3. Mínimos Quadrados de Monte Carlo

3.1. Introdução

A cada instante anterior à expiração de uma Opção Americana, o titular da mesma deve decidir de maneira ótima entre exercer a opção, ou continuar com esta em carteira por mais um período. Para tanto, compara o *payoff* de exercício imediato com o *payoff* esperado de continuação. Caso o *payoff* de exercício imediato seja maior que o *payoff* esperado de continuação, então a opção é exercida.

Sob a hipótese de não arbitragem, o valor de continuidade é a expectativa neutra ao risco dos fluxos de caixa futuros descontados, ou seja:

$$F\left(\omega;t_k\right)=E^Q\left[\sum_{j=k+1}^{K}\exp\left(-\int_{t_k}^{t_j}r(\omega,s)ds\right)C\left(\omega,t_j;t_k,T\right)\mid\Im_{t_k}\right]$$

Onde,

$F\left(\omega;t_k\right)$ é o valor de continuação da opção no instante t_k na trajetória ω;
E^Q é o operador esperança sob medida Q;
Q é a medida de probabilidade neutra ao risco;
$r(\omega,s)$ é a taxa de juros livre de risco no instante t da trajetória ω;
$C\left(\omega,t_j;t_k,T\right)$ é o fluxo de caixa obtido no instante $t_j>t_k$ e na trajetória ω; e
$\Im_{t_k}$ é o conjunto de informações disponível no instante t_k.

Nesse sentido, a idéia inerente ao Método de Mínimos Quadrados de Monte Carlo (MQMC), proposto por Longstaff & Schwartz(2001), reside em aproximar diretamente, a cada instante em há possibilidade de exercício antecipado, o valor de continuação através da utilização da regressão de mínimos quadrados. Deve-se lembrar que outros métodos baseados em simulação estocástica, como o de Grant, Vora & Weeks(1997), aproximam o valor de continuação indiretamente através da construção da curva de gatilho a cada instante em que o exercício antecipado é possível.

A regressão de mínimos quadrados é feita a partir dos dados obtidos para as variáveis de estado via Simulação de Monte Carlo, selecionando-se as trajetórias em que a opção está *in the money*.

Para tanto, a cada instante onde o exercício da opção é factível, o valor de continuação pode ser expresso como uma combinação linear de funções de base ortogonais, tais como os polinômios de Potência, Legendre, Laguerre, dentre outros.

Isto baseia-se no fato de que, na literatura financeira, convencionou-se considerar funções de payoff que pertençam ao espaço das funções de variância finita, denotado por $L^2(\Omega, \Im, Q)$ [4], o qual por ser um exemplo de espaço de Hilbert[5], usufrui da propriedade de que qualquer função F pertencente a este espaço pode ser escrita como uma combinação linear de funções de base ortogonais (Stentoft, 2004).

Sendo assim, pode-se reescrever a função F, da seguinte forma:

$$F(\omega; t_k) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \Phi_j \quad , \quad \alpha_j \in \mathbb{R}$$

Onde a base polinomial degrau j é representada por Φ_j, a qual está em função das variáveis de estado. Observa-se que os coeficientes das bases, α_j, não são conhecidos a priori, mas podem ser estimados através do uso da regressão linear dos dados obtidos via simulação, o que nos remete à essência do método.

Desta forma, suponhamos uma opção cujas variáveis de estado sejam X e Z. Logo, os termos que participam desta combinação são os polinômios das variáveis de estado e o produto cruzado destes. Portanto, a função de continuidade F, a qualquer instante em que o exercício antecipado é permitido, pode ser aproximada por:

$$F(X,Z) = \alpha_0 + \alpha_1.\Phi_1(X) + \alpha_2.\Phi_1(Z) + \alpha_3.\Phi_1(X).\Phi_1(Z)$$

[4]Onde, Ω é o conjunto de todos os *paths* os possíveis; $\Im$ é o filtração dos eventos em determinado instante de tempo; e Q é a medida de probabilidade dos elementos de $\Im$.

[5] Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial munido de um produto interno, e completo em relação à norma definida por esse produto interno. (Lima, 2007)

Na qual utilizamos, apenas, o primeiro grau de um polinômio qualquer em função de uma das variáveis de estado, aqui denotado por $\Phi_1(.)$. Esta estrutura não exclui a possibilidade de se usar um número maior de bases e, portanto, usar outros graus do polinômio, o que acarretaria, também, em um aumento do número de produtos cruzados.

No entanto, ao escolher o número de bases a serem usadas, deve-se considerar um problema levantado por Moreno & Navas (2003). Estes autores analisaram que a utilização de um elevado número de bases e, portanto, diversos graus do polinômio escolhido e seus respectivos produtos cruzados, pode, até determinado ponto, aumentar a precisão da estimativa. Porém, em alguns casos, o aumento acentuado do número de bases utilizadas pode diminuir a precisão do método, tornando-o computacionalmente custoso.

Na próxima seção, o Método de Mínimos Quadrados de Monte Carlo será ilustrado com através da precificação de uma opção asiática similar àquelas a serem precificadas nesta pesquisa.

3.2. Exemplo Numérico: Opção Asiática Americana *Fixed Strike* Aritmética

Ilustrar-se-á, nesta seção, a aplicação do Método de Mínimos Quadrados de Monte Carlo para a precificação de uma opção asiática de estrutura similar àquelas a serem precificadas nesta pesquisa. Neste exemplo, usa-se uma opção de venda (*put*) asiática de estilo americano do tipo *fixed strike* baseada na média aritmética.

A média aritmética utilizada tem seu início fixo em um ponto no eixo do tempo. Dessa forma, nos restringimos ao caso em que o número de termos componentes da média aumenta com a passagem do tempo6. Formalmente, dada a matriz de preços (S) e a matriz de médias (A), a linha i da matriz A é determinada por: $\forall j = 1,...,N$ o elemento $a_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} s_{i,k} \Big/ j$, onde N é o número total de instantes de tempo.

Uma etapa importante na aplicação do método consiste na definição do formato da regressão a ser utilizada e a base polinomial a ser considerada.

[6] Essa classe de opções asiáticas é conhecida como *Fixed-Start Time Window.*

Neste exemplo, será usado o primeiro grau da base de potência[7], e a aproximação da função de *payoff* de continuação será a mesma da usada como ilustração na seção anterior. Desta maneira, nos instantes em que o exercício antecipado é permitido, a função de continuação será aproximada por: $F\left(X_i, Z_i\right) = \alpha_0 + \alpha_1.\Phi_1\left(X_i\right) + \alpha_2.\Phi_1\left(Z_i\right) + \alpha_3.\Phi_1\left(X_i\right).\Phi_1\left(Z_i\right)$, em que, dada a base polinomial escolhida, tem-se:

$$\Phi_1\left(X_i\right) = X_i;\ \Phi_1\left(Z_i\right) = Z_i;\ \Phi_1\left(X_i\right).\Phi_1\left(Z_i\right) = X_i \cdot Z_i.$$

Outros dados do problema são: preço de exercício (K) = 1,10; S0 = 1,00; taxa de juros sem risco (r) = 6%. As datas em que há a possibilidade de exercício antecipado são: t = 2 e t = 3. Como o algoritmo é recursivo seu início acontece no vencimento da opção, portanto em t = 4.

Inicialmente parte-se da matriz de preços do ativo básico, dada nesse exemplo por:

		Instantes de tempo				
		t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4
Paths Simulados	1	1	1,09	1,08	1,34	1,30
	2	1	1,16	1,06	1,04	1,05
	3	1	1,22	1,07	1,03	1,02
	4	1	0,93	0,97	0,92	0,91
	5	1	1,11	1,56	1,52	1,50
	6	1	0,76	0,77	0,90	0,91
	7	1	0,92	0,84	1,01	1,02
	8	1	0,88	1,22	1,34	1,32

Tabela 1 - Preços do ativo ao longo de cada trajetória considerada

Em seguida, computa-se a matriz de médias conforme a definição anterior, o que nos leva à Tabela seguinte.

[7] A Base de Potência em sua forma explícita é definida por Y^n, $n \geq 0$ onde n é o grau do polinômio.

	Instantes de tempo				
Paths Simulados	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4
1	1	1,05	1,06	1,13	1,16
2	1	1,08	1,07	1,07	1,06
3	1	1,11	1,10	1,08	1,07
4	1	0,97	0,97	0,96	0,95
5	1	1,06	1,22	1,30	1,34
6	1	0,88	0,84	0,86	0,87
7	1	0,96	0,92	0,94	0,96
8	1	0,94	1,03	1,11	1,15

Tabela 2 - Média dos preços do ativo básico ao longo de cada *path*

O próximo passo consiste em sinalizar se a opção está in the money ou *out the money* através da função de $payoff^{Put}_{\substack{Fixed\\Strike}} = \left(a_{i,j} - K\right)^{+}$ em que $a_{i,j}$ é o elemento da matriz de médias definido anteriormente. Reitera-se que esta opção só pode ser exercida nos instantes 2, 3 e 4.

	Instantes de tempo				
Paths Simulados	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4
1	***in***	***in***	***in***	***out***	***out***
2	***in***	***in***	***in***	***in***	***in***
3	***in***	***out***	***in***	***in***	***in***
4	***in***	***in***	***in***	***in***	***in***
5	***in***	***in***	***out***	***out***	***out***
6	***in***	***in***	***in***	***in***	***in***
7	***in***	***in***	***in***	***in***	***in***
8	***in***	***in***	***in***	***out***	***out***

Tabela 3 - Tabela de sinalização: mostra se a opção está *in the money* ("in") ou *out the money*("out")

No vencimento da opção (ou seja, t = 4), o detentor só irá exercer a opção se esta estiver *in the money*. O fluxo de caixa auferido neste instante é, portanto, condicional ao fato de não ter havido o exercício da opção em qualquer instante anterior a este. Na Tabela 4, temos os fluxos de caixa auferidos em cada path considerado.

		Instantes de tempo em há possibilidade de exercício		
		t = 2	t = 3	t = 4
Paths Simulados	1	-	-	0,0000
	2	-	-	0,0380
	3	-	-	0,0320
	4	-	-	0,1540
	5	-	-	0,0000
	6	-	-	0,2320
	7	-	-	0,1420
	8	-	-	0,0000

Tabela 4 - Fluxo de caixa da opção no vencimento da mesma

No instante imediatamente anterior ao vencimento da opção dá-se início ao procedimento de determinação da regra de parada ótima. Para tanto, precisamos determinar o valor de continuação, já que o valor de exercício imediato é determinado aplicando-se a função de *payoff*.

Sendo assim, em t=3, estando a opção *in the money*, o titular deve decidir se exerce imediatamente a opção ou se continua com esta em sua carteira por mais um período. Desta forma, definamos os vetores de dados a serem utilizados na regressão.

Seja, X o vetor composto pelos preços do ativo básico e Z o vetor composto pelas médias dos preços do ativo básico. Complementarmente, devemos definir Y, o vetor composto pelos fluxos de caixa descontados correspondentes aos *paths* em que a opção está *in the money*[8] no instante de tempo em que se está analisando, neste caso, o instante t = 3.

		Instante de tempo: t = 3			
		Y	X	Z	*Situação*
Paths Simulados	1	0,0000	1,34	1,13	***out***
	2	0,0358	1,04	1,07	***in***
	3	0,0301	1,03	1,08	***in***
	4	0,1450	0,92	0,96	***in***
	5	0,0000	1,52	1,3	***out***
	6	0,2185	0,9	0,86	***in***
	7	0,1337	1,01	0,94	***in***
	8	0,0000	1,34	1,11	***out***

Tabela 5 - Conjunto de dados em t = 3 a serem usados na regressão. Fator de desconto = 0,941765

[8] Longstaff & Schwartz (2001) salientam que a utilização dos dados de somente os caminhos *in the money* aumenta a eficiência do algoritmo e diminui o tempo computacional do procedimento.

A fim de estimar o fluxo de caixa esperado de continuidade desta opção, condicional ao conjunto de informações que se tem em t = 3, efetua-se a regressão do vetor Y em X, Z e no produto cruzado destes. A função de expectância condicional resultante é $E[Y|X,Z]=0,8536-0,0375X-0,518Z-0,2039XZ$.

Com a função de expectativa condicional (ou função de continuação) obtida, podemos comparar o valor de exercício imediato ("Exercício") em t = 3, com o valor de continuidade ("Continuidade"), a ser obtido substituindo-se os valores das variáveis independentes na regressão. Reitera-se que este procedimento é aplicado somente aos paths nos quais, em t = 3, a opção encontra-se *in the money*.

		Instante de tempo: t = 3	
		Exercicio	Continuidade
Paths Simulados	1	-	-
	2	0,0350	0,0372
	3	0,0200	0,0288
	4	0,1450	0,1453
	5	-	-
	6	0,2425	0,2184
	7	0,1575	0,1335
	8	-	-

Tabela 6 - Valor auferido com o exercício imediato vs valor de continuidade em t = 3

De acordo com a Tabela 6, é ótimo exercer a opção antecipadamente nas trajetórias 6 e 7, sinalizando, portanto que nos paths simulados 2,3 e 4, o melhor a se fazer é manter a opção “viva” em carteira por mais um período. Assim sendo, podemos atualizar a Tabela 4 com os dados de fluxo de caixa do período em questão.

		Instantes de tempo em há possibilidade de exercicio		
		t = 2	t = 3	t = 4
Paths Simulados	1	-	0,0000	0,0000
	2	-	0,0000	0,0380
	3	-	0,0000	0,0320
	4	-	0,0000	0,1540
	5	-	0,0000	0,0000
	6	-	0,2425	0,0000
	7	-	0,1575	0,0000
	8	-	0,0000	0,0000

Tabela 7 - Fluxo de caixa da opção nos períodos t = 3 e t = 4 dada a regra ótima de decisão utilizada, condicional ao fato de que não houve exercício em uma data anterior a t = 3

Analisemos agora o período t = 2, o procedimento será o mesmo adotado anteriormente. Começa-se definindo quais dos paths está *in the money*. De acordo com a Tabela 3, somente a simulação 5 está *out the money*. Logo, já podemos determinar quais serão os elementos dos vetores Y, X e Z no instante t=2 em conformidade com a definição anterior.

Com relação ao vetor Y, vale ressaltar que sua composição é o desconto do fluxo de caixa da Tabela 7, tendo em vista que o algoritmo é recursivo. Isto, por sua vez, nos obriga a considerar todos os fluxos de caixa advindos de períodos posteriores, devidamente descontados até o instante em que se está determinando a decisão ótima, ou seja, t = 2.

		Instante de tempo: t = 2			
		Y	X	Z	*Situação*
Paths Simulados	1	0,0000	1,08	1,06	***in***
	2	0,0337	1,06	1,07	***in***
	3	0,0284	1,07	1,1	***in***
	4	0,1366	0,97	0,97	***in***
	5	0,0000	1,56	1,22	***out***
	6	0,2284	0,77	0,84	***in***
	7	0,1483	0,84	0,92	***in***
	8	0,0000	1,22	1,03	***in***

Tabela 8 - Determinação dos dados a serem usados na regressão em t = 2

A função de continuação obtida é $E[Y \mid X, Z] = 0,4674 + 0,1425X - 0,0835Z - 0,4399XZ$. Comparando-se os valores de exercício imediato e os de continuidade, que constam na Tabela 9, temos que, nas trajetórias 1, 4, 6, 7 e 8, a decisão ótima consiste em exercer a opção de imediato. Enquanto que nos paths 2 e 3, mantêm-se a opção “viva” por mais um período.

		Instante de tempo: t = 2	
		Exercicio	Continuidade
Paths Simulados	1	0,0433	0,0310
	2	0,0267	0,0283
	3	0,0033	0,0121
	4	0,1333	0,1124
	5	-	-
	6	0,2567	0,2210
	7	0,1800	0,1703
	8	0,0667	0,0003

Tabela 9 - Valor auferido com o exercício imediato vs valor de continuidade em t = 2

Com os resultados obtidos, podemos atualizar a Tabela 7 com os fluxos de caixa advindos da regra de decisão ótima, originando a Tabela 10.

		Instantes de tempo em há possibilidade de exercício		
		t = 2	t = 3	t = 4
Paths Simulados	1	0,0433	0,0000	0,0000
	2	0,0000	0,0000	0,0380
	3	0,0000	0,0000	0,0320
	4	0,1333	0,0000	0,0000
	5	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,2567	0,0000	0,0000
	7	0,1800	0,0000	0,0000
	8	0,0667	0,0000	0,0000

Tabela 10 - Fluxo de caixa da opção ao longo dos períodos em que há a possibilidade de exercício dada a regra ótima de decisão

Ao fim, temos a matriz que descreve a regra de parada ótima definida ao longo de cada trajetória no decorrer do tempo. Esta matriz, representada aqui pela Tabela 11, sinaliza quando em determinado path houve ou não o efetivo exercício da opção.

		Instantes de tempo em há possibilidade de exercício		
		t = 2	t = 3	t = 4
Paths Simulados	1	1	0	0
	2	0	0	1
	3	0	0	1
	4	1	0	0
	5	0	0	0
	6	1	0	0
	7	1	0	0
	8	1	0	0

Tabela 11 - Sinalização da regra de parada ótima: será igual a 1 quando há exercício e zero, caso contrário

Sendo assim, ao determinarmos os fluxos de caixa de cada trajetória ao longo do tempo, dada a regra de parada ótima, pode-se valorar a opção. Computando, para tal, a média dos fluxos de caixa descontados até a data de emissão, o que nos permite atribuir à opção asiática analisada o valor de 0,0874.