

7

Análise de Autovalores e Autovetores

7.1

Considerações iniciais

As análises de vibração livre foram realizadas com o intuito de obter as frequências naturais e os modos de vibração dos modelos numéricos desenvolvidos (modelos I, II e III) para a análise do comportamento dinâmico quando esses modelos trabalham em regime de interação parcial e/ou total.

Os resultados foram comparados com os valores obtidos experimentalmente na tentativa de validar as análises realizadas com os modelos numéricos desenvolvidos. Cabe ressaltar, outrossim, que os modelos computacionais foram desenvolvidos em concordância com os modelos experimentais investigados por Oliveira [38] em 2005 e por Chapman e Balakrishnan [6] em 1964.

7.2

Análise de frequências naturais e modos de vibração

Seguindo a metodologia proposta, as análises de vibração livre foram realizadas com a utilização do programa ANSYS [55]. A partir dessas análises, pôde-se obter a resposta dinâmica dos pisos mistos aço-concreto em regime de interação parcial e/ou total, com base na análise das frequências naturais e dos modos de vibração.

Na Tabela 7.1, faz uma comparação entre os valores das frequências naturais obtidas para os modelos numéricos desenvolvidos neste trabalho com os valores obtidos experimentalmente [6] e [38]. Tais modelos referem-se aos modelos de piso isotrópico (modelo II) e de piso ortotrópico (modelo III), descritos no capítulo 6 deste trabalho.

Não obstante, essas observações não puderam ser realizadas para o modelo computacional I, tendo em vista que as respostas obtidas experimentalmente foram de natureza puramente estática.

Tabela 7.1 – Frequências naturais dos modelos II e III – interação total.

Frequências naturais dos modelos numéricos desenvolvidos f_{0i} (Hz)			Frequências naturais do piso f_{0i} (Hz)
	Modelo II (Isotrópico)	Modelo III (Ortotrópico)	Modelo experimental [38]
f_{01}	10,00	9,77	9,75
f_{02}	10,43	10,90	11,25
f_{03}	15,48	14,20	14,63
f_{04}	16,16	15,70	18,75

Com base nos resultados demonstrados na Tabela 7.1, percebe-se uma boa concordância entre os valores das frequências obtidas a partir dos modelos computacionais desenvolvidos, por meio do método de elementos finitos, e o valor obtidos experimentalmente por Oliveira [38]. Essas observações, no tocante às frequências naturais, fornecem um bom indicativo de coerência no que diz respeito aos modelos numéricos desenvolvidos, bem como aos resultados e às conclusões obtidas ao longo desta investigação.

Para os modelos numéricos desenvolvidos neste trabalho, no que tange a características ortotrópicas e isotrópicas, existe uma pequena diferença nos valores das frequências obtidas. Essa observação evidencia a possibilidade de mudanças no comportamento dos modelos isotrópico (modelo II) e ortotrópico (modelo III) em relação a análises dinâmicas.

7.2.1

Modelo de viga mista – modelo computacional I

As análises de vibração livre foram iniciadas a partir do modelo computacional I, que é representativo de uma faixa de piso misto aço-concreto, em que a laje se apoia sobre a viga de aço e se conecta a esta por meio de conectores de cisalhamento (Figura 6.6).

Com essas análises, objetivou-se avaliar o comportamento dinâmico desse sistema, considerando os regimes de interação parcial e/ou total. Para tanto, obtiveram-se os autovalores e os autovetores do sistema, na medida em que o número de conectores varia e o nível de solicitação nos conectores em regime de interação total deve ser o mesmo quando comparado à parcial.

A fim de que essa estratégia seja possível, a partir da curva força deslizamento obtida por Ellobody [73], representada na Figura 6.10, obteve-se a

derivada no ponto em níveis de força, variando entre 25%, 50%, 75% e 100% da curva (Figura 7.1).

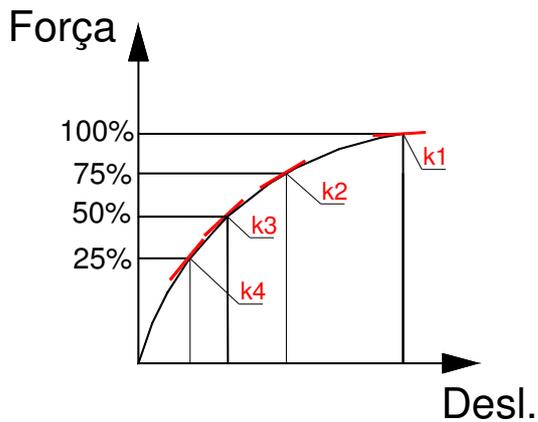


Figura 7.1 – Rigidez dos conectores para níveis de força a 25, 50, 75 e 100%

A partir da rigidez obtida em níveis distintos de força, implementa-se numericamente a equação da reta representativa dessa rigidez nos elementos de mola translacional representativos dos conectores de cisalhamento. Assim, no modelo computacional com maior quantidade de conectores, o qual representa o sistema em regime de interação total, implementa-se a rigidez da curva nos elementos de mola translacional representativos dos conectores de cisalhamento em um nível de solicitação igual ao do regime de interação parcial. Para melhor entendimento, a Figura 7.3 procura esclarecer o procedimento adotado.

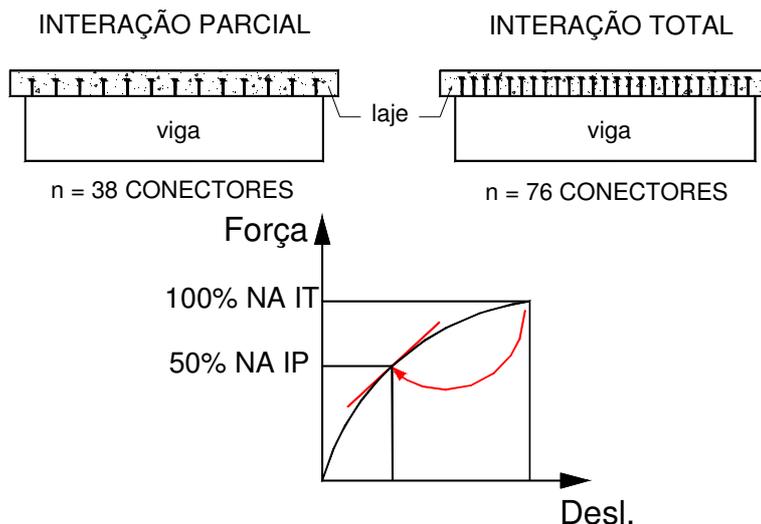


Figura 7.2 – Metodologia inicial proposta

A Tabela 7.2 apresenta os valores das frequências naturais obtidas a partir da variação da rigidez dos conectores de cisalhamento e da variação de suas quantidades.

Tabela 7.2 – Frequências naturais em função da quantidade e da rigidez dos conectores de cisalhamento.

MODELO COMPUTACIONAL I						
Rigidez do conector definida a 100% de carga na curva força versus deslizamento						
Frequências (Hz)	102	76	56	38	19	2
f_{01} (Hz)	2,82	1,98	1,73	1.37	0.97	0.39
f_{02} (Hz)	3,08	3,05	3,05	3.05	3.05	3.05
f_{03} (Hz)	12,08	12,07	12,07	12.07	12.07	12.07
f_{04} (Hz)	26,63	26,63	26,63	26.62	26.62	26.62
f_{05} (Hz)	46,03	46,02	46,02	46.02	46.02	46.02
f_{06} (Hz)	69,30	69,29	69,29	69.29	69.29	69.29
Rigidez do conector definida a 75% de carga na curva força versus deslizamento						
Frequências (Hz)	102	76	56	38	19	2
f_{01} (Hz)	3,02	2,23	1.95	1.55	1.09	0.44
f_{02} (Hz)	3,23	3,06	3.05	3.05	3.05	3.05
f_{03} (Hz)	12,08	12,07	12.07	12.07	12.07	12.07
f_{04} (Hz)	26,63	26,63	26.63	26.62	26.62	26.62
f_{05} (Hz)	46,03	46,02	46.02	46.02	46.02	46.02
f_{06} (Hz)	69,30	69,29	69.29	69.29	69.29	69.29
Rigidez do conector definida a 50% de carga na curva força versus deslizamento						
Frequências (Hz)	102	76	56	38	19	2
f_{01} (Hz)	3,05	2,68	2.34	1.86	1.32	0.53
f_{02} (Hz)	3,84	3,07	3.06	3.05	3.05	3.05
f_{03} (Hz)	12,08	12,07	12.07	12.07	12.07	12.07
f_{04} (Hz)	26,64	26,63	26.63	26.63	26.62	26.62
f_{05} (Hz)	46,03	46,02	46.02	46.02	46.02	46.02
f_{06} (Hz)	69,31	69,30	69.29	69.29	69.29	69.29
Rigidez do conector definida a 25% de carga na curva força versus deslizamento						
Frequências (Hz)	102	76	56	38	19	2
f_{01} (Hz)	3,05	3,04	2.94	2.38	1.68	0.69
f_{02} (Hz)	4,90	3,45	3.11	3.06	3.05	3.05
f_{03} (Hz)	12,09	12,08	12.08	12.07	12.07	12.07
f_{04} (Hz)	26,64	26,63	26.63	26.63	26.63	26.62
f_{05} (Hz)	46,04	46,03	46.03	46.02	46.02	46.02
f_{06} (Hz)	69,32	69,30	69.30	69.29	69.29	69.29

O gráfico da Figura 7.3 foi construído com base nos valores apontados na Tabela 7.2 e apresenta as frequências dos modelos estruturais em estudo, em Hz, obtidas a partir da variação da rigidez dos conectores de cisalhamento.

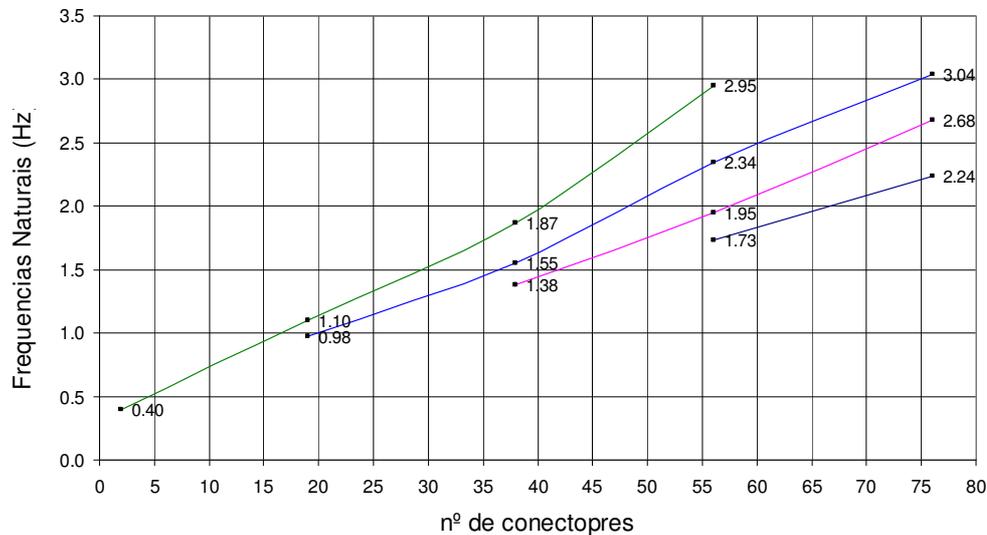


Figura 7.3 – Variação das frequências naturais em função da variação do número de conectores e da sua rigidez.

Ao examinar os resultados fornecidos pela Tabela 7.2, pôde-se concluir que:

- a) Observou-se a existência de uma aparente variação linear (frequência *versus* grau de interação) à medida que o número de conectores de cisalhamento aumenta.
- b) Verificou-se a redução dos valores das frequências naturais à medida que o número de conectores também diminui, para qualquer valor de rigidez dos conectores. Dessa forma, os pisos tornam-se mais flexíveis e, conseqüentemente, mais suscetíveis a vibrações causadas por pequenos impactos. Isso ocorre em razão de o número de conectores de um dado sistema misto influenciar diretamente na rigidez do piso. Assim, quanto maior o número de conectores, menor será o deslizamento entre a laje e a viga, e maior será a rigidez do piso.
- c) O modelo numérico que contempla a quantidade de 102 conectores de cisalhamento para impedir o deslizamento relativo entre a laje e a viga de aço segue o modelo de piso investigado pelos pesquisadores Chapman e Balakrishnan [6] em 1964. Em relação ao modelo utilizado neste trabalho, o valor

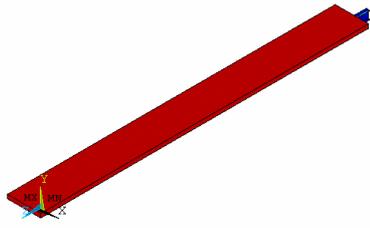
da frequência fundamental é o mais elevado entre os demais casos. Entretanto, a quantidade de conectores é considerada para este caso um excesso, tendo em vista que o regime de interação total já é alcançado com 76 conectores de cisalhamento. Isso demonstra que 102 conectores é um número exagerado, impedindo ainda mais o deslizamento na interface.

e) O modelo com dois conectores pode ser representado por situações em que não existam elementos de ligação entre a laje de concreto e o perfil de aço. Todavia, os valores das frequências obtidas foram os mais baixos. Em outras palavras, pode-se dizer que nesse caso o perfil deve ser dimensionado para receber a carga total da laje acrescida da sua sobrecarga. Entretanto, soluções como estas, encarecem bastante o custo das obras. Nos dias atuais, o sistema misto permite que se possa aproveitar ao máximo a capacidade dos materiais, de modo que se trabalhe em conjunto, reduzindo, por conseguinte, os custos.

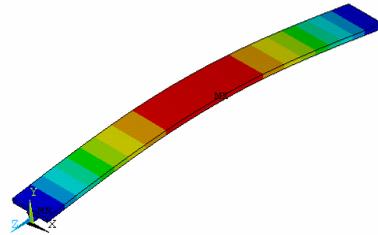
f) De acordo com a metodologia de análise, a rigidez dos conectores de cisalhamento deve ser a mesma na comparação dos regimes de interação total (76 conectores) e/ou parcial (38 conectores). Assim, a frequência natural da estrutura em regime de interação total é alcançada com a rigidez da curva a 50%, no valor de 2,68 Hz. Quando comparada com o sistema em regime de interação parcial, deve-se considerar a rigidez da curva a 100%, obtendo um valor de 1,37 Hz.

Essa observação demonstra que o valor da frequência natural se reduz à metade quando o sistema trabalha em regime de interação parcial. Esse fato deve ser levado em consideração quando se trata de estados-limiteS de utilização no que diz respeito a vibrações excessivas em sistemas estruturais, causando desconforto para usuários.

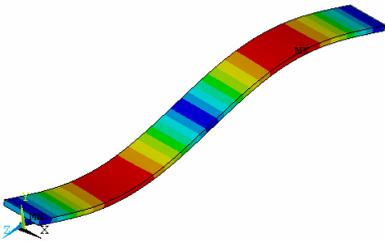
A Figura 7.4 e a Figura 7.5 apresentam as quatro primeiras formas modais referentes ao modelo estrutural I, segundo níveis de interação total (76 conectores) e parcial (38 conectores).



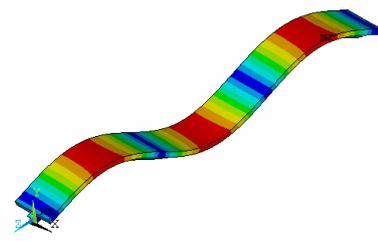
a) Modo de vibração referente à primeira frequência natural: $f_{01}=2,68\text{Hz}$



b) Modo de vibração referente à segunda frequência natural: $f_{02}=3,07\text{Hz}$

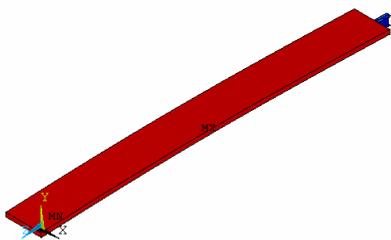


c) Modo de vibração referente à terceira frequência natural: $f_{03}=12,07\text{Hz}$

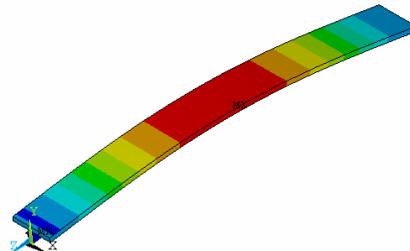


d) Modo de vibração referente à quarta frequência natural: $f_{04}=26,63\text{Hz}$

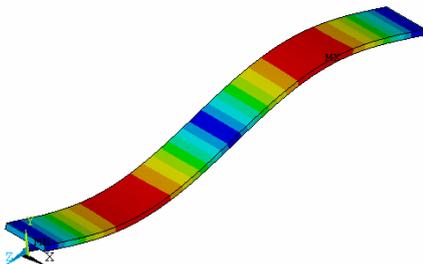
Figura 7.4 – Iteração total (76 conectores e rigidez a 50% da curva).



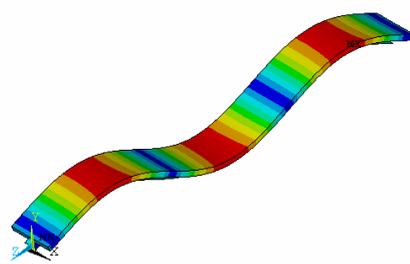
a) Modo de vibração referente à primeira frequência natural: $f_{01}=1,98\text{Hz}$



b) Modo de vibração referente à segunda frequência natural: $f_{02}=3,05\text{Hz}$



c) Modo de vibração referente à terceira frequência natural: $f_{03}=12,07\text{Hz}$



d) Modo de vibração referente à quarta frequência natural: $f_{04}=26,63\text{Hz}$

Figura 7.5 – Iteração parcial (38 conectores e rigidez a 100% da curva).

Observando as Figura 7.4 e Figura 7.5, nota-se que, de forma geral, o segundo modo de vibração corresponde ao modo de flexão. Entretanto, considerando o terceiro modo de vibração, o modo de torção é predominante. As outras formas modais obtidas segundo a variação do número de conectores não foram aqui discutidas por não apresentarem mudanças significativas no comportamento. As formas modais mostraram-se bastante semelhantes às aquelas apresentadas nas Figura 7.4 e Figura 7.5.

7.2.2

Modelo de piso misto isotrópico – modelo computacional II

Prosseguindo as análises, investigou-se o comportamento dinâmico de um sistema de piso misto aço-concreto, modelo computacional II (Figura 6.11), trabalhando em regime de interação total e/ou parcial. Para esse modelo, considerou-se que a laje trabalha em caráter estritamente isotrópico, e utilizou-se, a mesma curva força-deslizamento obtida por Ellobody [73] (Figura 6.10). A Tabela 7.3 apresenta os valores das frequências naturais obtidas na medida em que se varia o número de conectores de cisalhamento.

Tabela 7.3 – Frequências naturais *versus* variação do número de conectores

Número de conectores	Frequência natural (Hz)
174	10,01
156	9,71
138	9,45
120	9,22
102	9,09
84	8,66
72	8,25
66	7,88
60	7,73
54	7,72

O gráfico da Figura 7.6 foi construído com base nos valores apontados na Tabela 7.3. Esse gráfico apresenta as frequências dos modelos estruturais em estudo, em Hz, obtidas a partir da variação do número de conectores de cisalhamento.

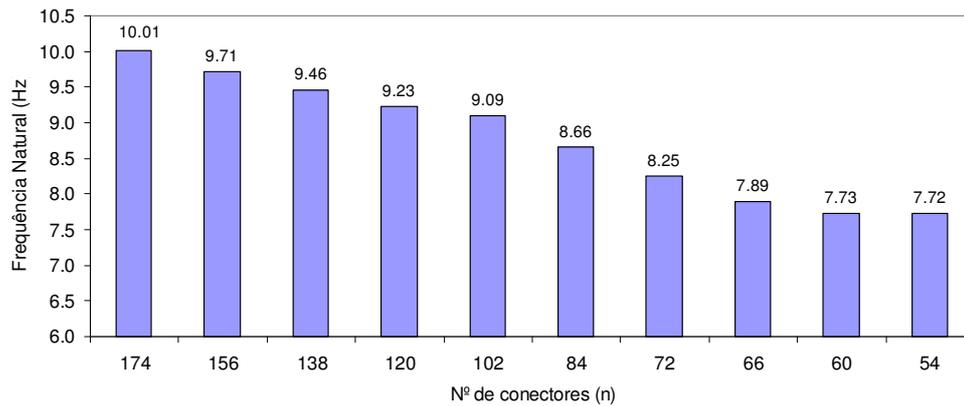


Figura 7.6 – Frequências naturais em função da variação do número de conectores.

No que diz respeito aos valores das frequências obtidas ao longo das análises de vibração livre, pode-se concluir:

a) Percebeu-se a existência de uma aparente variação linear (frequência *versus* grau de interação) à medida que se aumenta o número de conectores de cisalhamento.

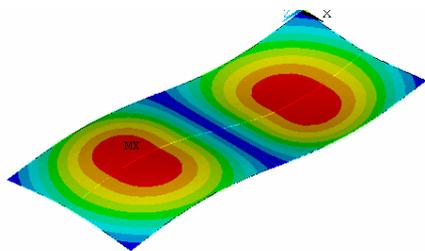
b) Os valores das frequências naturais diminuem à medida que o número de conectores reduz, o que torna os pisos mais flexíveis e, portanto, mais suscetíveis a vibrações ocasionadas por pequenos impactos. Isso decorre do fato de o número de conectores de um dado sistema misto influenciar diretamente a rigidez do piso. Assim, quanto maior o número de conectores, menor será o deslizamento entre a laje e a viga, bem como a rigidez do piso será maior.

c) Para o modelo computacional II, o grau de interação parcial ($n = 0,5$) é obtido com um total de 84 conectores de cisalhamento na interface laje-viga. Nessa situação, a viga de aço possui, aproximadamente, 85% de sua capacidade resistente à flexão. Entretanto, não se costuma trabalhar com grau de interação menor que 50% ($n = 5$) quando comparado com a interação total ($n = 1,0$). Pode-se dizer que o comportamento estático de sistemas de pisos mistos aço-concreto com grau de interação abaixo de 50% ($n = 5$) não é recomendado. Isso é consequência da redução na capacidade portante da viga à flexão, na medida em que se desvincula a laje desta por meio da retirada dos conectores de cisalhamento.

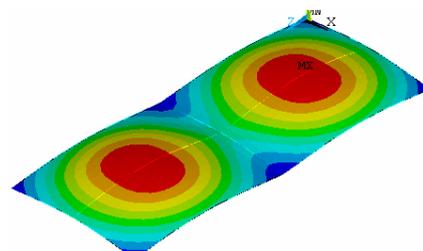
d) Verificou-se uma queda na frequência de, aproximadamente, 1,35 Hz em comparação aos modelos de piso misto aço-concreto na interação total ($n = 1,0$) com a parcial ($n = 0,5$). Essa redução na frequência pode ser bastante significativa para determinadas estruturas, cujo valor da frequência natural já esteja bem próximo ao valor da frequência da excitação.

e) Os resultados encontrados até o presente momento, referentes ao modelo de piso misto analisado, indicam que a redução do número de conectores de cisalhamento (interação parcial) influencia diretamente a frequência natural, tornando-os mais suscetíveis a problemas associados a vibrações. Entretanto, sob o ponto de vista econômico, o regime de interação parcial pode conduzir a reduções significativas no custo total de uma obra. Dessa forma, considerando-se um piso projetado em regime de interação parcial, é interessante que a resposta dinâmica do sistema seja investigada de modo mais criterioso.

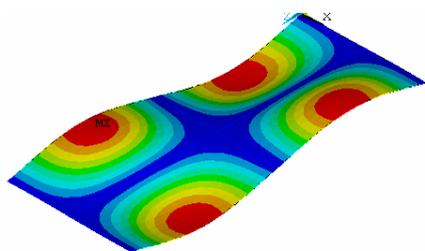
As Figura 7.7 e Figura 7.8 apresentam as quatro primeiras formas modais referentes ao modelo estrutural II (Figura 6.11), considerando a variação do número de conectores de cisalhamento.



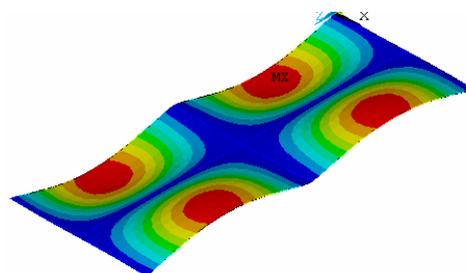
a) Modo de vibração referente à primeira frequência natural: $f_{01} = 10,01$ Hz



b) Modo de vibração referente à segunda frequência natural: $f_{02} = 10,43$ Hz

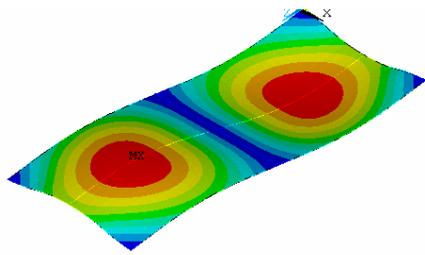


c) Modo de vibração referente à terceira frequência natural: $f_{03} = 15,48$ Hz

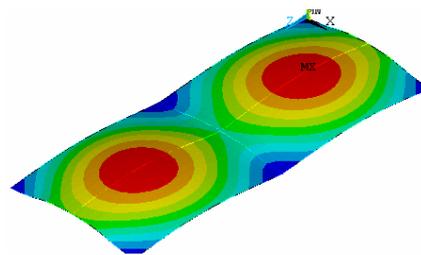


d) Modo de vibração referente à quarta frequência natural: $f_{04} = 16,16$ Hz

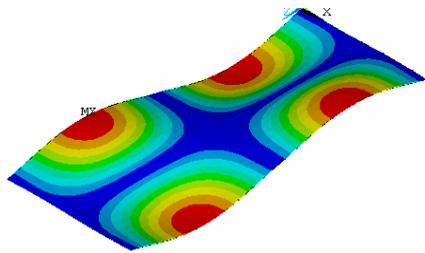
Figura 7.7 – Interação total (174 conectores de cisalhamento).



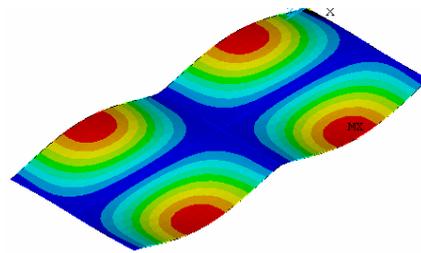
a) Modo de vibração referente à primeira frequência natural: $f_{01} = 8,66$ Hz



b) Modo de vibração referente à segunda frequência natural: $f_{02} = 8,72$ Hz



c) Modo de vibração referente à terceira frequência natural: $f_{03} = 14,18$ Hz



d) Modo de vibração referente à quarta frequência natural: $f_{04} = 14,82$ Hz

Figura 7.8 – Interação parcial (84 conectores de cisalhamento).

Observando as Figura 7.7 e Figura 7.8, nota-se que, de forma geral, o primeiro modo de vibração corresponde ao modo de flexão. Entretanto, considerando o terceiro modo de vibração, o modo de torção é predominante. As outras formas modais obtidas segundo a variação do número de conectores não foram aqui discutidas por não apresentarem mudanças significativas no comportamento. As formas modais mostraram-se bastante semelhantes àquelas apresentadas nas Figura 7.7 e Figura 7.8.

7.2.3

Modelo de piso misto ortotrópico – modelo computacional III

No que tange à análise dinâmica de pisos mistos aço-concreto, o uso indiscriminado de um modelo estrutural isotrópico (modelo I) deve ser, no mínimo, questionado. Uma estratégia mais apropriada para analisar a resposta dinâmica desse tipo de estrutura é considerar uma solução ortotrópica para o modelo, a fim de atentar para a geometria específica desse tipo de sistema.

Para tanto, investigou-se, nesta fase, o comportamento dinâmico do modelo computacional III (Figura 6.13), trabalhando em regime de interação total

e/ou parcial. Esse modelo, conforme a ser descrito no capítulo 6 deste trabalho, procura representar fielmente as características ortotrópicas da laje de concreto, a qual foi moldada a partir da forma de aço incorporada (*steel deck*).

A estratégia de análise aqui realizada foi utilizar a curva força deslizamento obtida por Ellobody [73], (Figura 6.10), para o sistema de piso misto aço-concreto em regime de interação parcial e/ou total. A Tabela 7.4 apresenta os valores das frequências naturais obtidas a partir da variação do número de conectores.

Tabela 7.4 – Frequências naturais *versus* variação do número de conectores

Número de conectores	Frequência natural (Hz)
174	9,77
156	9,49
138	9,28
120	9,14
102	9,08
84	9,07
72	8,82
66	8,44
60	8,27
54	8,27

O gráfico da Figura 7.9 é construído com base nos valores apontados na Tabela 7.4. Esse gráfico apresenta as frequências dos modelos estruturais em estudo, em Hz, obtidas a partir da variação do número de conectores de cisalhamento.

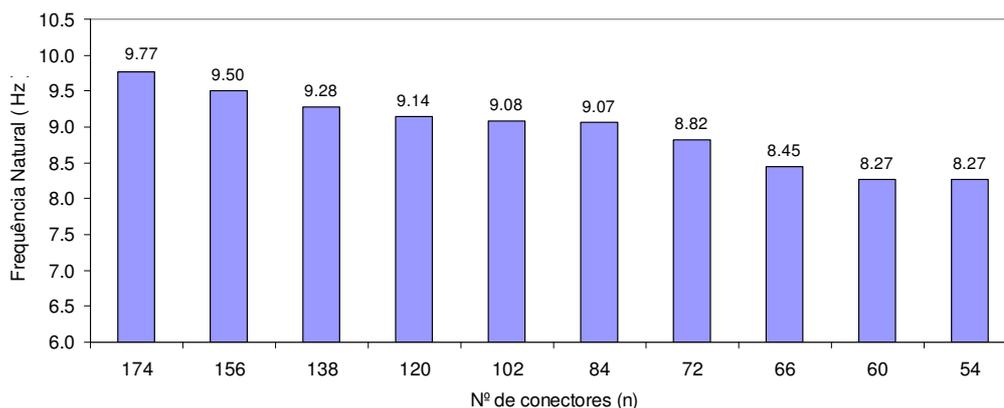


Figura 7.9 – Frequências naturais em função da variação do número de conectores.

Com referência aos valores apresentados no gráfico da Figura 7.9, pode-se concluir:

a) Novamente, foi constatada uma aparente variação linear (frequência *versus* grau de interação) à medida que se aumenta o número de conectores de cisalhamento.

b) Os valores das frequências naturais diminuem à medida que o número de conectores reduz, o que torna os pisos mais flexíveis e, portanto, mais suscetíveis a vibrações ocasionadas por pequenos impactos. Isso decorre do fato de o número de conectores de um dado sistema misto influenciar diretamente a rigidez do piso. Assim, quanto maior o número de conectores, menor será o deslizamento entre a laje e a viga, bem como a rigidez do piso será maior.

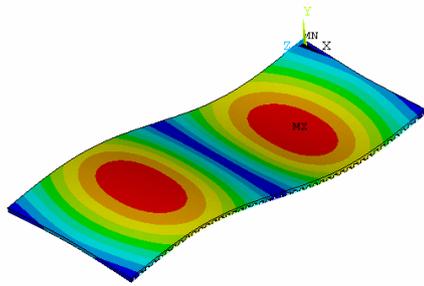
c) Para o modelo computacional III, o grau de interação parcial ($n = 0,5$) é conseguido com um total de 84 conectores de cisalhamento existentes na interface laje-viga. Nessa situação, a viga de aço tem cerca de 85% de sua capacidade resistente à flexão. Entretanto, não se costuma trabalhar com grau de interação menor que 50% ($n = 5$) quando comparado com a interação total ($n = 1,0$). Pode dizer-se que o comportamento estático de sistemas de pisos mistos aço-concreto com grau de interação abaixo de 50% ($n = 5$) é inviável. Isso se deve à redução que ocorre na capacidade portante da viga à flexão, na medida em que se desvincula a laje da viga, pela retirada dos conectores de cisalhamento.

d) Verifica-se uma queda na frequência de, aproximadamente, 0,7Hz, quando comparado os modelos de piso misto aço-concreto na interação total ($n = 1,0$) com a parcial ($n = 0,5$). Essa redução na frequência pode ser bastante significativa para determinadas estruturas, cujo valor natural já esteja bem próximo ao valor da frequência da excitação.

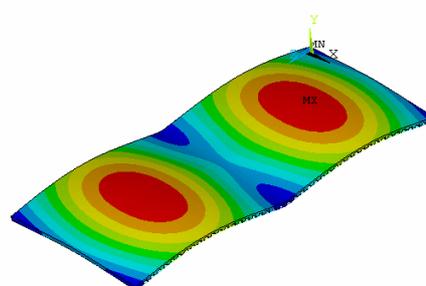
e) Os resultados encontrados até o presente momento, referentes ao modelo de piso misto analisado, indicam que a redução do número de conectores de cisalhamento (interação parcial) influencia diretamente a frequência natural, tornando-os mais susceptíveis a problemas associados a vibrações. Entretanto, sob o ponto de vista econômico, o regime de interação parcial pode conduzir a reduções significativas no custo total de uma obra. Portanto, o regime de

interação parcial somente poderá ser implantado após realizadas as análises dinâmicas necessárias para assegurar o conforto humano.

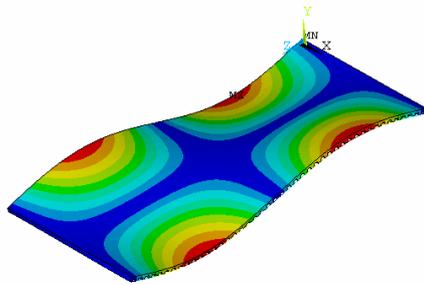
As Figura 7.10 e Figura 7.11 mostram as quatro primeiras formas modais referentes ao modelo estrutural III (Figura 6.13), considerando a variação do número de conectores de cisalhamento.



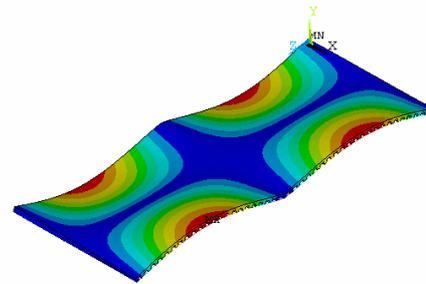
a) Modo de vibração referente à primeira frequência natural: $f_{01} = 9,77\text{Hz}$



b) Modo de vibração referente à segunda frequência natural: $f_{02} = 10,89\text{Hz}$

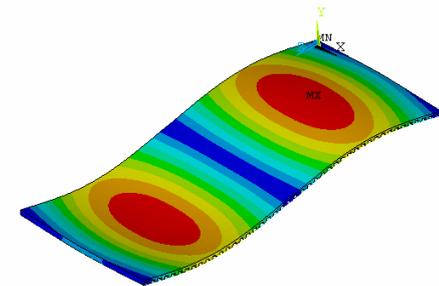


c) Modo de vibração referente à terceira frequência natural: $f_{03} = 14,19\text{Hz}$

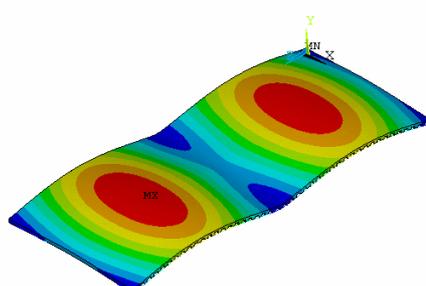


d) Modo de vibração referente à quarta frequência natural: $f_{04} = 15,69\text{Hz}$

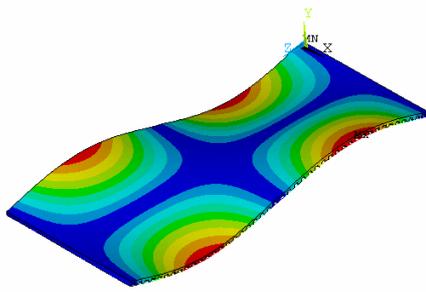
Figura 7.10 – Interação total (174 conectores de cisalhamento)



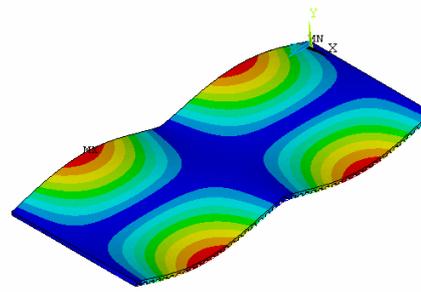
a) Modo de vibração referente à primeira frequência natural: $f_{01} = 9,07\text{Hz}$



b) Modo de vibração referente à segunda frequência natural: $f_{02} = 10,07\text{Hz}$



c) Modo de vibração referente à terceira frequência natural: $f_{03}=13,35$ Hz



d) Modo de vibração referente à quarta frequência natural: $f_{04} = 14,59$ Hz

Figura 7.11 – Interação parcial (84 conectores de cisalhamento)

Observando as Figura 7.10 e Figura 7.11, nota-se que, de forma geral, o primeiro modo de vibração corresponde ao modo de flexão. Entretanto, considerando o terceiro modo de vibração, o modo de torção é predominante. Outras formas modais obtidas segundo a variação do número de conectores não são aqui discutidas por não apresentarem mudanças significativas em seu comportamento. As formas modais mostram-se bastante semelhantes às formas modais apresentadas nas Figura 7.10 e Figura 7.11.

No que tange às respostas dinâmicas obtidas ao longo deste capítulo, nota-se que as formas modais e suas respectivas frequências obtidas para o modelo computacional III (Figura 6.13) são satisfatoriamente concordantes com os sinais experimentais obtidos por Oliveira [38]. Dessa maneira, como os resultados do modelo numérico-computacional III da estrutura correlacionam-se bem com os resultados experimentais, em termos de frequências naturais e formas modais de vibração, conclui-se que esse modelo representa as características dinâmicas da estrutura real e pode ser utilizado nas simulações numéricas do caminhar de pessoas. Para tanto, as análises daqui em diante apenas serão realizadas para o modelo computacional III.

No capítulo 8, são apresentados e discutidos os resultados obtidos a partir das análises de vibração forçada que procuram simular o carregamento dinâmico induzido por seres-humanos durante a caminhada.