3
Aplicação do Método de Wavelet-Galerkin

Nesta seção, desenvolve-se a aplicação do Método de Wavelet-Galerkin a algumas equações diferenciais comumente encontradas em diversos problemas de engenharia estrutural, como as equações que governam o comportamento de uma barra de treliça, uma viga submetida a carregamento transversal, uma viga submetida a carregamento axial e uma viga sobre base elástica. Também será desenvolvida a solução da equação diferencial de um oscilador harmônico.

Para a solução da equação diferencial harmônica são desenvolvidas as soluções pelo método dos coeficientes de conexão "impróprios" (com o uso de "fronteiras fictícias") e "próprios". Será possível então perceber que a imposição das condições de contorno se dá muito mais naturalmente por um método do que por outro.

3.1.
Equação Diferencial Harmônica

Possivelmente o sistema mecânico mais simples cujo movimento segue uma equação diferencial linear com coeficientes constantes é uma massa presa em uma mola, como mostra a fig. (17).

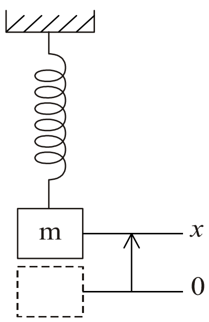

Figura 17 – Oscilador harmônico

Depois de atingido o equilíbrio, ou seja, o ponto em que a força da mola iguala o peso da massa, qualquer perturbação acarreta o início de um movimento harmônico que, desconsiderando a força de atrito, é dado pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.1}$$

O deslocamento e a sua derivada segunda podem ser aproximados por uma base de funções de escala wavelet no nível de resolução m:

$$x(t) = \sum_j d_j \varphi(2^m t - j) \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 4^m \sum_j d_j \ddot{\varphi}(2^m t - j) \tag{3.3}$$

Substituindo as eqs. (3.2) e (3.3) na expressão (3.1), pode-se chegar a uma expressão que a discretiza.

$$\sum_j d_j \left\{ 4^m \ddot{\varphi}(2^m t - j) + \omega^2 \varphi(2^m t - j) \right\} = 0 \tag{3.4}$$

A eq. (3.4) será resolvida por duas abordagens diferentes que aplicam o Método de Galerkin utilizando como condições de contorno um deslocamento inicial x_0 e uma velocidade inicial nula:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \tag{3.5}$$

3.1.1.
Solução pelo Método das Condições de Contorno Fictícias

A base para a aplicação deste método consiste em afirmar que as condições de contorno do problema são periódicas, o que é o mesmo que admitir que o domínio do problema seja infinito. Portanto, pode-se perceber que a discretização feita na eq. (3.4) supõe limites infinitos no somatório. Se a aproximação for feita num nível de resolução razoavelmente alto, a função interpoladora se aproxima de um delta de Dirac que “amostra” os valores da função resposta. Por esta razão, à medida que o nível de resolução aumenta, os coeficientes d_j se aproximam dos valores da função resposta $x(t)$ nos pontos de amostragem. Tal procedimento é comparável ao refinamento de malha no MEF.

Ao multiplicar a eq. (3.4) pela base de funções teste que, pelo Método de Galerkin, é a mesma que a base de funções interpoladoras e integrando num domínio infinito tem-se:

$$\sum_j d_j \left\{ 4^m \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(2^m t - i)\ddot{\varphi}(2^m t - j)dt + \omega^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(2^m t - i)\,\varphi(2^m t - j)dt \right\} = 0 \quad (3.6)$$

Pode-se notar que as integrais que aparecem na eq. (3.6) são coeficientes de conexão “impróprios”. Escreve-se, portanto, após os ajustes das variáveis:

$$\sum_j d_j \left\{ 4^m \Lambda_{i,j}^{0,2} + \omega^2 \Lambda_{i,j}^{0,0} \right\} = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_j d_j \left\{ 4^m \Lambda_{j-i}^{0,2} + \omega^2 \Lambda_{j-i}^{0,0} \right\} = 0 \qquad (3.7)$$

Devido à ortogonalidade das funções de escala, sabe-se que o coeficiente de conexão $\Lambda_{j-i}^{0,0}$ é unitário quando $i = j$ e nulo quando $i \neq j$. Isto permite escrever o sistema matricialmente da seguinte forma:

$$\mathbf{Ad} = \mathbf{0}, \quad A_{i,j} = 4^m \Lambda_{j-i}^{0,2} + \omega^2 \delta_{i,j} \qquad (3.8)$$

Nota-se que a matriz **A** é em banda, já que só existem coeficientes de conexão entre $2 - N$ e $N - 2$. Os índices i e j variam entre 0 e 2^m-1 (2^m pontos), sendo m o nível de resolução escolhido.

Para a imposição das condições de contorno fictícias deve-se incluir tantas translações das funções de escala quanto necessárias para cobrir o intervalo. No caso de uma Daubechies no intervalo [0,N-1] são necessárias $N - 1$ translações adicionais para cada lado da fronteira. Os índices i e j devem ter seu intervalo ampliado de [0, 2^m-1] para [1-N, 2^m+N-2]. No caso de uma Interpolet no intervalo [1-N,N-1], seriam necessárias $N - 1$ translações de um lado e $2N - 2$ do outro. Os índices i e j devem ter seu intervalo ampliado de [0, 2^m-1] para [1-N, 2^m+2N-3].

Uma vez estendidas as fronteiras pode-se impor as condições de contorno diretamente. Como o valor da função em $t = 0$ é dado por x_0 basta colocar esta informação na primeira linha da matriz **A**.

Já para a segunda condição, deve-se ter em conta que a mesma é imposta na derivada. Escreve-se, portanto:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 2^m \sum_j d_j \dot{\varphi}(2^m t - j) \tag{3.9}$$

A eq. (3.9) avaliada em $t = 0$ pode ser colocada em função dos coeficientes de conexão da seguinte forma:

$$\sum_{j=2-N}^{N-2} d_j \Lambda_j^{0,1} = 0 \tag{3.10}$$

O sistema resultante tem (2^m + 2N−2) incógnitas, sendo que apenas 2^m delas pertencem ao domínio desejado. As demais incógnitas não são relevantes para o problema, sendo apenas um artifício para sua solução. As matrizes e vetores envolvidos na solução têm o seguinte aspecto:

$$\mathbf{Ad} = \mathbf{b} \tag{3.11}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \Lambda_{-1}^{0,2} & \Lambda_0^{0,2} + \omega^2 & \Lambda_1^{0,2} & \cdots & \Lambda_{N-2}^{0,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \Lambda_{2-N}^{0,2} & \cdots & \Lambda_0^{0,2} + \omega^2 & \cdots & \Lambda_{N-3}^{0,2} & \Lambda_{N-2}^{0,2} & 0 & \cdots \\ 0 & \Lambda_{2-N}^{0,2} & \cdots & \Lambda_0^{0,2} + \omega^2 & \cdots & \Lambda_{N-3}^{0,2} & \Lambda_{N-2}^{0,2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & \Lambda_{2-N}^{0,2} & \cdots & \Lambda_{-1}^{0,2} & \Lambda_0^{0,2} + \omega^2 & \Lambda_1^{0,2} \\ \cdots & 0 & \Lambda_{2-N}^{0,1} & \cdots & \Lambda_{N-2}^{0,1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

$$\mathbf{d} = \left\{ d_{1-N} \quad \cdots \quad d_0 \quad \cdots \quad d_{2^m-1} \quad \cdots \quad d_{2^m+N-2} \right\}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{b} = \left\{ x_0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \right\}^{\mathrm{T}} \tag{3.13}$$

A solução exata da equação diferencial harmônica para essas condições de contorno é dada por:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \tag{3.14}$$

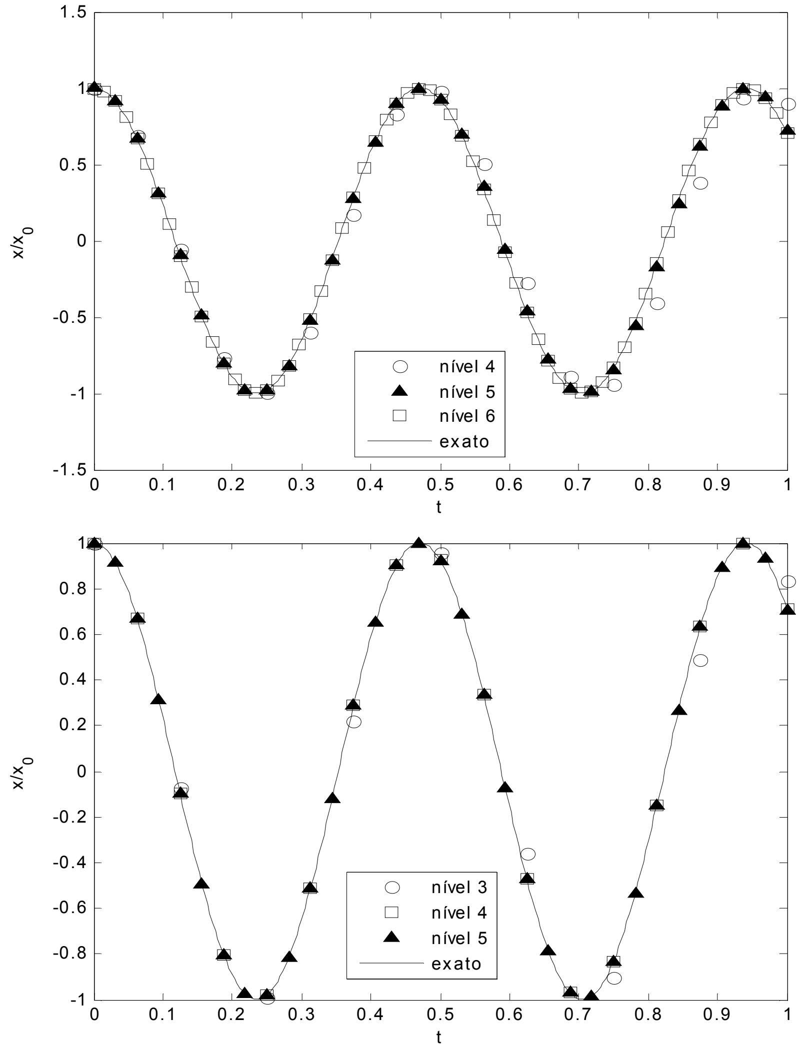

Figura 18 – Solução da equação harmônica por DB6 (acima) e DB12 (abaixo)

A fig. (18) mostra o resultado para diferentes níveis de resolução utilizando a Daubechies DB6 e DB12. Em ambas as análises a freqüência natural de vibração do sistema foi dado por $\omega = 4.25\pi$. Pode-se notar que com wavelets de ordem mais alta, níveis de resolução mais baixos alcançam resultados satisfatórios.

3.1.2. Solução Utilizando Coeficientes de Conexão Próprios

Multiplicando a eq. (3.4) pela base de funções de escala e integrando no intervalo [0,1], temos:

$$\sum_j d_j \left\{ \int_0^1 \varphi(t-i)\ddot{\varphi}(t-j)dt + \omega^2 \int_0^1 \varphi(t-i)\varphi(t-j)dx \right\} = 0 \tag{3.15}$$

O sistema da eq. (3.15) está descrito no espaço das funções, ou seja, as incógnitas são os coeficientes da aproximação e não os valores da função resposta. As integrais que aparecem na eq. (3.15) são coeficientes de conexão "próprios". Em forma matricial, o sistema fica:

$$\mathbf{Ad} = \mathbf{0}, \quad A_{ij} = \Gamma_{ij}^{02} + \omega^2 \Gamma_{ij}^{00} \tag{3.16}$$

A matriz **A** é singular, portanto as condições de contorno devem ser incorporadas ao sistema de modo a obter uma solução única. Aplicando as condições de contorno em (3.5) à base de funções tem-se:

$$x(0) = x_0 \rightarrow \sum_j d_j \varphi(-j) \rightarrow \mathbf{\Phi_0 d} = x_0 \tag{3.17}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \rightarrow \sum_j d_j \dot{\varphi}(-j) \rightarrow \dot{\mathbf{\Phi}}_1 \mathbf{d} = 0 \tag{3.18}$$

Nas expressões (3.17) e (3.18), $\mathbf{\Phi}$ é o vetor que contém cada componente da base das funções de escala. O subíndice representa o ponto em que o vetor de funções é avaliado.

A imposição das condições de contorno é feita adicionando ao sistema linhas correspondentes às eqs. (3.17) e (3.18), resultando numa matriz retangular:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma^{02}} + \omega^2 \mathbf{\Gamma^{00}} \\ \mathbf{\Phi_0} \\ \dot{\mathbf{\Phi}}_\mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ x_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.19}$$

3.1.2.1. Solução em Níveis Seguintes

Numa análise multirresolução, pode-se aumentar o nível de resolução das funções base para melhorar a resposta do problema. O deslocamento pode ser, portanto, aproximado por funções definidas em subespaços seguintes, ou seja, com seus domínios reduzidos.

$$x(t) = \sum_j d_j \varphi(2^m t - j) \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 4^m \sum_j d_j \ddot{\varphi}(2^m t - j) \tag{3.21}$$

Substituindo (3.20) e (3.21) na equação diferencial, multiplicando pela base e integrando no intervalo [0,1], temos:

$$\sum_j d_j \left\{ 4^m \int_0^1 \varphi(2^m x - i) \ddot{\varphi}(2^m t - j) dt + \omega^2 \int_0^1 \varphi(2^m t - i) \varphi(2^m t - j) dt \right\} = 0 \tag{3.22}$$

Os coeficientes de conexão que aparecem na eq. (3.22) estão definidos dentro do subespaço das funções no nível *m*. Como visto anteriormente, tais coeficientes de conexão podem ser calculados a partir dos coeficientes no nível 0.

$$\int_0^1 \varphi^{d_1}(2^m t - i) \varphi^{d_2}(2^m t - j) dx = \frac{1}{2^m} \int_0^{2^m} \varphi^{d_1}(y - i) \varphi^{d_2}(y - j) dy = \frac{1}{2^m} \Gamma^{d_1, d_2}_{i,j_{[0,2^m]}} \tag{3.23}$$

Substituindo (3.23) em (3.22) chega-se a:

$$\sum_j d_j \left\{ 2^m \Gamma^{02}_{i,j_{[0,2^m]}} + \frac{\omega^2}{2^m} \Gamma^{00}_{i,j_{[0,2^m]}} \right\} = 0 \tag{3.24}$$

$$\mathbf{Ad} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A} = 2^m \mathbf{\Gamma}^{\mathbf{02}}_{[0,2^m]} + \frac{\omega^2}{2^m} \mathbf{\Gamma}^{\mathbf{00}}_{[0,2^m]} \tag{3.25}$$

Pode-se notar que o sistema matricial da eq. (3.25) também vale para o nível 0. Deste ponto no texto em diante, fica subentendido que a análise pode ser feita em qualquer nível de resolução, já que o nível 0 é apenas um caso particular. Quando não houver especificação dos limites de integração dos coeficientes de conexão, subentende-se intervalo [0,1].

As condições de contorno devem ser ajustadas para a inclusão dos níveis posteriores, da seguinte forma:

$$x(0) = x_0 \rightarrow \sum_j d_j \varphi(-j) \rightarrow \mathbf{\Phi_0 d} = x_0 \tag{3.26}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \rightarrow 2^m \sum_j d_j \dot{\varphi}(-j) \rightarrow 2^m \dot{\mathbf{\Phi}}_0 \mathbf{d} = 0 \tag{3.27}$$

$$\begin{bmatrix} 2^m \mathbf{\Gamma}^{\mathbf{02}}_{[0,2^m]} + 2^{-m}\omega^2 \mathbf{\Gamma}^{\mathbf{00}}_{[0,2^m]} \\ \mathbf{\Phi_0} \\ 2^m \dot{\mathbf{\Phi}}_0 \end{bmatrix} \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ x_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.28}$$

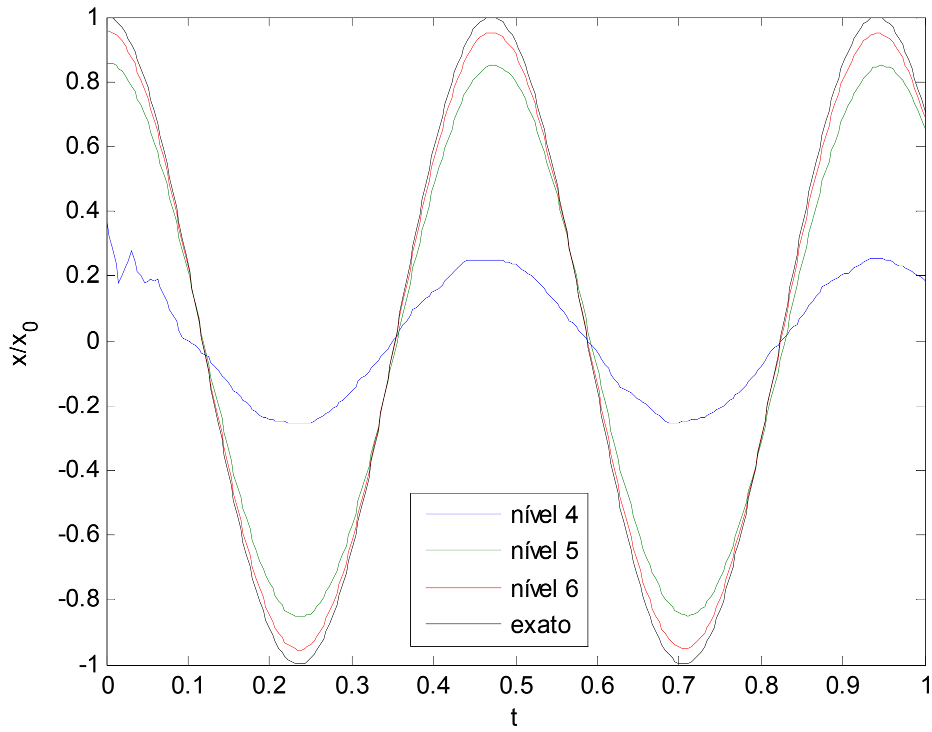

Figura 19 − Aproximação da solução da equação harmônica com DB6 em diferentes níveis

A fig. (19) mostra os resultados da aproximação em diferentes níveis para a DB6. Pode-se perceber que a aproximação da solução converge para a resposta exata à medida que se aumenta o nível de resolução da função wavelet.

3.2. Equação Diferencial de uma Barra de Treliça

O comportamento de uma barra de treliça com módulo de elasticidade e seção transversal constantes submetida a um carregamento axial distribuído pode ser descrito pela seguinte equação:

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = -q(\xi) \tag{3.29}$$

O deslocamento e a sua derivada segunda podem ser aproximados por uma base de funções de escala wavelet no nível de resolução *m*.

$$u(\xi) = \sum_j d_j \varphi(2^m \xi - j) \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 4^m \sum_j d_j \varphi''(2^m \xi - j) \tag{3.31}$$

Substituindo as eqs. (3.30) e (3.31) na expressão (3.29) e integrando no intervalo [0,1] chega-se a:

$$EA\sum_j 4^m d_j \int_0^1 \varphi(2^m \xi - i)\varphi''(2^m \xi - j)d\xi = -\int_0^1 q(\xi)\varphi(2^m \xi - i)d\xi \tag{3.32}$$

Em forma matricial, o sistema fica:

$$\mathbf{kd} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{k} = 2^m EA\,\mathbf{\Gamma}^{\mathbf{02}}_{[0,2^m]}, \quad \mathbf{f} = -\int_0^1 q(\xi)\mathbf{\Phi}^T d\xi \tag{3.33}$$

Como o sistema está no espaço das funções, não é possível impor as condições de contorno com simples remoção de linhas e colunas da matriz **k**. Para tanto, é necessário utilizar uma matriz de transformação para o espaço físico, como visto adiante. As condições de contorno possíveis para esse tipo de problema são dadas por:

$$\begin{aligned}
&u(0) \rightarrow \sum_j d_j \varphi(-j) \rightarrow \mathbf{\Phi_0 d} \\
&\sigma_x(0) = E\,u'(0) \rightarrow 2^m \sum_j d_j \varphi'(-j) \rightarrow 2^m \mathbf{\Phi_0' d} \\
&u(1) \rightarrow \sum_j d_j \varphi(2^m - j) \rightarrow \mathbf{\Phi_1 d} \\
&\sigma_x(1) = E\,u'(1) \rightarrow 2^m \sum_j d_j \varphi'(2^m - j) \rightarrow 2^m \mathbf{\Phi_1' d}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

A eq. (3.34) apresenta duas condições essenciais (de deslocamento) e duas naturais (de tensão). Adicionando ao sistema linhas correspondentes a duas das quatro condições de contorno possíveis chega-se à solução para os coeficientes interpoladores.

Pelo MEF tradicional é necessário impor apenas as condições de contorno essenciais conhecidas, o que representa uma vantagem em relação ao Método de Wavelet-Galerkin, no qual é necessário especificar uma combinação de duas das quatro condições especificadas na eq. (3.34).

A solução exata da equação diferencial da treliça é dada por uma reta (polinômio de primeiro grau) e uma solução particular que depende de $q(\xi)$:

$$u(\xi) = A + B\xi + u_p(\xi) \tag{3.35}$$

3.3. Equação Diferencial de uma Viga à Flexão

O comportamento de uma viga com módulo de elasticidade e momento de inércia constantes, submetida a um carregamento transversal distribuído pode ser descrito pela seguinte equação:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} = q(\xi) \tag{3.36}$$

Após aproximar o deslocamento e sua quarta derivada pela base de funções wavelet, temos:

$$EI\sum_j 16^m d_j \int_0^1 \varphi(2^m\xi - i)\,\varphi^{IV}(2^m\xi - j)d\xi = \int_0^1 q(\xi)\,\varphi(2^m\xi - i)d\xi \qquad (3.37)$$

Em forma matricial, o sistema fica:

$$\mathbf{kd} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{k} = 8^m EI\,\mathbf{\Gamma}^{\mathbf{04}}_{[0,2^m]}, \quad \mathbf{f} = \int_0^1 q(\xi)\mathbf{\Phi}^T d\xi \qquad (3.38)$$

As condições de contorno possíveis para esse tipo de problema são dadas por:

$$\begin{aligned}
& w(0) \to \sum_j d_j\varphi(-j) \to \mathbf{\Phi_0 d} \\
& w'(0) \to 2^m \sum_j d_j\varphi'(-j) \to 2^m \mathbf{\Phi'_0 d} \\
& M(0) = EI\,w''(0) \to 4^m \sum_j d_j\varphi'(-j) \to 4^m \mathbf{\Phi''_0 d} \\
& Q(0) = EI\,w'''(0) \to 8^m \sum_j d_j\varphi'(-j) \to 8^m \mathbf{\Phi'''_0 d} \\
& w(1) \to \sum_j d_j\varphi(2^m - j) \to \mathbf{\Phi_1 d} \\
& w'(1) \to 2^m \sum_j d_j\varphi'(2^m - j) \to 2^m \mathbf{\Phi'_1 d} \\
& M(1) = EI\,w''(1) \to 4^m \sum_j d_j\varphi'(2^m - j) \to 4^m \mathbf{\Phi''_1 d} \\
& Q(1) = EI\,w'''(1) \to 8^m \sum_j d_j\varphi'(2^m - j) \to 8^m \mathbf{\Phi'''_1 d}
\end{aligned} \qquad (3.39)$$

Adicionando ao sistema linhas correspondentes a quatro das 8 condições de contorno possíveis chega-se à solução para os coeficientes interpoladores.

A solução exata da equação diferencial da viga é dada por um polinômio do terceiro grau e uma solução particular que depende de $q(\xi)$:

$$w(\xi) = A + B\xi + C\xi^2 + D\xi^3 + w_p(\xi) \qquad (3.40)$$

3.4. Viga Submetida a uma Carga Axial

O comportamento de uma viga com módulo de elasticidade e momento de inércia constantes, submetida a um carregamento transversal distribuído pode ser descrito pela seguinte equação:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \mu^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = q(\xi), \quad \mu^2 = \frac{P}{EI} \tag{3.41}$$

Na expressão (3.41), a carga P é positiva para compressão e negativa para tração (Bazant e Cedolin, 1991). Após aproximar o deslocamento e sua quarta derivada pela base de funções wavelet, temos:

$$\begin{gathered}\sum_j d_j \left[16^m \int_0^1 \varphi(2^m \xi - i)\varphi^{IV}(2^m \xi - j) d\xi + \right. \\ \left. + 4^m \mu^2 \int_0^1 \varphi(2^m \xi - i)\varphi''(2^m \xi - j) d\xi \right] = \int_0^1 q(\xi)\varphi(2^m \xi - i) d\xi\end{gathered} \tag{3.42}$$

Em forma matricial, o sistema fica:

$$\left(\mathbf{k} + \mu^2 \mathbf{g}\right)\mathbf{d} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{k} = 8^m EI\, \mathbf{\Gamma}^{\mathbf{04}}_{[0,2^m]}, \quad \mathbf{g} = 2^m\, \mathbf{\Gamma}^{\mathbf{02}}_{[0,2^m]}, \quad \mathbf{f} = \int_0^1 q(\xi)\mathbf{\Phi}^T d\xi \tag{3.43}$$

Na eq. (3.43) pode-se notar a presença das matrizes **k** e **g** que fazem papéis semelhantes às matrizes de rigidez e geométrica, respectivamente. As condições de contorno possíveis para esse tipo de problema são as mesmas utilizadas para a viga sem carregamento axial.

A solução exata da equação diferencial da viga submetida a carregamento axial é dada por:

$$\begin{aligned} w(\xi) &= A\,\mathrm{sen}(\mu\xi) + B\cos(\mu\xi) + C\xi + D + w_p(\xi), \quad \mu^2 > 0 \\ w(\xi) &= A\,\mathrm{senh}(|\mu|\xi) + B\cosh(|\mu|\xi) + C\xi + D + w_p(\xi), \quad \mu^2 < 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Pode-se notar pela eq. (3.44) que há diferentes soluções da equação diferencial para o caso de tração ou compressão (Weaver e Gere, 1980). Caso a carga distribuída seja nula, a eq. (3.43) se transforma num problema de autovalor generalizado que terá como resposta cargas críticas e modos críticos de flambagem de colunas. Neste caso, a obtenção dos autovalores e autovetores depende da utilização de multiplicadores de Lagrange. O emprego dos multiplicadores de Lagrange tem o objetivo de impor as condições de contorno ao problema sem torná-lo retangular, já que o a solução do problema de autovalor só é possível para matrizes quadradas.

Designando por **C** a matriz de imposição de condições de contorno de tal forma que $\mathbf{Cd} = \mathbf{0}$, pode-se escrever o problema de autovalor generalizado para obtenção de cargas e modos críticos da seguinte maneira:

$$\left(\begin{bmatrix} 8^m \mathbf{\Gamma}^{\mathbf{04}}_{[0,2^m]} & \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \mu^2 \begin{bmatrix} 2^m \mathbf{\Gamma}^{\mathbf{02}}_{[0,2^m]} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{3.45}$$

Os valores de μ que tornam a eq. (3.45) um sistema com mais de uma solução além da trivial são as chamadas cargas críticas e os vetores **d** correspondentes são os modos críticos.

3.5.
Viga Sobre Base Elástica

Uma base elástica pode ser modelada como uma série de molas independentes, conhecida como base elástica de Winkler (Timoshenko e Gere, 1961). A rigidez da base é expressa em unidade de força por unidades de comprimento ao quadrado e a reação da base ao deslocamento transversal da viga é dada por:

$$b(\xi) = -cw(\xi) \tag{3.46}$$

Na eq. (3.46), c é a rigidez da base elástica e $b(\xi)$ é o carregamento por unidade de comprimento que surge como reação ao deslocamento $w(\xi)$. O comportamento de uma viga sobre base elástica com módulo de elasticidade e momento de inércia constantes, submetida a um carregamento transversal distribuído pode ser descrito pela seguinte equação:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4}+cw(\xi)=q(\xi) \tag{3.47}$$

Depois de aproximar o deslocamento e sua quarta derivada pela base de funções wavelet, temos:

$$\begin{aligned}\sum_j d_j\Bigg[16^m EI\int_0^1 \varphi(2^m\xi-i)\varphi^{IV}(2^m\xi-j)d\xi+\\ +c\int_0^1 \varphi(2^m\xi-i)\,\varphi(2^m\xi-j)d\xi\Bigg]=\int_0^1 q(\xi)\varphi(2^m\xi-i)d\xi\end{aligned} \tag{3.48}$$

Em forma matricial, o sistema fica:

$$\left(\mathbf{k}+\mathbf{b}\right)\mathbf{d}=\mathbf{f},\quad \mathbf{k}=8^m EI\,\boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{04}}_{[0,2^m]},\quad \mathbf{b}=\frac{c}{2^m}\boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{00}}_{[0,2^m]},\quad \mathbf{f}=\int_0^1 q(\xi)\,\boldsymbol{\Phi}^T d\xi \tag{3.49}$$

A solução exata da equação diferencial da viga sobre base elástica é dada por:

$$\begin{gathered}w(\xi)=e^{-\beta\xi}\left[A\,\mathrm{sen}(\beta\xi)+B\cos(\beta\xi)\right]+e^{\beta\xi}\left[C\,\mathrm{sen}(\beta\xi)+D\cos(\beta\xi)\right]+w_p(\xi)\\ \beta^4=\frac{c}{4EI}\end{gathered} \tag{3.50}$$