

10

Anexo

Este anexo apresenta a demonstração matemática completa desde o modelo de Johnson e Tian (2000) até o binomial indexado estendido.

10.1

Definição dos processos estocásticos

Defina os processos estocásticos para S e I :

Preço da ação:
$$\frac{dS}{S} = (\mu_S - q_S)dt + \sigma_S dz_S \dots (66)$$

Índice:
$$\frac{dI}{I} = (\mu_I - q_I)dt + \sigma_I dz_I \dots (67)$$

Correlação entre S e I :
$$dz_S dz_I = \rho dt$$

Defina os retornos como: $Y_t = \ln\left(\frac{I_t}{I_0}\right)$ e $X_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$, onde tanto X como Y têm distribuição normal com os seguintes parâmetros:

$$X_t \sim N(b_I \cdot t, \sigma_I^2 \cdot t) \text{ e } Y_t \sim N(b_S \cdot t, \sigma_S^2 \cdot t),$$

Onde: $b_i = \mu_i - q_i - \frac{1}{2} \cdot \sigma_i^2$, para $i = I, S$.

10.2

Excesso de retorno

O excesso de retorno da ação S é dado por:

$$\mu_S = \alpha + r + \beta \cdot (\mu_I - r) \Rightarrow \alpha = \mu_S - r - \beta \cdot (\mu_I - r) \dots (68)$$

$$\beta = \rho(\sigma_S / \sigma_I) \dots (69)$$

Para remunerar o executivo apenas pelo desempenho específico da firma, temos que o retorno esperado da ação deve ser dado por $E[S_t | I_t, \alpha = 0]$. Ou seja, não há retorno em excesso.

10.3

Processo estocástico do derivativo (F)

Da estatística, o resultado para distribuições normais conjuntas é também uma distribuição normal com média igual a $m_S \cdot t + \beta(X_t - m_I \cdot t)$ e variância de $\sigma_S^2 \cdot (1 - \rho^2) \cdot t$. Sendo assim, a variável condicional $S_t | I_t$ segue uma distribuição lognormal com média igual a:

$$E(S_t | I_t, \alpha = 0) = S_0 \cdot \left(\frac{I_t}{I_0} \right)^\beta \cdot e^{\eta \cdot t} = H_t \dots (70)$$

$$\text{Onde: } \eta = (r - q_S) - \beta(r - q_I) + \frac{1}{2} \rho \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot (1 - \beta) \dots (71)$$

Proposição: A variável η pode ser interpretada como sendo o termo de tendência

(*drift*) do processo estocástico $F = \frac{S_t}{I_t^\beta}$.

Demonstração: No mundo neutro ao risco os processos estocásticos de S e I passam a ser representados pelas equações (30) e (31):

Preço da ação: $\frac{dS}{S} = (r - q_s)dt + \sigma_s dz_s \dots (34)$

Índice: $\frac{dI}{I} = (r - q_I)dt + \sigma_I dz_I \dots (35)$

Correlação entre S e I: $dz_s dz_I = \rho dt$

Defina o processo estocástico $F = \frac{S_t}{I_t^\beta}$. Pelo lema de Itô:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial S} \cdot dS + \frac{\partial F}{\partial I} \cdot dI + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \cdot dS^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial I^2} \cdot dI^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial I} \cdot dS dI \dots (72)$$

Temos que:

$$\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{1}{I^\beta}, \quad \frac{\partial F}{\partial I} = -\frac{\beta \cdot S}{I^{\beta+1}}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial I^2} = \frac{\beta \cdot (\beta + 1) \cdot S}{I^{\beta+2}} \text{ e } \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial I} = -\frac{\beta}{I^{\beta+1}}$$

Onde $dS^2 = S^2 \cdot \sigma_s^2 \cdot dz_s^2 = S^2 \cdot \sigma_s^2 \cdot dt$, $dI^2 = I^2 \cdot \sigma_I^2 \cdot dt$ e

$$dS dI = S \cdot I \cdot \sigma_s \cdot \sigma_I \cdot \rho \cdot dt$$

Substituindo as derivadas acima em (72):

$$\begin{aligned} dF &= \frac{1}{I^\beta} \cdot [S(r - q_s)dt + S \cdot \sigma_s dz_s] - \frac{\beta \cdot S}{I^{\beta+1}} \cdot [I(r - q_I)dt + I \cdot \sigma_I dz_I] + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta \cdot (\beta + 1)}{I^{\beta+2}} \cdot S \cdot I^2 \cdot \sigma_I^2 \cdot dt - \frac{\beta}{I^{\beta+1}} \cdot S \cdot I \cdot \sigma_s \cdot \sigma_I \cdot \rho \cdot dt = \\ \Rightarrow \frac{dF}{F} &= (r - q_s)dt + \sigma_s \cdot dz_s - \beta(r - q_I)dt - \beta \cdot \sigma_I \cdot dz_I + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot (\beta + 1) \cdot \sigma_I^2 \cdot dt - \beta \cdot \sigma_s \cdot \sigma_I \cdot \rho \cdot dt \end{aligned}$$

Por fim:

$$\frac{dF}{F} = \underbrace{\left[r - q_S - \beta(r - q_I) + \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot (\beta + 1) \cdot \sigma_I^2 - \beta \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot \rho \right]}_{\alpha_F} \cdot dt + \underbrace{\sigma_S \cdot dz_S - \beta \cdot \sigma_I \cdot dz_I}_{\sigma_F \cdot dz_F} \quad \dots (73)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \alpha_F &= r - q_S - \beta(r - q_I) + \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot (\beta + 1) \cdot \sigma_I^2 - \beta \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot \rho = \\ &= r - q_S - \beta(r - q_I) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \frac{\sigma_S}{\sigma_I} \cdot (\beta + 1) \cdot \sigma_I^2 - \beta \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot \rho = \\ &= r - q_S - \beta(r - q_I) + \rho \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \beta \right) \\ \Rightarrow \alpha_F &= r - q_S - \beta(r - q_I) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot (1 - \beta) = \eta \dots (74) \end{aligned}$$

10.4

Definição do processo estocástico do preço de exercício

Qual processo estocástico segue o preço de exercício, H ?

Temos que:

$$H_t = S_0 \cdot \left(\frac{I_t}{I_0} \right)^\beta \cdot e^{\eta \cdot t}$$

Novamente, pelo lema de Itô:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial S} \cdot dS + \frac{\partial H}{\partial I} \cdot dI + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial S^2} \cdot dS^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial I^2} \cdot dI^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial S \partial I} \cdot dS dI \quad \dots (75)$$

Onde:

$$\frac{\partial H}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{\beta \cdot S_0}{I_0^\beta} \cdot I^{\beta-1} \cdot e^{\eta \cdot t}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial S^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial I^2} = \frac{\beta \cdot (\beta-1) \cdot S_0}{I_0^\beta} \cdot I^{\beta-2} \cdot e^{\eta \cdot t}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial S \partial I} = 0$$

Substituindo:

$$dH = \frac{\beta \cdot S_0}{I_0^\beta} \cdot I^{\beta-1} \cdot e^{\eta \cdot t} [I(r - q_I)dt + I \cdot \sigma_I \cdot dz_I] + \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta \cdot (\beta-1) \cdot S_0}{I_0^\beta} \cdot I^{\beta-2} \cdot e^{\eta \cdot t} [I^2 \cdot \sigma_I^2 \cdot dt]$$

Simplificando esta expressão, chega-se à:

$$\frac{dH}{H} = \left[\beta \cdot (r - q_I) - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot (1 - \beta) \right] \cdot dt + \rho \cdot \sigma_S \cdot dz_I \dots (76)$$

Neste ponto, é importante lembrar que:

$$\alpha_F = \eta = r - q_S - \beta(r - q_I) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot (1 - \beta)$$

Se $\alpha_F = 0$ (o que faz sentido, pois o termo de tendência deste derivativo é igual a zero, i.e., só há remuneração na medida em que o desempenho das ações da empresa superior ao do índice, então: $r - q_S = \beta(r - q_I) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \sigma_S \cdot \sigma_I \cdot (1 - \beta)$).

Substituindo em (76), chega-se finalmente ao processo estocástico do preço de exercício:

$$\frac{dH}{H} = (r - q_S)dt + \rho \sigma_S dz_I \dots (77)$$

Sendo assim, é possível ver que tanto S como H possuem o termo de tendência e *dividend yield* idênticos.

10.5

Volatilidade total

Esta seção demonstra a volatilidade ajustada pela correlação.

Proposição: A volatilidade total é dada por $\sigma_a^2 = \sigma_S^2 \cdot (1 - \rho^2)$

Demonstração: A variância conjunta de duas variáveis aleatórias S e H é dada por:

$$\sigma_a^2 = \sigma_S^2 + \sigma_H^2 - 2 \cdot \rho \cdot \sigma_S \cdot \sigma_H$$

De (77) temos que $\sigma_H^2 = \rho^2 \cdot \sigma_S^2$. Sendo assim:

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= \sigma_S^2 + \sigma_H^2 - 2 \cdot \rho \cdot \sigma_S \cdot \sigma_H = \\ &= \sigma_S^2 + \rho^2 \cdot \sigma_S^2 - 2 \cdot \rho \cdot \sigma_S \cdot \rho \cdot \sigma_S = \\ &= \sigma_S^2 + \rho^2 \cdot \sigma_S^2 - 2 \cdot \rho^2 \cdot \sigma_S^2 = \\ &= \sigma_S^2 - \rho^2 \cdot \sigma_S^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_a^2 = \sigma_S^2 \cdot (1 - \rho^2) \dots (78)$$

10.6

Modelo binomial para ESO indexada americana

Por simplicidade, seja $q_S = q$. Ainda, defina u como sendo o movimento de subida e d como o movimento de queda no preço do ativo base. O valor intrínseco da opção no momento do exercício é dado por:

$$\begin{aligned}
C_u &= H_u \cdot \max\left(u \cdot \frac{S}{H} - 1, 0\right) \\
C_d &= H_d \cdot \max\left(d \cdot \frac{S}{H} - 1, 0\right) \\
&\vdots \\
C_{uu} &= H_{uu} \cdot \max\left(uu \cdot \frac{S}{H} - 1, 0\right) \\
C_{dd} &= H_{dd} \cdot \max\left(dd \cdot \frac{S}{H} - 1, 0\right)
\end{aligned} \quad \dots (79)$$

Defina ainda o retorno normalizado da opção como:

$$\begin{aligned}
R_u &= \max\left(u \cdot \frac{S}{H} - 1, 0\right) \\
R_d &= \max\left(d \cdot \frac{S}{H} - 1, 0\right) \\
&\vdots \\
R_{uu} &= \max\left(uu \cdot \frac{S}{H} - 1, 0\right) \\
R_{dd} &= \max\left(dd \cdot \frac{S}{H} - 1, 0\right)
\end{aligned} \quad \dots (80)$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
C_u &= H_u \cdot R_u \\
C_d &= H_d \cdot R_d \\
&\vdots \\
C_{uu} &= H_{uu} \cdot R_{uu} \\
C_{dd} &= H_{dd} \cdot R_{dd}
\end{aligned} \quad \dots (81)$$

Apenas por simplicidade, suponha que a opção tenha apenas dois períodos, onde o tempo $t=2$ é a maturidade. Ainda, é fácil notar que $\frac{S_{uu}}{H_{uu}} = uu \cdot \left(\frac{S}{H}\right)$.

▪ Em $t=2$:

- movimento ascendente de S/H :

$$\begin{aligned}
 C_{uu} &= m_S \cdot S_{uu} \cdot (1+q) + m_H \cdot H_{uu} \cdot (1+q) = \\
 &= m_S \cdot H_{uu} \cdot uu \cdot \frac{S}{H} \cdot (1+q) + m_H \cdot H_{uu} \cdot (1+q) \dots (82)
 \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
 C_{du} &= m_S \cdot S_{du} \cdot (1+q) + m_H \cdot H_{du} \cdot (1+q) = \\
 &= m_S \cdot H_{du} \cdot du \cdot \frac{S}{H} \cdot (1+q) + m_H \cdot H_{du} \cdot (1+q) \dots (83)
 \end{aligned}$$

Igualando (81) e (82):

$$\begin{aligned}
 C_{uu} &= H_{uu} \cdot \left[m_S \cdot uu \cdot \frac{S}{H} \cdot (1+q) + m_H \cdot (1+q) \right] = H_{uu} \cdot R_{uu} \\
 \Rightarrow R_{uu} &= m_S \cdot uu \cdot \frac{S}{H} \cdot (1+q) + m_H \cdot (1+q) \dots (84)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{du} &= H_{du} \cdot \left[m_S \cdot du \cdot \frac{S}{H} \cdot (1+q) + m_H \cdot (1+q) \right] = H_{du} \cdot R_{du} \\
 \Rightarrow R_{du} &= m_S \cdot du \cdot \frac{S}{H} \cdot (1+q) + m_H \cdot (1+q) \dots (85)
 \end{aligned}$$

- movimento descendente de S/H :

Pensando de maneira análoga, chega-se às seguintes expressões:

$$\Rightarrow R_{ud} = m_S \cdot ud \cdot \frac{S}{H} \cdot (1+q) + m_H \cdot (1+q) \dots (86)$$

$$\Rightarrow R_{dd} = m_S \cdot dd \cdot \frac{S}{H} \cdot (1+q) + m_H \cdot (1+q) \dots (87)$$

Resolvendo (84) e (85):

$$R_{uu} - R_{ud} = m_s \cdot (1+q) \cdot \frac{S}{H} \cdot u \cdot (u-d) \Rightarrow m_s = \frac{R_{uu} - R_{ud}}{(1+q) \cdot \frac{S}{H} \cdot u \cdot (u-d)} \dots (88)$$

Este é o delta *hedge* da opção para o ativo básico S. Analogamente resolvendo (86) e (87), chega-se ao delta *hedge* do ativo referência:

$$m_H = \frac{u \cdot R_{ud} - d \cdot R_{uu}}{(1+q) \cdot (u-d)} \dots (89)$$

▪ Em $t=1$:

Conforme mencionado ao longo deste trabalho, o modelo binomial trabalha *backwards*, i.e., de trás para frente. Neste período o titular da opção pode escolher exercê-la imediatamente ou mantê-la por mais um período.

- movimento ascendente de S/H :

$$C_u = \max[S_u - H_u, m_s \cdot S_u \cdot (1+q) + m_H \cdot H_u \cdot (1+q)] \dots (90)$$

- movimento descendente de S/H :

$$C_d = \max[S_d - H_d, m_s \cdot S_d \cdot (1+q) + m_H \cdot H_d \cdot (1+q)] \dots (91)$$

Substituindo (88) e (89) em (90) e a opção não for exercida, chega-se a:

$$C_u = \frac{R_{uu} - R_{ud}}{(1+q) \cdot \frac{S}{H} \cdot u \cdot (u-d)} \cdot S_u \cdot (1+q) + \frac{u \cdot R_{ud} - d \cdot R_{uu}}{(1+q) \cdot (u-d)} \cdot H_u \cdot (1+q)$$

Manipulando esta expressão, o valor final da opção é:

$$C_u = H_u \cdot \left[\frac{R_{uu} \cdot \frac{1-d}{u-d} + R_{ud} \cdot \left(1 - \frac{1-d}{u-d}\right)}{1+q} \right] = H_u \cdot \left[\frac{R_{uu} \cdot p^* + R_{ud} \cdot (1-p^*)}{1+q} \right]$$

Analogamente:

$$C_d = H_d \cdot \left[\frac{R_{du} \cdot p^* + R_{dd} \cdot (1 - p^*)}{1 + q} \right].$$

Como na prática a opção é americana, a regra de decisão é a seguinte:

$$C^{BI}(S, H, t) = H_t \cdot \max \left[\frac{S_t}{H_t} - 1, \frac{R_u \cdot p^* + R_d \cdot (1 - p^*)}{1 + q} \right] \dots (92)$$

Utilizando retornos contínuos:

$$C^{BI}(S, H, t) = H_t \cdot \max \left\{ \frac{S_t}{H_t} - 1, e^{-q \cdot \Delta t} \left[R_u \cdot p^* + R_d \cdot (1 - p^*) \right] \right\} \dots (93)$$

$$\text{A condição na maturidade é: } C^{BI}(S, H, T) = H_T \cdot \max \left[\frac{S_T}{H_T} - 1, 0 \right] \dots (94)$$

10.7

Modelo binomial para ESO indexada com múltiplo de exercício (modelo estendido)

Por fim, incorporando ao modelo da seção anterior o múltiplo M que define o exercício antecipado e uma taxa de cancelamentos e , é preciso apenas estender o algoritmo desenvolvido, conforme apresentado na seção 0.

10.8

Demonstração das equações da simulação de Monte Carlo

10.8.1

Simulação do preço da ação

Aplicando o lema de Itô para encontrar $d \ln(S_t)$:

$$d \ln(S_t) = \frac{1}{S_t} [S_t \cdot (r - q_s) \cdot dt + S_t \cdot \sigma_s \cdot dz_s] - \frac{1}{2 \cdot S_t^2} (S_t^2 \sigma_s^2 \cdot dt)$$

$$\Rightarrow d \ln(S_t) = \left(r - q_s - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) \cdot dt + \sigma_s \cdot dz_s$$

Integrando ambos os lados:

$$\int_t^T d \ln(S_t) = \left(r - q_s - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) \cdot \int_t^T dt + \sigma_s \cdot \int_t^T dz_s$$

$$\Rightarrow \ln(S_T) - \ln(S_t) = \left(r - q_s - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) \cdot (T - t) + \sigma_s \cdot (z_{s,T} - z_{s,t})$$

$$\Rightarrow \ln(S_T) = \ln(S_t) + \left(r - q_s - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) \cdot (T - t) + \sigma_s \cdot (z_{s,T} - z_{s,t})$$

Por fim:

$$\Rightarrow S_T = S_t \cdot e^{\left(r - q_s - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) \cdot (T - t) + \sigma_s \cdot (z_{s,T} - z_{s,t})} \Rightarrow S_T = S_0 \cdot e^{\left(r - q_s - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) \cdot T + \sigma_s \cdot z_{s,T} \cdot \sqrt{T}} \dots (95)$$

10.8.2

Simulação do ativo referência

Aplicando o lema de Itô para encontrar $d \ln(H_t)$:

$$d \ln(H_t) = \frac{1}{H_t} [H_t \cdot (r - q_s) \cdot dt + H_t \cdot \rho \cdot \sigma_s \cdot dz_t] - \frac{1}{2 \cdot H_t^2} [H_t^2 \cdot (\rho \cdot \sigma_s)^2 \cdot dt]$$

$$\Rightarrow d \ln(H_t) = \left(r - q_s - \frac{(\rho \cdot \sigma_s)^2}{2} \right) \cdot dt + \rho \cdot \sigma_s \cdot dz_t$$

Integrando ambos os lados:

$$\begin{aligned}
\int_t^T d \ln(H_t) &= \left(r - q_s - \frac{(\rho \cdot \sigma_s)^2}{2} \right) \cdot \int_t^T dt + \rho \cdot \sigma_s \cdot \int_t^T dz_t \\
\Rightarrow \ln(H_T) - \ln(H_t) &= \left(r - q_s - \frac{(\rho \cdot \sigma_s)^2}{2} \right) \cdot (T - t) + \rho \cdot \sigma_s \cdot (z_{T,t} - z_{t,t}) \\
\Rightarrow \ln(H_T) &= \ln(H_t) + \left(r - q_s - \frac{(\rho \cdot \sigma_s)^2}{2} \right) \cdot (T - t) + \rho \cdot \sigma_s \cdot (z_{T,t} - z_{t,t})
\end{aligned}$$

Por fim:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow H_T &= H_t \cdot e^{\left(r - q_s - \frac{(\rho \cdot \sigma_s)^2}{2} \right) \cdot (T - t) + \rho \cdot \sigma_s \cdot (z_{T,t} - z_{t,t})} \\
\Rightarrow H_T &= H_0 \cdot e^{\left(r - q_s - \frac{(\rho \cdot \sigma_s)^2}{2} \right) \cdot T + \rho \cdot \sigma_s \cdot z_{T,0} \cdot \sqrt{T}} \dots (96)
\end{aligned}$$