

#### Ficha Catalográfica

Soares, Gleudson Fonseca

Algoritmos Primais e Duais para o Problema das p-Medianas / Gleudson Fonseca Soares; orientador: Marcus Vinicius Soledade Poggi de Aragão. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Informática, 2009.

v., 107 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Informática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Informática – Tese. 2. Programação Inteira;. 3. Otimização Combinatória;. 4. Algoritmos Primais;. 5. Algoritmos Duais;. 6. Problemas de Localização;. 7. Problema das p-Medianas.. I. Aragão, Marcus Vinicius Soledade Poggi de. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Informática. III. Título.

CDD: 004

## Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à Deus pela minha vida e por todas as minhas conquistas.

Aos meus pais Gualter e Marta, pelo amor, incentivo, companheirismo, educação e por todo sacrifício que fizeram em benefício de minha formação pessoal e profissional.

Aos meus irmãos Sanderlene, Glaubert e Alessandra, pelo amor, amizade e apoio.

Aos professores e funcionários do Departamento de Informática da PUC-Rio, em especial ao professor Marcus Vinicius Soledade Poggi de Aragão, pela orientação, amizade e pela contribuição inigualável para a consolidação de minha formação acadêmica e profissional.

Aos professores Ruy Luiz Milidiú e Haroldo Gambini Santos, pela participação na banca examinadora.

Aos professores do Departamento de Computação da UFOP, em especial aos professores Marcone Jamilson Freitas Souza e Gustavo Peixoto Silva, pelo incentivo e ajuda no ingresso à pós-graduação.

Aos amigos da PUC-Rio pelos momentos de estudo e diversão. Em especial, Sanjay Jena, Carlos Raoni, Vitor Dantas, Evelin Amorin, Sérgio Medeiros e Bruno Silvestre.

Aos amigos que me acompanham deste a graduação, em especial Hugo Bassi, Matheus Silva, Márcio Mine, Daniel Brum e Silas Sallaume.

Aos amigos da república Alcatéia, com quem convivi durante toda a minha graduação e que contribuíram com a minha formação.

Ao pessoal da Gapso pela ajuda durante o período de convivência.

À PUC-Rio, à CAPES e à UFOP, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Enfim, agradeço a todos aqueles que acreditaram em mim e que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

Obrigado!

## Resumo

Soares, Gleidson Fonseca; Aragão, Marcus Vinicius Soledade Poggi de. **Algoritmos Primais e Duais para o Problema das p-Medianas**. Rio de Janeiro, 2009. 107p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Uma facilidade é qualquer centro que presta serviços a um conjunto de clientes. Pode ser, dentre outros, uma escola, uma fábrica ou um armazém. Problemas de localização de facilidades são problemas de otimização combinatória que tratam da tomada de decisão relativa ao posicionamento destes serviços, que devem otimizar algum critério pré-definido. As medidas que usualmente são utilizadas para quantificar a qualidade de uma solução para esta classe de problemas tem seus cálculos baseados em que clientes são servidos por que facilidade. Uma consequência imediata é a forte relação entre os problemas de localização e os problemas de classificação de dados (clusterização). Dentre os problemas de localização de facilidades amplamente estudados está o problema das p-Medianas (PMNC), objeto de pesquisa desta dissertação. O PMNC tem como objetivo determinar quais p facilidades devem ser abertas com o intuito de minimizar a soma das distâncias de cada cliente a facilidade aberta mais próxima do mesmo. O PMNC é classificado como um problema NP - Difícil e é um dos problemas centrais na classificação automática de dados (clusterização). Esta dissertação apresenta algoritmos primais, duais e exatos para tratamento do PMNC, focando no desenvolvimento de algoritmos duais e exatos. Foram implementadas cinco heurísticas construtivas e um método de busca local. Além disto, foram propostos três novos métodos duais e um método exato. Como resultado, analisamos um conjunto de técnicas para o tratamento do problema. A escolha da melhor técnica é fortemente dependente da configuração da instância tratada. Foi obtido o ótimo para algumas instâncias e para as demais a diferença entre o valor dos limites inferior e superior nos melhores casos não ultrapassam 3%.

## Palavras-chave

Programação Inteira; Otimização Combinatória; Algoritmos Primais; Algoritmos Duais; Problemas de Localização; Problema das p-Medianas.

## Abstract

Soares, Gleidson Fonseca; Aragão, Marcus Vinicius Soledade Poggi de (Advisor). **Primal and Dual Algorithms for the Uncapacitated P-Median Problem**. Rio de Janeiro, 2009. 107p. MSc. Dissertation — Departamento de Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A facility is any center that offers services to a set of clients. It may be, among others, a school, a factory or a depot. Facility location problems are combinatorial optimization problems that handle decision-making in respect to the positioning of those services, optimizing some defined criteria. The measures often used to assess the quality of a solution for this class of problems relate to which clients are served by which facility. An immediate consequence is the strong relationship between location problems and data clustering. One of the widely studied facility location problems is the uncapacitated p-median problem (UPM), the main subject of this thesis. Given a set of possible facility locations, the UPM consists in determining a subset of locations at which the facilities shall be established, minimizing the sum of distances from each client to its closest open facility. The UPM belongs to the class of NP-hard problems and is a central problem of data clustering. This thesis presents primal, dual and exact algorithms for approaching the UPM, focusing on the development of dual and exact algorithms. Five constructive heuristics and one local search method were implemented. Furthermore, three new dual methods and one exact method were proposed. The result is the analysis of a set of techniques to solve the problem. The choice of best technique is strongly dependent of the configuration of the treated instance. We obtained the optimum for some instances and for others the difference between the value of the lower and upper bounds in the best cases do not exceed 3%.

## Keywords

Integer Programming; Combinatorial Optimization; Primal Algorithms; Dual Algorithms; Location Problems; Uncapacitated p-Median Problem.

## Sumário

1	Introdução	<b>13</b>
1.1	Problemas de Localização de Facilidades	13
1.2	Motivação	15
1.3	Objetivo	15
1.4	Estrutura da Dissertação	16
2	Problema das p-Medianas	<b>17</b>
2.1	Definição	17
2.2	Formulações	18
2.3	Problemas Teste	21
3	Métodos de Resolução	<b>24</b>
3.1	Introdução	24
3.2	Algoritmos Primais	26
3.3	Algoritmos Duais	30
3.4	Algoritmos Exatos	31
4	Algoritmos Primais	<b>33</b>
4.1	Representação da Solução Primal	33
4.2	Heurísticas Construtivas	34
4.3	Heurística de Refinamento	38
4.4	Análise Comparativa	39
4.5	Conclusão	45
5	Algoritmos Duais	<b>46</b>
5.1	Representação da Solução Dual	46
5.2	Dualidade	46
5.3	<i>Dual Ascent</i>	48
5.4	<i>Dual Adjustment</i>	51
5.5	<i>Dual Scaling</i>	53
5.6	Fixação Ativa	56
5.7	Resultados Computacionais	60
5.8	Conclusão	78
6	Algoritmos Exatos	<b>80</b>
6.1	<i>Planos de Cortes</i>	80
6.2	<i>Branch-and-Ascent</i>	83
6.3	Resultados Computacionais	90
6.4	Conclusão	94
7	Conclusão	<b>95</b>
	Referências Bibliográficas	<b>97</b>
A	Soluções Ótimas ou Melhores Conhecidas	<b>102</b>

A.1	OR-Library	102
A.2	TSP-Library	103
B	Tempo de Execução das Heurísticas Construtivas	<b>105</b>

## Lista de figuras

2.1	Exemplo de solução para o PMNC	17
3.1	Solução ótima, limites superior e inferior para problemas de otimização	26
3.2	Exemplo de um movimento do tipo <i>Alternate</i>	28
3.3	Exemplo de um movimento do tipo <i>Interchange</i>	30
4.1	Influência de $p$ no valor da solução primal para a instância <i>f1400</i> da classe <i>TSP-Library</i>	44
4.2	Influência de $p$ no valor da solução dual para a instância <i>f1400</i> da classe <i>TSP-Library</i>	44
5.1	Algoritmo <i>Dual Ascent</i>	50
5.2	Algoritmo <i>Dual Adjustment</i>	52
5.3	Algoritmo <i>Dual Scaling</i>	54
5.4	Algoritmo para seleção do $\beta$ utilizado nos resultados reportados para o <i>Dual Scaling</i>	55
5.5	Algoritmo <i>Fixação Ativa de Arcos</i>	57
5.6	Algoritmo <i>Fixação Ativa de Facilidades</i>	59
6.1	Algoritmo <i>Branch-and-Ascent</i>	89
6.2	Convergência das soluções primal e dual para o ótimo na instância <i>pmed23</i> ( $n=500, p=50$ ) da classe <i>OR-Library</i>	92
6.3	Árvore de enumeração do <i>Branch-and-Ascent</i> para a instância <i>pmed21</i> ( $n=500, p=5$ ) da classe <i>OR-Library</i>	93

## Lista de tabelas

4.1	Resultados - Métodos construtivos aplicados as instâncias da classe <i>OR-Library</i> - Medida de qualidade $dP_1$	40
4.2	Resultados - Métodos construtivos aplicados as instâncias da classe <i>OR-Library</i> - Medida de qualidade $dP_2$	41
4.3	Resultados - Métodos construtivos aplicados a instância <i>fl1400</i> da classe <i>TSP-Library</i>	42
4.4	Resultados - Métodos construtivos aplicados a instância <i>pcb3038</i> da classe <i>TSP-Library</i>	42
4.5	Resultados - Métodos construtivos aplicados a instância <i>rl5934</i> da classe <i>TSP-Library</i>	43
4.6	Complexidade de pior caso dos algoritmos primais	45
5.1	Resultados - <i>Dual Ascent</i> e <i>Dual Adjustment</i> aplicado as instâncias da classe <i>OR-Library</i>	61
5.2	Resultados - <i>Dual Ascent</i> e <i>Dual Adjustment</i> aplicado as instâncias da classe <i>OR-Library</i>	62
5.3	Resultados - <i>Relaxação Linear</i> , <i>Dual Ascent</i> e <i>Dual Adjustment</i> aplicado as instâncias da classe <i>OR-Library</i>	64
5.4	Resultados - <i>Dual Ascent</i> e <i>Dual Adjustment</i> aplicado a instância <i>fl1400</i> da classe <i>TSP-Library</i>	64
5.5	Resultados - <i>Dual Ascent</i> aplicado a instância <i>pcb3038</i> da classe <i>TSP-Library</i>	65
5.6	Resultados - <i>Dual Ascent</i> aplicado a instância <i>rl5934</i> da classe <i>TSP-Library</i>	66
5.7	Resultados - <i>Dual Scaling</i> aplicado as instâncias da classe <i>OR-Library</i>	68
5.8	Resultados - <i>Relaxação Linear</i> e <i>Dual Scaling</i> aplicado as instâncias da classe <i>OR-Library</i>	69
5.9	Resultados - <i>Fixação Ativa</i> de arcos e facilidades aplicado as instâncias da classe <i>OR-Library</i>	71
5.10	Resultados - <i>Fixação Ativa</i> de arcos e facilidades aplicado a instância <i>fl1400</i> da classe <i>TSP-Library</i>	72
5.11	Resultados - <i>Fixação Ativa</i> de arcos e facilidades aplicado a instância <i>pcb3038</i> da classe <i>TSP-Library</i>	72
5.12	Resultados - <i>Fixação Ativa</i> de arcos e facilidades aplicado a instância <i>rl5934</i> da classe <i>TSP-Library</i>	73
5.13	Resultados - Maiores distâncias para as instâncias da classe <i>OR-Library</i> onde nenhum arco foi fixado por custo reduzido	74
5.14	Resultados - Maiores distâncias para os valores de $p$ na instância <i>pcb3038</i> da classe <i>TSP-Library</i> onde nenhum arco foi fixado por custo reduzido	74
5.15	Resultados - Maiores distâncias para os valores de $p$ na instância <i>rl5934</i> da classe <i>TSP-Library</i> onde nenhum arco foi fixado por custo reduzido	75
5.16	Resultados - Valor do <i>Gap</i> e do $-\gamma$ para as instâncias da classe <i>OR-Library</i> onde nenhuma facilidade foi fixada por custo reduzido	75

5.17	Resultados - Valor do <i>Gap</i> e do $-\gamma$ para a instância <i>fl1400</i> da classe <i>TSP-Library</i> onde nenhuma facilidade foi fixada por custo reduzido	76
5.18	Resultados - Valor do <i>Gap</i> e do $-\gamma$ para a instância <i>pcb3038</i> da classe <i>TSP-Library</i> onde nenhuma facilidade foi fixada por custo reduzido	76
5.19	Resultados - Valor do <i>Gap</i> e do $-\gamma$ para a instância <i>rl5934</i> da classe <i>TSP-Library</i> onde nenhuma facilidade foi fixada por custo reduzido	77
5.20	Complexidade de pior caso dos algoritmos duais	78
6.1	Procedimento <i>Planos-de-Corte</i> - FONTE: adaptado de (Ferreira e Wakabayashi, 1996)	80
6.2	Resultados - <i>Branch-and-Ascent</i> e <i>CPLEX</i> aplicado sobre as instâncias da classe <i>OR-Library</i>	92
6.3	Complexidade de pior caso dos algoritmos exatos	94
A.1	Valor da solução ótima das instâncias da classe <i>OR-Library</i>	102
A.2	Melhores soluções conhecidas para os diferentes valores de $p$ na instância <i>fl1400</i> da classe <i>TSP-Library</i>	103
A.3	Melhores soluções conhecidas para os diferentes valores de $p$ na instância <i>pcb3038</i> da classe <i>TSP-Library</i>	103
A.4	Melhores soluções conhecidas para os diferentes valores de $p$ na instância <i>rl5934</i> da classe <i>TSP-Library</i>	104
B.1	Resultados - Tempo de execução das heurísticas construtivas e do <i>CPLEX</i> aplicadas as instâncias da classe <i>OR-Library</i>	105
B.2	Resultados - Tempo de execução das heurísticas construtivas aplicadas a instância <i>fl1400</i> da classe <i>TSP-Library</i>	106
B.3	Resultados - Tempo de execução das heurísticas construtivas aplicadas a instância <i>pcb3038</i> da classe <i>TSP-Library</i>	106
B.4	Resultados - Tempo de execução das heurísticas construtivas aplicadas a instância <i>rl5934</i> da classe <i>TSP-Library</i>	107

*Para os meus pais, Marta e Gualter, e meus irmãos Sanderlene, Glaubert e  
Alessandra, por todo o amor, carinho e apoio.*