

3. Análise estatística do sinal

A análise da intensidade do sinal recebido é um processo que abrange dois estágios, sendo eles: i) a estimativa do sinal mediano recebido em uma área relativamente pequena, e ii) a variabilidade do sinal em torno deste nível mediano [49].

O estudo da variabilidade do sinal ao longo do tempo permite conhecer o comportamento do sinal, determinar a taxa com que um sinal cruza um determinado nível e o tempo em que o sinal permanece abaixo deste nível. Esses parâmetros são usados para determinar a taxa de *bits* do sinal a ser transmitido, estimar a porcentagem de uma determinada área que tem intensidade do sinal adequada, porcentagem do tempo em que o sistema pode estar fora de operação devido ao nível do sinal estar abaixo do nível de sensibilidade do equipamento, entre outros.

A variabilidade do sinal é resultado de dois fatores: desvanecimento em pequena escala e desvanecimento em larga escala, ambos descritos no capítulo 2.

Os canais de propagação em ambientes de rádio móvel são aleatoriamente variáveis, tanto no tempo quanto no espaço. Por isto, devem ser analisados e modelados como processos aleatórios. Para tal, considera-se o nível do sinal como uma variável aleatória. A estatística da flutuação do envelope do sinal recebido pode ser caracterizada de acordo com diversas distribuições de probabilidade existentes na literatura. A distribuição que melhor caracteriza o sinal varia de acordo com a semelhança entre o sinal recebido e o sinal para o qual a distribuição se propõe caracterizar.

Este trabalho abrange o estudo das distribuições de probabilidade log-Normal, Rayleigh, Rice e m-Nakagami. O desvanecimento em larga escala, ou seja, a variabilidade do sinal ao longo de dezenas de comprimentos de onda é caracterizada pela distribuição de probabilidade log-Normal. Por outro lado, as distribuições Rayleigh, Rice e m-Nakagami são utilizadas para descrever o comportamento estatístico do desvanecimento em pequena escala. Este comportamento estatístico deve ser analisado em sinais recebidos ao longo de

um setor. Segundo [30] o comprimento deste setor deve ser entre 20 a 40 comprimentos de onda.

Nos ambientes de propagação em que existe uma componente do sinal dominante sendo recebida, o envelope do sinal é descrito pela função densidade de probabilidade de Rice ou m-Nakagami. Caso esta componente dominante do sinal deixe de existir, havendo apenas as componentes provenientes de múltiplos percursos, o sinal passa a seguir as características da distribuição Rayleigh, em geral.

A primeira seção deste capítulo consiste em apresentar a distribuição de probabilidade log-Normal. A seção seguinte aborda a distribuição Rayleigh, juntamente com a taxa de cruzamento de nível e duração média do desvanecimento que caracterizam essa distribuição. A seção 3.3 refere-se à distribuição Rice e suas características de cruzamento de nível e duração média do desvanecimento. Por fim, é descrita a distribuição m-Nakagami e a escolha do tamanho do setor em que a análise do desvanecimento em pequena escala é realizada.

3.1. Distribuição log-Normal

A amplitude do sinal que se propaga por meios não guiados sofre atenuação por contribuição de três fatores a serem citados: i) atenuação do sinal com a distância, ii) desvanecimento em larga escala, também conhecido como sombreamento, iii) e desvanecimento em pequena escala. A distribuição log-Normal descreve a variação do envelope (amplitude) do sinal recebido que sofre o efeito de sombreamento devido a mudanças na topografia, tais quais morros, prédios, etc.

A intensidade do campo (r), em escala linear, é dada pela distribuição log-Normal, Equação 2.9 [11].

$$p(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot r \sigma_r} \exp \left[-\frac{(\ln(r/m_r))^2}{2\sigma_r^2} \right] ; \quad 0 \leq r \leq +\infty \quad \text{Equação 3.1}$$

O gráfico da função densidade de probabilidade log-Normal é mostrado na Figura 3.1.

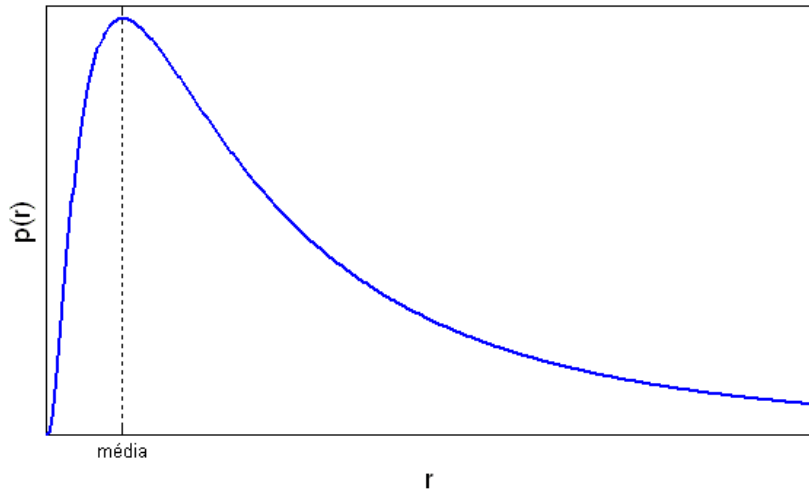


Figura 3.1: Gráfico da função densidade de probabilidade log-Normal.

O nível do sinal recebido (R), em decibéis, sob o efeito de sombreamento, pode ser expresso pela função densidade de probabilidade Normal (ou Gaussiana), dada pela Equação 3.2.

$$p(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_R} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{R - m_R}{\sigma_R} \right)^2 \right] ; \quad -\infty \leq R \leq +\infty \quad \text{Equação 3.2}$$

onde, R é o nível do sinal recebido em escala logarítmica [dB], m_R e σ_R são sua média e desvio padrão em decibéis, respectivamente.

A Figura 3.2 caracteriza o gráfico da função densidade de probabilidade Gaussiana.

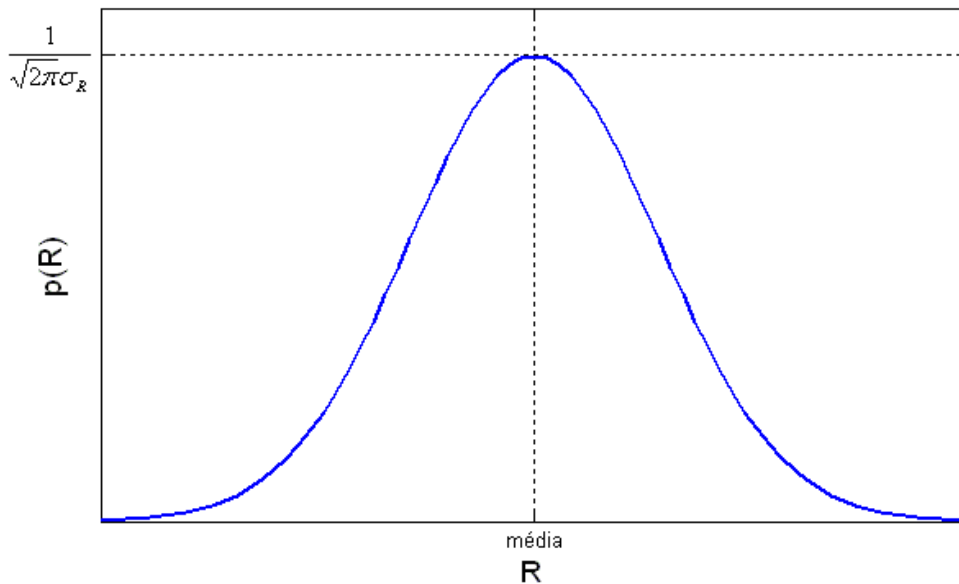


Figura 3.2: Gráfico da função densidade de probabilidade Gaussiana.

A probabilidade do nível do sinal R ser menor que um dado nível R_0 é dada pela função de distribuição cumulativa, de acordo com a Equação 3.3:

$$P(R_0) = \text{prob}(R \leq R_0) = \int_{-\infty}^{R_0} p(R) dR \quad \text{Equação 3.3}$$

A distribuição cumulativa log-normal e Gaussiana, são dadas pelas Equação 3.4 e Equação 3.5 [34, 37, 46].

$$P(r_0) = \text{erf}\left(\frac{\ln r_0 - m_r'}{\sigma_r'}\right) \quad \text{Equação 3.4}$$

$$P(R_0) = \frac{1}{2} + \text{erf}\left[\frac{R_0 - m_r}{\sigma_r}\right] \quad \text{Equação 3.5}$$

Os gráficos da função de distribuição cumulativa log-normal e Gaussiana são visualizados na Figura 3.3:

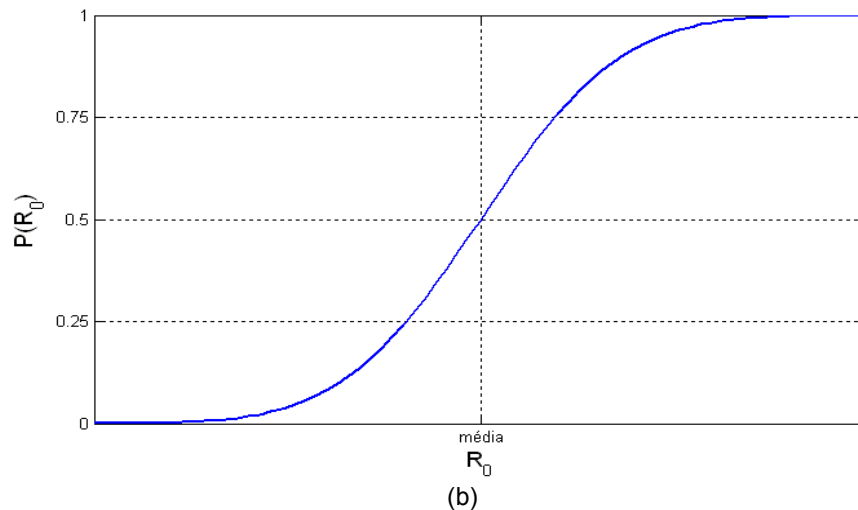
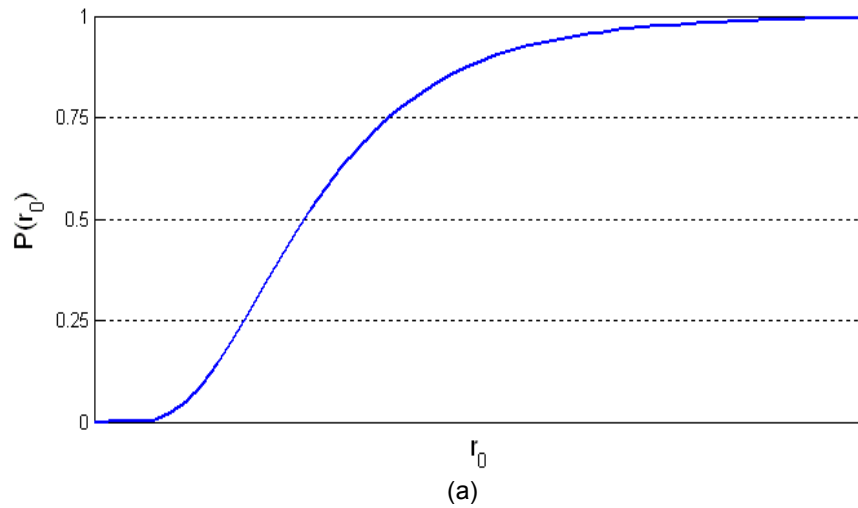


Figura 3.3: Gráfico da função de distribuição cumulativa: (a) log-normal; (b) normal.

3.2. Distribuição Rayleigh

A distribuição Rayleigh descreve a estatística local da variação no tempo do envelope do sinal recebido, com característica de desvanecimento plano. Esta distribuição estatística é aplicável apenas em distâncias suficientemente pequenas para que o processo seja considerado estacionário no sentido amplo. Estas distâncias são denominadas setores.

A função densidade de probabilidade (fpd) Rayleigh, do envelope do sinal é dada pela Equação 3.6:

$$p(r) = \frac{r}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad ; \quad r \geq 0 \quad \text{Equação 3.6}$$

onde σ^2 é a média temporal da potência do sinal antes da detecção do envelope e $\frac{r^2}{2}$ é a potência do sinal em desvanecimento de pequena escala [50, 52].

A Figura 3.4 mostra o gráfico de uma função densidade de probabilidade Rayleigh.

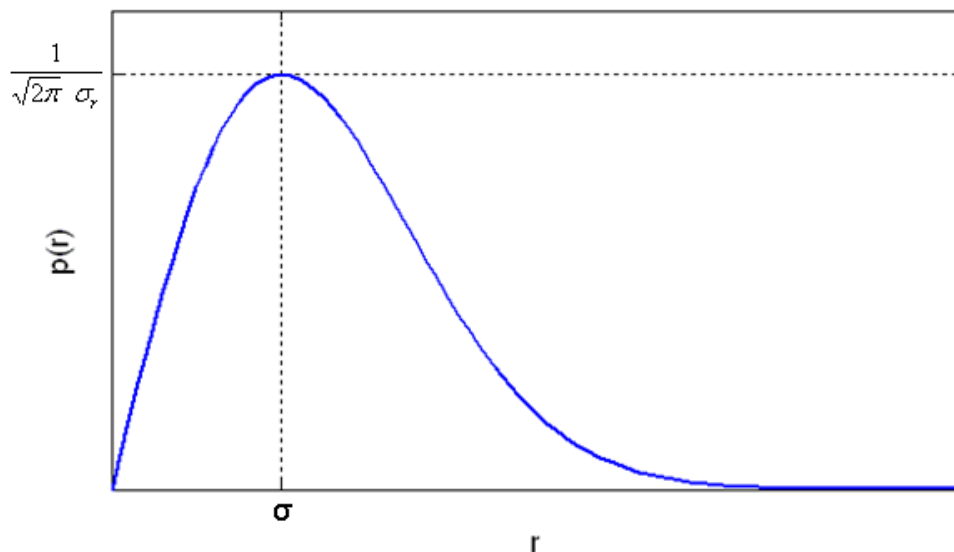


Figura 3.4: Função densidade de probabilidade Rayleigh.

O valor médio ($E[r] = r_{\text{médio}}$) da distribuição Rayleigh é dado pela Equação 3.7:

$$r_{\text{médio}} = E[r] = \int_0^{\infty} r \cdot p_r(r) dr = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1,2533\sigma \quad \text{Equação 3.7}$$

A variância (σ_r^2) da distribuição Rayleigh representa a potência AC do envelope do sinal e é dada por Equação 3.8:

$$\sigma_r^2 = E[r^2] - E^2[r] = \int_0^{\infty} r^2 \cdot p_r(r) dr - \sigma^2 \frac{\pi}{2} = \sigma^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) = 0,4292\sigma^2 \quad \text{Equação 3.8}$$

O valor mediano de r é igual a $1,177\sigma$. Sendo σ o valor rms da tensão do sinal recebido, antes da detecção do envelope, dado pela raiz quadrada da média quadrática.

A função densidade de probabilidade em função da sua média é dada pela Equação 3.9.

$$p(r) = \frac{2r}{E[r^2]} \exp\left(-\frac{r^2}{E[r^2]}\right) \quad \text{Equação 3.9}$$

A probabilidade do envelope do sinal recebido não exceder um determinado valor r_0 é dada pela função distributiva cumulativa (CDF) na Equação 3.10. A Equação 3.11 é a distribuição CDF Rayleigh em função da sua média.

$$P(r_0) = \text{prob}(r \leq r_0) = \int_0^{r_0} p(r) dr = 1 - \exp\left(-\frac{r_0^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{Equação 3.10}$$

$$P_r(r_0) = 1 - \exp\left(-\frac{r_0^2}{E[r_0^2]}\right) \quad \text{Equação 3.11}$$

A Figura 3.5 mostra o gráfico de uma função distributiva cumulativa Rayleigh.

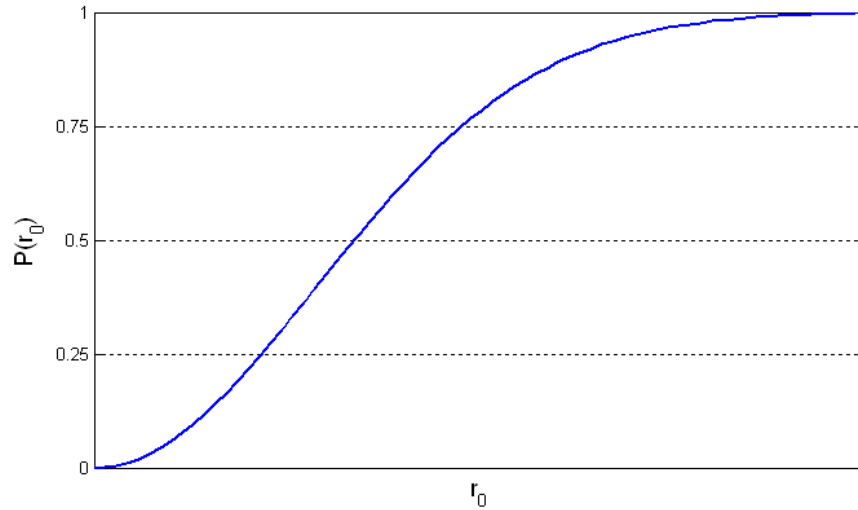


Figura 3.5: Função distribuição cumulativa Rayleigh.

3.2.1.

Taxa de cruzamento de nível e duração média do desvanecimento

A distribuição Rayleigh caracteriza a estatística de primeira ordem do envelope do sinal. Logo, não considera o fator tempo ou distância. Uma informação importante é a descrição quantitativa em que os desvanecimentos cruzam determinado limiar e o tempo pelo qual permanecem abaixo deste limiar. Estas informações são provenientes dos parâmetros taxa de cruzamento de nível e duração média do desvanecimento.

A taxa de cruzamento de nível (N_R) determina a frequência esperada em que o sinal cruza um determinado nível. Para sinais que são caracterizados pela distribuição Rayleigh, a taxa de cruzamento média, por segundo, a um nível R , é dada pela Equação 3.12 [49]. Esta equação é função da velocidade do móvel, uma vez que um dos seus termos é o desvio Doppler:

$$N_R = \sqrt{2\pi} f_m \rho \cdot \exp(-\rho^2) \quad \text{Equação 3.12}$$

onde:

f_m = desvio Doppler máximo;

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{R}{r_{RMS}};$$

r_{RMS} = valor RMS do envelope do sinal.

A taxa de cruzamento de nível normalizada pode ser expressa pela Equação 3.13:

$$\frac{N_R}{f_m} = \sqrt{2 \cdot \pi} \rho \exp[-\rho^2] \quad \text{Equação 3.13}$$

A duração média de desvanecimento (T_R) determina o tempo médio que cada desvanecimento permanece abaixo de um dado nível R. Considerando a porcentagem total do tempo em que o sinal permanece abaixo do nível R e dividindo pelo número de desvanecimentos abaixo deste nível, tem-se a duração média de cada desvanecimento, como mostra a Equação 3.14:

$$T_R = \frac{P(r < R)}{N_R} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\pi}} \cdot \frac{\exp\left(\frac{R^2}{2\sigma^2}\right) - 1}{R \cdot f_m} \quad \text{Equação 3.14}$$

A duração média do desvanecimento normalizada pode ser expressa de acordo com a Equação 3.15.

$$T_R \cdot f_m = \frac{\exp(\rho^2) - 1}{\rho \cdot \sqrt{2\pi}} \quad \text{Equação 3.15}$$

3.3. Distribuição Rice

A estatística da variação temporal do envelope do sinal recebido é descrita pela distribuição Rice em cenários em que existe uma componente do sinal dominante, tanto em ambientes LOS quanto NLOS.

O envelope do sinal (r), em escala linear, de acordo com densidade de probabilidade da distribuição Rice é dado pela Equação 3.16 [51].

$$p(r) = \frac{r}{\sigma_r^2} \cdot \exp\left(-\frac{(r^2 + A^2)}{2\sigma_r^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{Ar}{\sigma_r^2}\right), \quad A \geq 0, \quad r \geq 0 \quad \text{Equação 3.16}$$

onde:

I_0 é a função de Bessel modificada de ordem zero e primeiro tipo;

A é a amplitude relativa da componente dominante do sinal;

$\frac{A^2}{2}$ é proporcional à potência do raio dominante do sinal;

σ^2 é proporcional à potência dos raios provenientes de multipercurso.

Usualmente, a distribuição Rice é expressa em função do fator de Rice (K), que consiste da razão entre a potência do sinal dominante e das componentes de multipercurso. O fator de Rice é dado pela Equação 3.17 [51].

$$K = \frac{A^2}{2\sigma^2} \quad \text{Equação 3.17}$$

À medida que o fator de Rice tende a zero, em escala linear, a distribuição Rice tende a uma distribuição Rayleigh. Além disso, caso o fator K tenda a um valor muito maior que 1 ($k \gg 1$), a distribuição Rice tende a uma Gaussiana. A Figura 3.6 [49] mostra a função densidade de probabilidade de Rice para os valores de $K \rightarrow 0, k \cong 1, k \gg 1$.

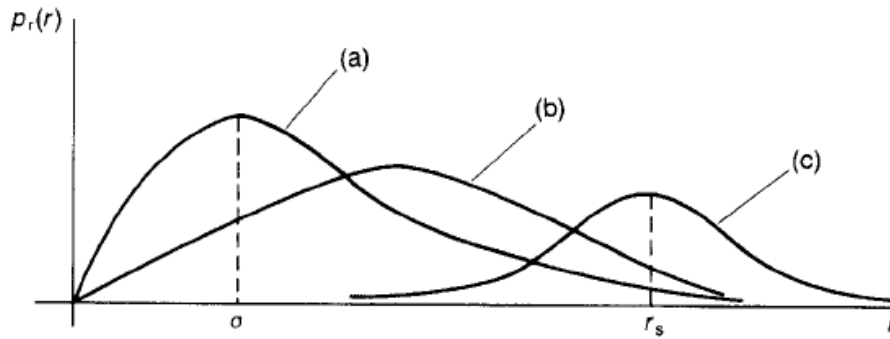


Figura 3.6: Gráfico da função densidade de probabilidade de Rice: (a) $K \rightarrow 0$; (b) $k \cong 1$; (c) $k \gg 1$.

A função densidade de probabilidade do envelope do sinal (r), regida pela distribuição Rice, pode ser escrita em função do fator de Rice (K), Equação 3.18.

$$p(r) = \frac{r}{\sigma_r^2} \exp\left(-\frac{r^2 + 2K\sigma_r^2}{2\sigma_r^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{r\sqrt{2K}}{\sigma_r}\right), \quad r \geq 0 \quad \text{Equação 3.18}$$

onde:

$$\sigma_r^2 \text{ é a variância dada por: } \sigma_r^2 = \frac{E[r^2]}{2(1+K)};$$

$$\sigma_r \text{ é o desvio padrão dado por: } \sigma_r = (\sigma_r^2)^{\frac{1}{2}}.$$

O valor médio, em escala linear, da distribuição de Rice é dado por Equação 3.19:

$$E[r] = \exp\left(-\frac{K}{2}\right) \cdot \sigma_r \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[(1+K)I_0\left(\frac{K}{2}\right)\right] + KI_1\left(\frac{K}{2}\right) \quad \text{Equação 3.19}$$

onde $I_1(\cdot)$ é a função de Bessel modificada de primeira espécie e primeira ordem.

A CDF Rice é dada pela Equação 3.20 [19, 21].

$$\text{prob}(x \leq x_0) = 1 - \exp\left(-\frac{A^2 + x_0^2}{2\sigma_r^2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{A}{x_0}\right)^m I_m\left(\frac{Ax_0}{\sigma_x^2}\right); \quad x \geq 0 \quad \text{Equação 3.20}$$

3.3.1.

Taxa de cruzamento de nível e duração média do desvanecimento

Segundo a distribuição de Rice, a taxa média em que o nível do sinal cruza (em um único sentido) um nível R é dada pela Equação 3.21:

$$L_R = \sqrt{2\pi(K+1)} \cdot f_m \rho \cdot \exp(-K - (K+1)\rho^2) \cdot I_0(2\rho\sqrt{K(K+1)}) \quad \text{Equação 3.21}$$

onde:

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{\Omega_p}} = \frac{R}{r_{rms}}$$

$$r_{rms} = \sqrt{\Omega_p}$$

O tempo médio em que o nível do sinal permanece abaixo de um dado nível R é dado pelo parâmetro tempo médio de desvanecimento (AFD – *Average Fade Duration*), Equação 3.22.

$$T_R = \frac{P(r < R)}{N_R} \quad \text{Equação 3.22}$$

$$T_R = \frac{1 - Q(\sqrt{2K}, \sqrt{2(K+1)}\rho^2)}{\sqrt{2\pi(K+1)} \cdot f_m \cdot \rho \cdot \exp(-K - (K+1)\rho^2) \cdot I_0(2\rho\sqrt{K \cdot (K+1)})}$$

3.4.

Distribuição m-Nakagami

Na seção anterior, foi descrita a distribuição de Rice, que caracteriza a variabilidade do sinal em regiões suficientemente pequenas, com média e desvio padrão constantes. Para este mesmo ambiente pode ser utilizada a distribuição m-Nakagami.

A distribuição m-Nakagami foi determinada com base em dados medidos na faixa de frequência HF em experimentos de larga escala. Esta distribuição inclui, em casos particulares, as distribuições n-Nakagami e q-Nakagami, criadas anteriormente pelo mesmo autor.

A função densidade de probabilidade do nível do sinal (r), em escala linear, de acordo com a distribuição m-Nakagami é dada pela Equação 3.23 [7, 46].

$$p(r) = \frac{2m^m r^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} \exp\left(-\frac{mr^2}{\Omega}\right), \quad r \geq 0 \quad \text{Equação 3.23}$$

onde:

$$\text{Função Gama: } \Gamma(m) = \int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx$$

$$m = \frac{(E[r^2])^2}{(r^2 - E[r^2])^2} = \frac{(E[r^2])^2}{\text{var}(r^2)}, \quad \text{conhecido como parâmetro } m \text{ da distribuição m-Nakagami.}$$

$$\text{var}(r^2) = \frac{\Omega^2}{m}$$

$$\Omega = E[r^2]$$

$$E[r^v] = \frac{\Gamma\left(m + \frac{v}{2}\right)}{\Gamma(m)} \left(\frac{\Omega}{m}\right)^{\frac{v}{2}}$$

A média do envelope do sinal recebido, em escala linear, de acordo com a distribuição m-Nakagami, é dada pela Equação 3.24:

$$E[r] = \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m)} \left(\frac{\Omega}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Equação 3.24}$$

A variância da intensidade do sinal detectado na unidade móvel é caracterizada pela Equação 3.25:

$$\text{var}(r) = \Omega \left[1 - \left\{ \frac{\Gamma(m+0,5)}{\sqrt{m} \Gamma(m)} \right\}^2 \right] \cong \frac{\Omega}{5m} \quad \text{Equação 3.25}$$

A Equação 3.26 determina a probabilidade da amplitude do sinal r ser inferior a determinado nível r_0 [56].

$$P(r_0) = \text{prob}(r \leq r_0) = \Gamma\left(m, \frac{m}{\Omega} r_0^2\right) \quad \text{Equação 3.26}$$

onde, $\Gamma(x)$ é a função *Gamma* incompleta, dada pela Equação 3.27.

$$\Gamma(a, b) = \int_0^b x^{a-1} \exp(-x) dx \quad \text{Equação 3.27}$$

A Figura 3.7 abrange a representação gráfica da distribuição *m*-Nakagami, para diversos valores da variável *m*.

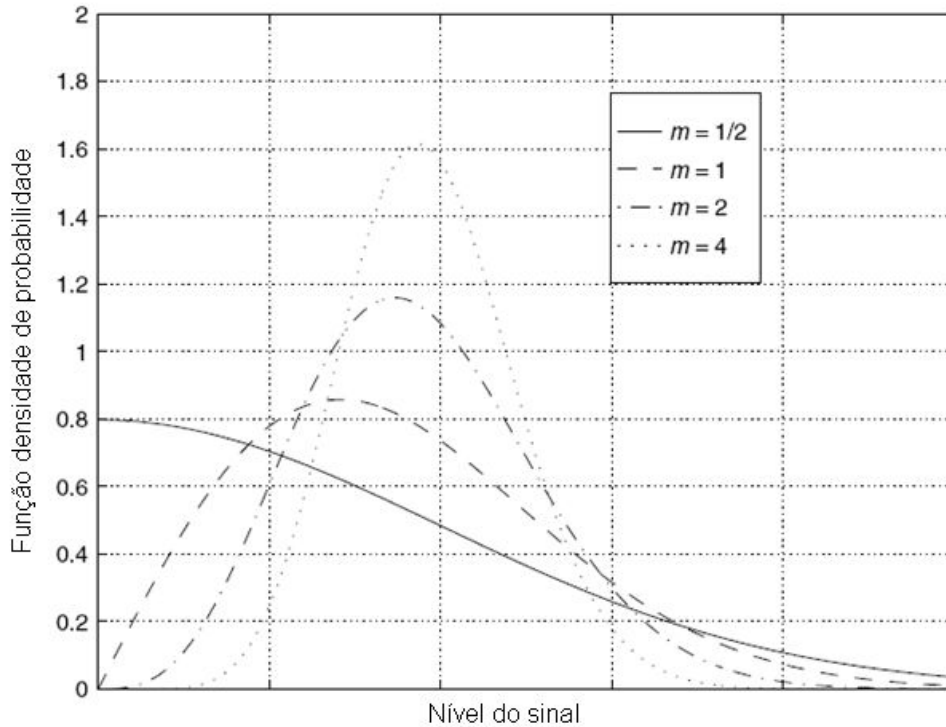


Figura 3.7: Função densidade de probabilidade da distribuição *m*-Nakagami.

A distribuição *m*-Nakagami converge para distribuição Rayleigh quando *m* = 1. Por outro lado, caso *m* = 0,5 *m*-Nakagami converge para distribuição Gaussiana unilateral. O valor do parâmetro *m* deve sempre assumir valores maiores ou iguais a 0,5.

3.4.1.

Taxa de cruzamento de nível e duração média do desvanecimento

A taxa de cruzamento de nível (N_R) determinada pela distribuição *m*-Nakagami, ou seja, a taxa esperada, por segundo, em que um sinal cruza um determinado nível *R*, em uma única direção, é dada pela Equação 3.28 [5, 7].

$$N_R = \sqrt{2\pi} f_m \frac{m^{m-0,5}}{\Gamma(m)} \rho^{2m-1} \exp(-m\rho^2) \quad \text{Equação 3.28}$$

O tempo médio (T_R) em que cada desvanecimento permanece abaixo de determinado nível *R* é caracterizado pela Equação 3.29:

$$T_R = \frac{\text{prob}(r \leq R)}{N_R} = \frac{1}{N_R} \int_0^R p(r) dr$$

$$T_R = \frac{\Gamma(m, m\rho^2)}{\sqrt{2\pi} f_m m^{m-0,5} \rho^{2m-1} \exp(-m\rho^2)}$$

Equação 3.29

onde:

 f_m é o desvio Doppler máximo

$$\rho = \frac{R}{r_{rms}}$$

 N_R é a taxa de cruzamento de nível m : parâmetro m da distribuição m-Nakagami.

$$\text{Função Gama incompleta: } \Gamma(a, b) = \int_0^b x^{a-1} e^{-x} dx$$

3.5. Dimensão de um setor

No capítulo 2, foi definido que para determinar as componentes do desvanecimento rápido do sinal deve ser feita a subtração do sinal recebido pela estimativa da média local, conforme Equação 2.11. A estimativa da média do sinal é realizada dentro de um intervalo espacial $2L$. Esta distância é denominada setor, ao longo do qual se tem apenas a contribuição do efeito do desvanecimento em pequena escala. A escolha do comprimento ideal $2L$ faz com que a estimativa da média local se aproxime ao valor real da mesma. Ao escolher um setor pequeno têm-se contribuições do desvanecimento rápido na média ou, caso o setor seja muito grande, as informações do desvanecimento lento serão perdidas. Em ambas as situações, o valor estimado se distancia do valor real da média local.

O valor estimado da média local ($\hat{m}(x)$) no ponto x_1 é dado pela Equação 3.30.

$$\hat{m}(x_1) = \frac{1}{2L} \int_{x_1-L}^{x_1+L} r(x) dx$$

Equação 3.30

onde $r(x)$ é o envelope do sinal recebido, o ponto x_1 pode ser visto na Figura 2.4.

Considerando que $m(x_1)$ é a média local real no ponto x_1 e que o comprimento de L foi escolhido adequadamente, tem-se a Equação 3.31.

$$\hat{m}(x_1) = m(x_1) \cdot \frac{1}{2L} \int_{x_1-L}^{x_1+L} r_0(x) dx \quad \text{Equação 3.31}$$

Assumindo que o comportamento da amplitude de $r_0(x)$ segue a distribuição Rayleigh, tem-se que a variância da estimativa da média local, normalizada em relação a sua média, é dada pela Equação 3.32

$$\sigma_{\hat{m}}^2 = \frac{1}{4L} \int_0^{2L} \left(1 - \frac{x}{2L}\right)^2 J_0^2(\beta x) dx \quad \text{Equação 3.32}$$

onde J_0 é a função de Bessel de ordem zero, $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ e λ é o comprimento de onda.

O espalhamento em relação à $1\sigma_{\hat{m}}$, em dB, é calculado pela Equação 3.33 [32].

$$1 \sigma_{\hat{m}} \text{ spread} = 10 \log \left(\frac{1 + \sigma_{\hat{m}}}{1 - \sigma_{\hat{m}}} \right) \quad \text{Equação 3.33}$$

Através da solução das equações Equação 3.32 e Equação 3.33 para diversos comprimentos $2L$, conclui-se que o tamanho ideal para o setor é 40λ , pois para este valor o espalhamento se aproxima a 1dB. Entretanto, segundo [29] um comprimento de 20λ a 40λ é aceitável para um setor.