3
Críticas, Alternativas e a Reconstrução Formal

3.1.
Introdução

Neste capítulo serão apresentados alguns pontos importantes na história do declínio das representações diagramáticas. Os diagramas que faziam parte da linguagem mista dos *Elementos* não são encontrados nas provas homogêneas (linguísticas) dos *Grundlagen der Geometrie*. As razões que levaram a esta mudança são complexas, e derivam de várias fontes históricas. A perda de prestígio do simbolismo diagramático pode ser observada já nos primeiros comentários aos *Elementos*, e as vantagens de seu uso são questionadas quando os métodos da álgebra se revelam adequados à solução de problemas geométricos. Mais tarde, quando a consistência das teorias matemáticas começa a ser questionada, e quando a intuição já não pode servir como auxílio, surge uma concepção de demonstração na qual os diagramas não têm cidadania.

Pretende-se apurar aqui em que medida se justifica adotar uma visão tão restritiva a respeito da linguagem das demonstrações. Para isso, serão apresentadas as principais críticas que foram feitas às demonstrações de Euclides, com ênfase naquelas relacionadas ao uso de diagramas nas demonstrações. Em seguida, serão descritos alguns dos desenvolvimentos em matemática que estão relacionados, de maneira positiva ou negativa, com a crise de fundamentos na matemática do século XIX, e com o desdém pelos recursos diagramáticos em demonstrações. Destacar-se-ão os métodos da geometria analítica e da geometria projetiva, a criação das geometrias não-euclideanas, e o esforço de rigorização e fundamentação dos diversos ramos da matemática, no século XIX. Por fim, será descrita a reconstrução formal da geometria euclideana, nos *Grundlagen der Geometrie*, de Hilbert, seguida de uma descrição da concepção de demonstração que surge vinculada a ela.

O objetivo do capítulo será questionar em que medida a adoção de uma visão exclusivamente sentencial de demonstração é um requisito necessário para alcançar o rigor requerido por uma demonstração matemática.

3.2.
Depois de Euclides

Muito embora os *Elementos* tenham sido aclamados como uma boa sistematização da geometria grega, seus méritos não os mantiveram fora do alcance de críticas dos mais diversos tipos. A insatisfação com a natureza ou a escolha dos princípios, ou então com relação aos métodos de demonstração, pode ser observada desde os primeiros comentadores. Não obstante este fato, algumas tentativas de melhorar aspectos da axiomática euclideana acabaram por expandir os horizontes da geometria (com a descoberta das geometrias não-euclideanas). Por outro lado, as críticas também acabaram tendo uma consequência negativa: suspeitos de engendrarem demonstrações falaciosas devido ao seu apelo intuitivo, os diagramas passaram cada vez mais a serem vistos como externos ao processo demonstrativo propriamente dito. Com isso, mutilou-se uma parte importante do simbolismo da geometria euclideana em nome de um maior rigor nas demonstrações. E, quando a geometria euclideana já não podia mais ser tomada como exemplo de ciência dedutiva rigorosa, Hilbert propôs a reconstrução formal da mesma, ou seja, uma versão na qual os diagramas e quaisquer apelos intuitivos não eram necessários para o sucesso das demonstrações. Em que medida a versão hilbertiana faz justiça ou mesmo melhora o original é um assunto que será discutido adiante, quando for apresentada uma descrição mais detalhada do sistema de Hilbert. Antes disso serão apresentadas apenas as críticas à obra de Euclides e os desenvolvimentos por elas fomentados.

Alguns dos aspectos do sistema euclideano que ensejaram a sua reconstrução formal já tinham sido alvo de críticas desde seu surgimento. Pontos problemáticos eram apontados em todas as partes dos *Elementos*, das definições às proposições demonstradas. Nestas, muitos dos problemas já eram vistos como oriundos das suas partes diagramáticas. Como se pretende mostrar, no entanto, geralmente as primeiras críticas dirigidas aos *Elementos* estavam relacionadas não tanto ao uso de figuras quanto ao modo como era apresentado seu conteúdo (escolha de princípios, ordem de apresentação, etc.). Embora as primeiras objeções aos *Elementos* também possam ser classificadas como dirigidas ao rigor da axiomática euclidiana, já que apontam para possíveis falhas que ela apresentava, não se pode equipará-las às objeções formuladas pelos autores modernos. Isto se deve ao fato de que as críticas modernas, em geral, partem do pressuposto de que a linguagem matemática deve prescindir de elementos gráficos. Assim, a maioria dos seus alvos está direta ou indiretamente vinculada com o uso de diagramas por parte de Euclides.

Talvez o uso de uma linguagem mista, textual e diagramática ao mesmo tempo, estivesse tão arraigado na atividade matemática grega que dificilmente sua legitimidade seria questionada pelos contemporâneos de Euclides e pelos primeiros comentadores de sua obra – mesmo que alguns séculos separem uns dos outros. De acordo com Netz, em Platão e Aristóteles é possível encontrar passagens sugestivas a respeito do quanto os diagramas eram intrínsecos à atividade do geômetra – tanto que o termo *diagramma* é utilizado por ambos como referindo-se tanto às demonstrações quanto ao rigor peculiares da atividade matemática, mas nunca como referindo-se a uma figura particular[1]. Embora sempre deixem claro que as demonstrações dizem respeito a verdades geométricas, e não ao diagrama particular, ambos vêem neste o meio indispensável pelo qual o geômetra chega àquelas verdades[2]. E, mesmo que matemáticos como Arquimedes e Apolônio tenham feito a matemática avançar em termos de métodos e resultados com relação ao período clássico, no que diz respeito a sua prática, a geometria não deve ter se desviado muito daquela observada em Euclides. Além disso, muito embora as edições e comentários do texto euclideano tenham sido feitas muitos séculos depois dele, sabe-se que a matemática não tinha se modificado muito neste ínterim.

O surgimento de novos métodos em geometria, no começo da era moderna, somado a uma mudança de concepção a respeito do objeto das teorias matemáticas, fizeram com que a linguagem mista da geometria clássica perdesse credibilidade. Assim, as críticas tardias assumem um caráter diferente daquele que se observa nas primeiras. Embora as incorporem, as críticas modernas às demonstrações de Euclides vão além ao rebaixá-las a meros esboços do que seriam verdadeiras demonstrações.

Para manter a forma de apresentação do capítulo anterior, as críticas aos *Elementos* serão apresentadas em duas etapas: primeiro serão apresentadas as críticas antigas aos princípios escolhidos por Euclides, bem como as críticas às demonstrações das proposições; em seguida será a vez das críticas modernas a estes tópicos serem analisadas.

[1] Netz 1999, pp. 35-38.

[2] Cf. Knorr 1975, pp. 71-74.

3.2.1.
As primeiras críticas

A escolha das definições, postulados e noções comuns, como seria de se esperar, já deve ter suscitado os primeiros descontentamentos com os *Elementos*. Como já foi dito anteriormente, é provável que a escolha dos princípios (e também o modo como foram formulados) deva-se ao próprio Euclides, e assim, é provável também que ele tenha alterado alguns aspectos das apresentações tradicionais, de modo a adequá-los aos princípios e fins por ele escolhidos. Obviamente, por mais adequadas que fossem, as escolhas de Euclides não seriam aclamadas por todos nem mesmo em sua época. O paralelismo, por exemplo, é apontado por Aristóteles como um tema a respeito do qual não havia um consenso, de modo que seria de se esperar alguma polêmica[3]. Os primeiros comentadores dos *Elementos*, também foram os primeiros a fazer o papel de críticos. Nos comentários escritos por matemáticos como Heron, Porfírio, Pappus, Simplício, Proclo e Apolônio, bem como nas edições de Theon de Alexandria, já se encontram sugestões de correções ou melhoramentos em determinados detalhes da obra. Veja-se a seguir algumas das principais objeções.

As definições dos termos básicos utilizados nas demonstrações dos *Elementos*, tais como ponto, linha, e superfície, foram no princípio criticadas em virtude de sua formulação[4]. Suas definições (Defs. 1, 2 e 5) fornecem uma caracterização meramente negativa do que está sendo definido. Por isso, a Def. 1, por exemplo, poderia ser adequada a coisas distintas, não servindo como uma boa caracterização. Proclo argumenta, em defesa de Euclides, que a definição é suficiente na medida em que apenas um dos elementos utilizados na obra cai sob ela. Quanto ao caráter negativo das referidas definições, seu argumento é o de que as definições negativas são adequadas quando se trata da caracterização dos princípios primeiros de uma ciência. Simplício, por seu turno, diz que o caráter negativo das definições se deve ao fato de Euclides proceder por decomposição de uma noção mais complexa: dos corpos às superfícies; das superfícies às linhas; e finalmente das linhas aos pontos. Os primeiros possuem

---

[3] Cf. Heath 1956, pp. 155-194.

[4] Será utilizada aqui a tradução de Heath (Heath 1956) como fonte para a descrição dos comentários e críticas aos *Elementos*.

todas as três dimensões; as segundas, apenas duas; as terceiras, apenas uma; e finalmente, os pontos não possuiriam nenhuma delas[5].

De acordo com Proclo, a Def. 3, que diz serem pontos as extremidades de uma linha, não se aplicaria a todas as linhas usadas por Euclides. Afinal, tanto as retas tomadas como indefinidamente prolongadas quanto os círculos não possuem extremidades. Sua sugestão para enquadrar tais casos à definição é a de que se devem considerar tais linhas desde duas perspectivas distintas: uma em que elas são consideradas enquanto sendo produzidas (caso em que possuiriam extremidades), e outra em que elas são consideradas como uma totalidade dada. De acordo com Heath, Proclo não iria tão longe se Euclides tivesse estabelecido que a divisão de uma linha, ou a intersecção entre duas linhas também determinam pontos, pois isto introduziria a possibilidade de serem utilizados pontos sobre qualquer parte de uma linha dada. Ambos os pontos de vista, entretanto, parecem não atentar para o fato de que Euclides chega até mesmo a usar, sem nenhuma justificativa aparente, pontos arbitrários sobre retas dadas, como em I,5, por exemplo.

As definições de reta (Def. 4) e de plano (Def. 7), cujo emprego da expressão “está posta por igual” torna difícil a sua compreensão, parecem ser tentativas por parte de Euclides de oferecer versões mais abstratas que as definições correntes, provenientes da escola platônica, de acordo com as retas e planos são, respectivamente, linhas e superfícies cujas extremidades cobrem os meios. Em seu comentário, Heron sugere definições alternativas que incluem expressões do tipo “esticada ao máximo”, ou “todas suas partes se ajustam às outras da mesma maneira”.

Na definição de ângulo (Def. 8) observa-se outra inovação de Euclides. Ao defini-lo como inclinação entre duas linhas, Euclides cria uma alternativa a definições como a de Aristóteles, na qual o ângulo é definido como uma linha quebrada. Não obstante este fato, a expressão “e não estão postas sobre uma reta” parece estar deslocada, dado que não é feita nenhuma restrição quanto ao tipo de linhas que podem formar ângulos – a melhor ocasião para usar esta expressão seria na de ângulo retilíneo. De acordo com uma sugestão de Heron, deve-se entendê-la como estipulando que as linhas não devem ser contínuas.

---

[5] Este ponto de vista, diga-se de passagem, combinaria com a sugestão apresentada no capítulo anterior, de acordo com a qual é mais fácil entender a estrutura do Livro I dos *Elementos* começando pelas últimas proposições e voltando aos princípios a que elas se reduzem.

Esta formulação, no entanto, envolveria noções pouco abstratas, como “quebrar” uma linha (que a destituiria do caráter contínuo). No entanto, a definição de Euclides parece necessitar mesmo de um ajuste. A referida expressão poderia migrar para a definição seguinte, e ser substituída na original pela restrição de que as linhas não sejam coincidentes.

Sobre a classificação dos tipos de ângulo retilíneo (Defs. 10, 11 e 12), Proclo observa que a de ângulo agudo é vaga, pois dizer apenas que ele é o ângulo menor que o ângulo reto permite que ele também se aplique aos ângulos formados por uma reta e um semicírculo ou da circunferência de um círculo com a tangente. Deve-se observar, no entanto, que como a definição de ângulo retilíneo menciona apenas linhas retas, as definições dela derivadas devem ser entendidas também em relação a linhas retas.

Como seria de se esperar, a Def. 23, de paralelas, também gerou muitos comentários e críticas. A par da formulação de Euclides, que não menciona distância entre as duas retas, havia a formulação alternativa que usava esta noção: paralelas são retas que, estando no mesmo plano, permanecem sempre â mesma distância uma da outra. Por esta característica, esta teoria de paralelas é denominada por Heath de teoria da *equidistância*. Além desta, havia a teoria da *direção*, de acordo com a qual retas paralelas são aquelas que formam ângulos iguais com uma transversal. Tais alternativas, no entanto, requerem para seu desenvolvimento apropriado ou a própria noção de paralelismo, ou um postulado de caráter muito mais complexo que o quinto postulado euclideano.

Como se pode notar, as criticas antigas às definições geralmente dizem respeito ao modo como seus conteúdos são apresentados, e não raro são equivocadas. Assim, as alternativas oferecidas, em geral, não são mais do que modos diferentes de expressar os mesmos fatos que aparentemente eram de domínio comum na época.

O próximo grupo de princípios, os postulados, também recebeu sugestões de melhoramentos por parte dos primeiros comentadores. Proclo e Simplício apresentam demonstrações para certas assunções deixadas implícitas por Euclides, como da unicidade da reta entre dois pontos (Post. 1) ou de suas extensões (Post. 2). Suas demonstrações, no entanto, são baseadas em fatos que só o diagrama pode mostrar, e deste modo não apresentam nenhuma vantagem com relação à omissão das mesmas.

Apesar de usar uma noção não-definida, a saber, a de “distância”, o Post. 3 não parece ter suscitado controvérsias. A palavra em questão, de acordo com Heath, aparece pelo fato de não haver então uma palavra equivalente a “raio”, pelo que a formulação do postulado não deve ter soado estranha. Além do mais, palavras não definidas abundam nos postulados, como foi observado no capítulo anterior – muito embora "distância" seja a única de caráter geométrico a não possuir definição.

Já com relação ao Post. 4, como seria de se esperar, as inquietações suscitadas são muitas. Proclo relata sugestões de mudança de classificação do mesmo, passando de postulado a noção comum, já que ele não está formulado de modo a ser interpretado como uma construção permitida no sistema, tal como acontece com os demais. Além de comentários deste tipo, também não faltaram tentativas de demonstrar o postulado ou de mostrar seus pontos fracos por meio de contra-exemplos.

Mas nenhum dos postulados ou quaisquer outros elementos da obra foram origem de tanta polêmica quanto o quinto postulado. Como foi dito acima, Aristóteles já apontava, em seu tempo, a teoria das paralelas como carente de um tratamento verdadeiramente científico. E Euclides, que viveu logo depois de Aristóteles, deve de fato ter sido o primeiro a aceitar a impossibilidade de se demonstrar o paralelismo a partir das noções geométricas mais básicas tais como aquelas representadas pelos três primeiros postulados. Isto é manifesto pelo fato de ele ter estabelecido, como postulado, que sob determinadas condições duas retas devem se encontrar, e não o contrário. Com efeito, a maneira como o postulado é formulado indica o quanto o paralelismo deve ter sido um assunto delicado para os gregos. Chega a ser impróprio chamar o Post. 5 de "postulado das paralelas", uma vez que na sua formulação a palavra "paralela" não é mencionada.

Com relação às noções comuns, sabe-se, através de Proclo, que Apolônio tentou oferecer provas para as mesmas. Esta atitude, no entanto, vai de encontro ao que o próprio Aristóteles sugerira na descrição de uma estrutura axiomática. Nesta, certos princípios devem ser tais que sua verdade seja indubitável, de modo que uma tentativa de prová-los seria inútil. Também pelas palavras de Proclo se sabe que Heron propôs um conjunto reduzido, com apenas três noções comuns, deixando de lado as duas últimas (que estipulam a igualdade dos coincidentes e a inclusão própria da parte no todo[6]). O fato de que

---

[6] Quando se considera que os diagramas são utilizados em Euclides de maneira tal que algumas obviedades são deixadas implícitas no texto (como será mostrado no último capítulo), de fato pode-se suspeitar da legitimidade das noções comuns

as últimas noções comuns tenham sido consideradas deslocadas é evidenciado pelas sugestões de que o quarto postulado deveria migrar para o grupo de noções comuns: as últimas noções comuns, de fato, não parecem ser princípios comuns a todas as ciências, uma vez que empregam uma terminologia cuja natureza parece ser geométrica (vejam-se as palavras “coincidir”, ou “ser maior” – tomadas com relação a figuras no plano). Todavia, há algo no quarto postulado que o diferencia até mesmo destas noções comuns, a saber, ele não estabelece algo óbvio, capaz de ser percebido pela contemplação dos diagramas.

Por outro lado, houveram também os que sugeriram um aumento do número de noções comuns. Muitas das sugestões eram formas de tornar textual fatos que os diagramas deixam subentendidos. Assim, vê-se sugestões do tipo “O todo é igual à soma de suas partes”, ou “Duas linhas retas não encerram espaço”. Tais noções comuns apócrifas, no entanto, se assemelham bastante às N. C. 4-5. Esta semelhança faz com que Heath sugira que talvez o número menor de noções comuns, sugerito por Heron, faça mais justiça ao que seria a escolha de Euclides. “O todo é maior que a parte”, de acordo com a visão de Heath, poderia ter sido uma interpolação de algum editor com vistas a dar respaldo a expressões como “o menor igual ao maior, o que é absurdo”, que aparecem pela primeira vez em I,6 e que contradizem relações mereológicas nos diagramas das provas por absurdo. Do mesmo modo, “Coisas que coincidem (ou se ajustam) são iguais” respaldaria o método de superposição em I,4. De fato, pode-se dizer ao menos que, com a utilização dos diagramas, tais noções comuns soam como tantas outras sugestões que visam tornar textual o que é mostrado apenas no diagrama, como que dois segmentos de reta distintos não podem ter mais que um ponto em comum.

As objeções às proposições demonstradas, diga-se de passagem, baseiam-se em larga medida na ausência de princípios como estes no grupo escolhido por Euclides. A primeira proposição é, sem dúvida, o exemplar favorito dos que argumentam que as demonstrações euclideanas carecem de rigor completo. Seria necessário assumir, de acordo com críticos de todas as épocas, algo como que duas retas não possuem um segmento em comum, ou então que dois círculos distintos podem possuir no máximo dois pontos em comum, ou ainda um princípio de continuidade que assegurasse que as duas circunferências possuem em comum os pontos que o diagrama sugere. Por isso,

---

mencionadas. Que coisas coincidentes sejam iguais, e que o todo seja maior que suas partes, são fatos que o diagrama por si só pode mostrar sem margem para erro.

a primeira proposição demonstrada nos *Elementos* é tida como deficiente.

Proclo oferece, em seu comentário a esta proposição, construções de triângulos isósceles e escalenos. Tais construções, todavia, não possuem nenhuma utilidade nas demonstrações seguintes, e muito provavelmente foi em virtude desta inutilidade que não foram incorporadas por Euclides às proposições demonstradas. Proclo, no entanto, vê nas demonstrações alternativas ou complementares um bom motivo para o exercício de aplicação dos princípios. Assim, dá várias demonstrações para diferentes casos possíveis (em termos de configuração inicial do diagrama) das proposições I,2 e I,3.

A proposição I,4, apesar de peculiar por introduzir o método de superposição e também por utilizar apenas noções comuns, não recebeu dos primeiros comentadores a atenção que mais tarde lhe seria devotada. Heath observa que mesmo Proclo não dá muita atenção ao que seria uma formulação conversa da quarta noção comum, quando Euclides assume no começo da prova que os segmentos sobrepostos aos segmentos dados devem coincidir por serem iguais. Com efeito, do fato de serem coincidentes pode-se concluir que são iguais, mas do fato de serem iguais não se segue que devem coincidir – novamente, algo que deve ter passado despercebido por conta da confiança nos diagramas como fontes de informação. Do mesmo modo, passou despercebida a construção de I,6, que acaba por contradizer as atribuições feitas na parte textual da demonstração – o que revela uma certa naturalidade com relação e este tipo de demonstração. Os comentários às demonstrações restantes não apresentam diferenças significativas com relação aos primeiros – em geral, eles apresentam casos desconsiderados por Euclides, servindo mais como uma expansão do que como uma tentativa de correção do sistema. É importante lembrar apenas que alguns acréscimos podem ter sido feitos ao corpo de proposições demonstradas – de modo a ressaltar textualmente fatos que deveriam ser apresentados diretamente pelo diagrama. Tais modificações, no entanto, não seriam relevantes a ponto de interferir na organização das demonstrações.

Em resumo, por conta de discrepâncias e desacordo com relação à formulação de alguns princípios e à execução de algumas demonstrações, Theon de Alexandria, o primeiro a reeditar o texto euclideano, alterou muito do seu conteúdo com vistas a torná-lo mais claro. Por isso, acrescentou princípios, proposições, e estendeu as demonstrações para casos desconsiderados por

Euclides[7]. As alterações, no entanto, podem ser vistas como frutos de divergências quanto ao conteúdo da obra, mas nunca com relação à confiabilidade dos métodos utilizados. O uso de diagramas, até então, era visto como uma característica peculiar da prática geométrica, e não como algo a ser evitado.

[7] Cf. Heath 1921, pp. 357-364.

3.2.2.
As críticas modernas

Se no início as sugestões de alterações dos *Elementos* diziam respeito a maneiras diferentes de se apresentar o mesmo conteúdo, com as transformações sofridas pela matemática ao longo do tempo as críticas vão sendo dirigidas a outros alvos. O método axiomático, embora continuasse em essência o mesmo que se vê em Euclides (com um conjunto de princípios simples, estabelecidos de antemão, e a partir dos quais se derivam os resultados mais complexos), ganhou um caráter mais abstrato, como foi dito acima. Isto implicava que princípios mais básicos, que em Euclides eram explicados em termos intuitivos com vistas a delimitar o tema tratado, deveriam também tornar-se explícitos com vistas a tornar as inferências dependentes exclusivamente daquilo que é estabelecido explicitamente como princípio. Como em Euclides até mesmo os termos mais básicos eram definidos (talvez por motivos impostos pelo próprio uso dos diagramas), suas definições passam então a serem vistas como não-matemáticas, ou simplesmente inúteis. Os conceitos utilizados para as primeiras definições (tais como parte, comprimento e largura) não parecem ser de cunho técnico ou específico, e não são usados alhures a exemplo dos termos que eles definem (ponto e linha), os quais comparecem nas definições posteriores. A maneira aparentemente informal, visual, como são introduzidos os primeiros conceitos faz com que as primeiras definições soem desnecessárias, já que, desde um ponto de vista moderno, "ponto" e "linha" deveriam ser tomados como noções primitivas, dispensando definição.

Esta é a visão dos que propuseram reconstruções da sistemática euclideana, tais como Pasch e Hilbert[8], e que perduraram ao longo de quase todo o século XX. Muito provavelmente influenciado por pontos de vista desta natureza, Kline alega, em sua apresentação da axiomática euclideana, que por definirem os termos por meio de outros que de não serão utilizados, as primeiras definições "não servem a nenhum propósito lógico"[9]. A definição de ponto vista acima recorre à noção de "parte", mais exatamente atribuindo a pontos a ausência de partes. Isto implicaria que os pontos não podem ser decompostos em unidades menores – diferentemente, por exemplo, das retas, que por

[8] Greenberg 1972, p. 12, cita outros nomes que se engajaram em projetos desta natureza, a saber, Peano, Pieri, Veronese, Veblen, Robinson, Huntington e Forder.

[9] Kline 1972, p. 59.

definição possuem comprimento e podem ser divididas. Sua função no diagrama, assim, fica reduzida apenas a marcar determinadas posições. Kline reclama que uma tal tentativa de salvar a definição euclidiana seria frustrada, pois ficar-se-ia devendo uma definição de “posição”[10].

Na visão de autores como Kline e Greenberg[11], por exemplo, definições como as de reta e plano recorrem a conceitos com certo apelo sensível, cuja utilidade diz respeito apenas a fins explanatórios – um expediente que nas teorias axiomáticas modernas é considerado desnecessário. Mas deve-se conceder que Euclides parece tentar uma formulação mais abstrata das definições usadas pelos platônicos, por exemplo. E, embora ainda haja uma semelhança com aquelas, as definições euclideanas parecem depender menos da imaginação de uma manipulação empírica do seu objeto – afinal, para que as extremidades cubram os meios de retas e planos é necessário que tais objetos sejam *vistos* desde uma delas. Por tratarem de idéias primitivas, e como tais não sujeitas à análise nas teorias axiomáticas modernas, as definições que se queira dar a termos como “ponto”, “linha” e “reta” soarão como meras explanações informais do significado destes termos. Com relação as definições mais avançadas do Livro I, alega-se que não há razão para a inclusão de definições como as de “rombo” ou de “trapézio”, já que estes termos não são utilizados na obra. Também são desnecessárias, sob esta perspectiva, as próprias definições gerais de linha e ângulo, uma vez que apenas as linhas retas e os ângulos retilíneos são utilizados na obra.

No que diz respeito aos três primeiros postulados, reclama-se a ausência de uma cláusula de unicidade para as entidades introduzidas por eles. Nas versões modernas, os postulados aparecem como afirmações de existência e de unicidade dos elementos introduzidos (em lugar de “(...) traçar uma reta (...)” lê-se “Existe e é única a reta (...)”. O quarto postulado, por sua vez, é geralmente derivado como teorema em teorias como a de Hilbert, sendo seu caráter peculiar e as consequências de sua introdução como princípio simplesmente ignorados pelos críticos modernos. Já as polêmicas envolvendo o quinto postulado, como será visto adiante, perpassam toda a história dos *Elementos*, desde sua primeira aparição até sua reconstrução formal. Por ora, cabem alguns comentários a respeito de sua versão mais usual.

[10] Cf. Kline 1953, p. 41.

[11] Cf. Greenberg 1972, p. 10.

A versão utilizada na modernidade, aliás, é diferente da formulação de Euclides, de maneira tal que o referido caráter construtivo do postulado euclideano pode ser colocado em risco uma vez que ele seja interpretado como versando sobre paralelas – noção que introduz elementos de caráter suspeito desde um ponto de vista finitário. Com efeito, a versão mais adotada do Post. 5, e que pode com mais justiça ser chamada "Postulado das Paralelas" é aquela apresentada por John Playfair em sua apresentação da geometria euclideana, no século XVIII – mas cuja formulação já é aludida no comentário de Proclo. Nesta formulação, o tema não são retas que se intersectam, mas sim paralelas:

> *Postulado das Paralelas (Playfair-1795): Por um ponto externo a uma reta dada passa apenas uma paralela.*

A versão de Playfair é tida como mais simples que a de Euclides, talvez justamente por não implicar nenhuma relação univocamente determinada entre o ângulo reto e o paralelismo – já que, em geometrias alternativas, como será visto no segundo capítulo, nem sempre eles estão vinculados. Não obstante, a despeito da aparente vantagem aos olhos dos estudiosos modernos, esta versão não pode ser facilmente assimilada ao postulado euclideano. Em primeiro lugar, ela muda o caráter do postulado – de construtivo para teorético. Além disso, ele introduz a paralela como sendo única, sendo que nos *Elementos* sua unicidade é demonstrada em I,29-30. Mas, talvez o aspecto mais prejudicial para a compreensão do espírito da obra de Euclides é a subtração da importância do diagrama (isto é, da construção que ele representa) na aplicação do postulado. E mesmo que se aponte para o quarto postulado como um exemplo semelhante (por não ser construtivo), isto não seria suficiente, pois mesmo que não introduza uma construção, e portanto um modo de se produzir o diagrama, o Post. 4 introduz uma regra importante para a sua leitura[12] – fundamental para a derivação dos teoremas. Assim, em vez de uma geometria construída a partir de diagramas básicos, o postulado de Playfair cria uma geometria de caráter mais teórico e menos algorítmico, para a qual valem resultados que não necessitam, em última instância, recorrer a construções ou leitura do diagrama.

Do grupo de noções comuns, a mais criticada é a quarta, que de acordo com a visão dos comentadores modernos teria sido introduzida com vistas a

---

[12] Afinal, tomado em conjunção com a Def. 10 (de ângulo reto e perpendicular), o postulado estabelece que a perpendicularidade de duas retas implica que os ângulos que elas formam uma com a outra são todos iguais – o que é bastante relevante do ponto de vista diagramático.

assegurar a legitimidade do método de superposição. Além disso, a coincidência é tida como uma noção vaga que só pode ser entendida em relação com alguma forma de experiência sensível. As primeiras noções comuns não parecem apresentar problemas, uma vez que se assemelham às leis lógicas para a noção de igualdade nas teorias axiomáticas modernas.

Se os princípios foram o principal alvo das primeiras críticas aos *Elementos* – geralmente por questões de gosto, por assim dizer –, foram as proposições demonstradas que passaram a receber mais críticas com o passar do tempo. Com as proposições demonstradas, mais especificamente com a entrada dos diagramas nas demonstrações, se delineiam de maneira mais marcante as diferenças entre as críticas formuladas pelos contemporâneos de Euclides e seus primeiros sucessores, por um lado, e aquelas formuladas nos tempos modernos, sobretudo no século XIX e até pelo menos a primeira metade do século XX.

Com o diagrama fora de cena, os princípios escolhidos por Euclides tornam-se de fato insuficientes para a demonstração das proposições. E sem o aspecto dinâmico apresentado pela geometria de Euclides, as proposições envolvendo transporte ou manipulação de figuras ficam deslocadas nas reconstruções modernas. Deste modo, reclama-se, por um lado, da inexistência de princípios que regulamentem determinados passos da demonstração cuja justificação só pode vir pela contemplação do diagrama; e por outro, são consideradas suspeitas, ou simplesmente ignoradas, as proposições que envolvem transporte ou qualquer outro tipo de manipulação das entidades sobre as quais versa a demonstração. Veja-se a seguir algumas das críticas mais comuns que são dirigidas aos *Elementos* com base nas referidas transformações.

Kline, em *Mathematical Thought – From Ancient to Modern Times*, oferece na descrição do declínio da matemática grega uma boa síntese das fontes de descontentamento com a obra de Euclides na modernidade[13]. Em suma, as queixas mais comuns envolvem: (i) a ausência de justificação para a determinação de pontos por meio da intersecção de linhas no diagrama; (ii) a falta de generalidade que a escolha de uma configuração diagramática pode ocasionar; (iii) o uso do método de superposição; (iv) a falta de um tratamento adequado para casos envolvendo a noção de infinito; e (v) as limitações impostas pela escolha da construtibilidade como critério de existência e pela

[13] Kline 1972, pp. 171-182.

restrição às linhas planares para a solução dos problemas.

Um exemplo que cai sob o item (i) é dado pela própria proposição I,1. Quer por sua posição privilegiada, quer pela relativa simplicidade com que é apresentada, a proposição tornou-se alvo fácil para a identificação de falhas no sistema euclideano ocasionadas pela confiança excessiva nos diagramas. Como já bem se sabe, não há nada que assegure a existência do ponto C, uma vez que não ficou estabelecido que dois círculos realmente se intersectam quando são executadas as construções requeridas. Seria necessário, a fim de livrar a demonstração de sua dependência do diagrama, uma cláusula que estabelecesse que os dois círculos gerados a partir daquele segmento se intersectam em dois, e apenas dois, pontos distintos, ou a suposição da continuidade da reta. Em I,2, de modo semelhante, nada asseguraria a existência dos pontos de intersecção entre as extensões das pernas do triângulo equilátero e os círculos, muito embora elas sejam os raios dos mesmos. Em ambos os casos, falta um princípio que estabeleça que os círculos ou as retas, que passam a ser vistos como "coleções de pontos"[14], possuam a propriedade de serem contínuos, pois assim estaria assegurado que elas possuem um elemento em comum quando se cruzam.

Em I,2 manifesta-se também um aspecto mencionado no item (ii). Demonstra-se o transporte de segmentos apenas para a configuração particular, mas falta um passo que assegure que o método se aplica ao transporte de qualquer segmento a qualquer ponto do plano. Do ponto de vista moderno, a mera repetição do enunciado de maneira geral na *protasis*, seguida da sua repetição para um caso particular na exposição (*ekthesis*) e na especificação (*diorismos*), e de uma retomada em forma de síntese da demonstração na conclusão (*sumperasma*), não é suficiente para assegurar generalidade – como sugere Mueller em sua interpretação do Livro I[15]. Mesmo em obras inseridas num contexto de reinterpretação da obra de Euclides com vistas a livrá-la de mal-entendidos, é possível encontrar críticas semelhantes a esta. Beeson, em seu sistema construtivo para a reprodução da geometria euclideana[16], alega que esta proposição constitui um entrave do ponto de vista construtivo, uma vez que pressupõe que o ponto A deva ser diferente dos pontos B e C (cuja tradução

---

[14] Kline 1972, p. 88.

[15] Mueller 1981, p. 13. Este tópico será retomado no segundo capítulo, quando forem apresentadas as defesas a este tipo de crítica.

[16] Beeson 2009a e 2009b.

formal introduz uma disjunção, de acordo com o autor, em função da possibilidade de casos distintos – A≠B ou A≠C).

O método de superposição (iii), empregado pela primeira vez em I,4, talvez seja uma das deficiências mais apontadas no sistema euclideano. Chega a ser um consenso entre os comentadores que Euclides evita ao máximo utilizar o método, o que reforçaria a tese a respeito da inadequação do mesmo. Kline apresenta duas objeções ao método de superposição, cujo único fundamento seria a N. C. 4: por um lado, não há base lógica para que se utilize a noção de movimento, e por outro, deve-se pressupor que as figuras mantêm suas propriedades espaciais quando movidas de uma posição a outra[17]. Em geral, a superposição dependeria de fortes pressupostos a respeito do espaço físico. Outro autor a criticar o método de superposição nesta mesma base é Russell. Ele vê no uso da superposição – que ele também alega ser fisicamente necessária em Euclides – um artifício desnecessário pelo fato de ser desprovido de significância matemática[18].

As objeções dos itens (iv) e (v) são dirigidas por Kline à matemática grega como um todo, mas atingem diretamente as escolhas metodológicas de Euclides. De acordo com (iv), a matemática grega não foi mais próspera porque evitou utilizar o conceito de infinito, quer em termos de infinitamente grande ou pequeno, quer em termos de processos infinitos. Por conta disso, de acordo com Kline, Euclides formula o Post. 5 referindo-se a duas retas que se encontram em um ponto, e não como duas paralelas dadas em sua infinitude. Do mesmo modo, considera os segmentos de linha prolongáveis tanto quanto necessário, mas não os considera como totalidades infinitas dadas. Mas o maior dano causado por esta restrição ao horizonte do finito está na impossibilidade de resolução de alguns dos problemas mais caros aos gregos, a saber, o cálculo de áreas limitadas por curvas e de volumes contidos por superfícies quaisquer. O método de exaustão, de Eudoxo, envolvia uma aproximação contínua da área ou volume desconhecidos por meio de outras já conhecidas, mas a resolução da tarefa envolve uma operação infinitária. Além disso, como as figuras impunham aos gregos um modelo qualitativo e não quantitativo de geometria, o que se sabia fazer era traduzir a área desconhecida em termos da área de uma figura dada, mas numericamente também desconhecida. Por estas razões, tais problemas só encontrariam solução após a invenção do cálculo, por Newton e Leibniz.

---

[17] Kline 1972, p. 87.

[18] Cf. Heath 1956, p. 227.

Associado a esta limitação da geometria grega está a restrição da noção de existência ao âmbito do que é construtível com o uso de retas e círculos (v)[19]. Por causa desta restrição com relação aos meios autorizados nas demonstrações, outro grupo importante de problemas permaneceu sem solução, a saber, a quadratura do círculo, a trissecção de um ângulo e a duplicação de um cubo. Como, na visão de Kline, tal critério de existência é demasiado limitado nos *Elementos*, a matemática era obrigada a deixar de lado descrições de propriedades geométricas importantes.

Por conta disso, do mesmo modo que os postulados formulados em linguagem normativa sofreram modificações em suas versões modernas, também as proposições classificadas como *problemas* foram traduzidas em linguagem descritiva, de modo que nas reconstruções modernas dos *Elementos* há apenas *teoremas*. Numa geometria entendida como uma teoria a respeito de um domínio abstrato de entidades cuja existência é postulada, não há mais lugar para um procedimento passo a passo de se introduzir as entidades geométricas numa espécie de cenário físico – o qual, diga-se de passagem, foi talvez o motivo para que autores como Gauss considerassem a geometria uma ciência empírica. O que se observa nas teorias axiomáticas modernas são caracterizações abstratas de entidades e relações, e um procedimento para que sejam derivadas consequências meramente lógicas destes pontos de partida.

A característica comum deste segundo grupo de críticas diz respeito à rejeição do recurso aos diagramas nas provas euclideanas. Tal rejeição deve-se a vários fatores, dentre os quais se destacam: 1) o sucesso da utilização dos métodos analíticos em geometria; 2) o surgimento de uma concepção de matemática independente de vínculos com verdade ou realidade – e consequentemente, com a intuição; e 3) o aumento da demanda por rigor e pureza dos métodos em matemática, ligado a uma visão depreciativa das representações diagramáticas com relação a este ideal. Como será visto no que

---

[19] Detlefsen menciona o caso de Wallis, no começo da modernidade, bem como de Bolzano, no séc. XIX, como críticos deste tipo de restrição. Ambos compartilham a visão segundo a qual as propriedades dos objetos geométricos *em si* devem ser independentes de suas construções – o que justificaria o primeiro a utilizar métodos algébricos para solução de problemas geométricos, e o segundo de livrar a análise da influência da geometria em suas demonstrações, as quais introduziam circularidade por ser a geometria menos geral que a análise, tida como a teoria *geral* da quantidade, em contraposição à teoria das quantidades *espaciais*, ou geometria (Detlefsen 2008, pp. 183-188).

segue, tais fatores formam parte do pano de fundo da reconstrução formal dos *Elementos*.

3.3.
Alguns fatores que desencadearam a reconstrução formal dos Elementos

De acordo com o que visto na seção anterior, a recepção da obra de Euclides na modernidade foi marcada por críticas que remontam, na maior parte das vezes, à utilização dos diagramas nas demonstrações. Apesar de as críticas anteriores não serem dirigidas especificamente a este ponto, o uso dos diagramas como meio de demonstração constituía mesmo antes de Euclides um assunto polêmico. Pelo menos desde Platão[20], o método utilizado pelos geômetras era criticado na medida em que dependia de construções de figuras, quando a demonstração propriamente dita versava sobre objetos ideais. Posteriormente, os requisitos aristotélicos com respeito a noção de demonstração, embora não fizessem nenhuma oposição explícita ao uso de diagramas (em geometria), deram origem, na transição para a modernidade, a uma concepção para a qual uma verdadeira demonstração deve fornecer a causa do resultado demonstrado. Por conta disso, muitas das demonstrações euclideanas, dentre as quais a da soma dos ângulos internos de um triângulo, passaram a ser vistas como inferiores porque recorriam a construções não relacionadas de maneira essencial com o objeto[21].

Os diagramas, contudo, continuavam sendo constitutivos da prática da geometria, dado que ela ainda era vista como a ciência do espaço, cuja natureza era descrita de maneira fiel pelos princípios euclideanos. E, muito embora se alertasse para o perigo de se considerar os diagramas *in concreto* durante a demonstração[22], o único método disponível para um geômetra grego era tomá-los *in abstrato*. Assim, uma demonstração não dizia respeito ao triângulo desenhado, mas sim ao triângulo *qua* figura plana de três lados.

No entanto, na modernidade, o desenvolvimento de novos métodos, somados à discussão ainda viva a respeito das demonstrações matemáticas, fizeram com que o papel dos diagramas como instrumentos de prova fosse se

---

[20] Uma confrontação do ponto de vista platônico com o método empregado nos *Elementos* pode ser vista em Lassalle Casanave 2005.

[21] Cf. Mancosu 1996, pp. 10-15.

[22] Já em Arquimedes é possível identificar a preocupação em livrar as demonstrações de qualquer influência de meios que ele denomina “mecânicos” (cf. Detlefsen 2008, p. 181).

tornando cada vez mais supérfluo, quando não prejudicial e ilegítimo.

Serão descritos a seguir alguns dos desenvolvimentos em matemática que se relacionam direta ou indiretamente com a rejeição das representações diagramáticas em geometria. Serão analisados, nesta ordem, a geometria analítica, a geometria projetiva, as geometrias não-euclideanas e a crise de fundamentos na matemática do século XIX.

3.3.1. A geometria analítica

Se Mueller está correto ao afirmar que a história da matemática no século XIX é a história da substituição da geometria pela álgebra e pela análise[23], é possível dizer que o passo fundamental rumo a este desfecho foi dado alguns séculos antes, quando pela primeira vez se cogitou a possibilidade de se utilizar os métodos algébricos para solucionar problemas geométricos. Uma das realizações mais importante deste período foi justamente a combinação dos métodos geométricos utilizados desde os gregos com o instrumental simbólico da álgebra, desenvolvida no oriente. Tal combinação havia sido tentada primeiramente por François Vieta[24] (meados do século XVI), mas foi em 1637, com *La Géométrie*, de René Descartes, que os métodos da álgebra foram aplicados de maneira sistemática à geometria clássica[25].

A referida obra é composta de três livros. No primeiro, encontram-se soluções para problemas relativos a linhas planares. Uma vantagem do método faz-se notar logo de início: um problema proposto por Pappus e não-resolvido pelos gregos, que dizia respeito à construção de um ponto determinado relativo a quatro segmentos dados, mostrou-se solúvel pelo método cartesiano, sem utilização de elementos que extrapolassem o âmbito da construtibilidade por régua e compasso. Nos livros restantes, são tratadas questões concernentes à natureza das linhas, bem como a construção de sólidos e super-sólidos[26]. Descartes aplicou a noção de variável, da álgebra, ao método de mapeamento da geometria dos egípcios e babilônios para a resolução dos problemas da geometria clássica[27]. Deste modo, trouxe o número de volta à geometria, desfazendo o que Kline chama de "um passo atrás" dado pelos gregos com a

---

[23] Mueller 1981, p. 1.

[24] Vieta fora responsável pelo aprimoramento dos métodos da álgebra, que evoluíra de um modo quase informal de raciocínio, passando pela simbolização dos termos mais utilizados e culminando na utilização dos símbolos de maneira abstrata (Cf. Reid 1963, p. 61).

[25] Para uma descrição detalhada da referida obra, recomenda-se a leitura de Mancosu 1996 (pp. 65-91), a qual guiará a descrição do método cartesiano nos parágrafos seguintes deste trabalho.

[26] A geometria cartesiana, vale lembrar, possui ainda a vantagem de não necessitar restringir-se a três dimensões.

[27] Cf. Reid 1963, p. 67.

descoberta, pelos pitagóricos, das grandezas incomensuráveis: a substituição do número pela forma, ou seja, pela representação diagramática da reta (o que, como o próprio Kline reconhece, era uma manobra compreensível dada a ameaça que tal descoberta representava)[28].

De acordo com o próprio Descartes, qualquer problema em geometria pode ser reduzido a termos tais que o conhecimento do comprimento de algumas linhas é suficiente para a demonstração desejada. Fazendo menção ao trabalho de Mahoney, Mancosu sintetiza as principais características da metodologia algébrica que se instaurou na matemática do século XVII, e que foi adotada por Descartes em sua *Géométrie*: a adoção de um simbolismo operatório; uma ênfase maior nas relações entre os objetos do que nos objetos mesmos; e liberdade com relação a questões ontológicas[29].

Na interpretação que posteriormente tornou-se usual para a geometria cartesiana, o plano euclideano torna-se uma teia uniforme de pontos coordenados, definidos de modo unívoco por sua posição com relação a duas linhas perpendiculares cuja intersecção representa o marco zero do sistema, chamado "origem"[30]. Um ponto é representado por um par ordenado (x,y), que indica a sua posição com relação tanto ao eixo horizontal (x) quanto ao eixo vertical (y) do plano. Assim, o par ordenado (3,6), por exemplo, identifica o ponto que dista 3 unidades da origem no eixo horizontal, e 6 unidades da origem no eixo vertical.

Tal como acontecia nos *Elementos*, entre este ponto e qualquer outro diferente dele existirá uma reta. Tome-se o ponto origem, de coordenadas (0,0): entre ele e o ponto (3,6) haverá uma reta, que necessariamente passará pelos pontos (1,2) e (2,4). Isto não se deve mais ao ato de *traçar* que Euclides pedia que se concedesse no primeiro postulado, mas sim à operação aritmética que relaciona as duas coordenadas (neste caso, a multiplicação). Pode-se notar que nas coordenadas dos referidos pontos a posição y mantém uma relação constante com relação à posição x: o número na posição y é sempre o dobro do número na posição x. Assim sendo, é possível dizer que as coordenadas da reta em questão obedecem à regra $y = 2x$. E será esta equação, e não mais as letras que indicavam os pontos nos *Elementos* (como, por exemplo, AB), o que

[28] Kline 1953, p. 38.

[29] Mancosu 1996, p. 85.

[30] Por esta razão, o símbolo que indica o ponto em questão não é o zero, e sim a letra 'o'.

identificará esta reta. O círculo, que como a reta era ferramenta essencial para as construções da geometria euclideana, na geometria analítica é apenas mais uma linha, descrita por uma equação (a saber, $x^2 + y^2 = r^2$, onde r representa o raio da circunferência, ou seja, a distância entre o ponto que será o centro do círculo e qualquer ponto da circunferência). A linha reta e o círculo, ou a régua e o compasso, que por séculos determinaram o modo de se fazer geometria, foram substituídos por sequências lineares e ordenadas de símbolos abstratos, que a princípio não guardam nenhuma relação com seus denotados. Isto permitiu que problemas que representavam verdadeiros nós para os antigos – como a determinação da área sob uma curva qualquer, ou a de uma tangente a uma curva num ponto determinado – fossem atacados de maneira mais simples, e dessem origem a uma nova e poderosa ferramenta: o cálculo[31].

Uma vantagem do novo simbolismo fez-se notar logo de início: a possibilidade de se prolongar indefinidamente uma linha reta dada, que era postulada por Euclides, torna-se conseqüência do próprio "nome" da reta em Descartes. Nos *Elementos* a reta *AB* poderia ser prolongada até o ponto Γ desde que este ainda não estivesse em jogo na demonstração. Na *Géométrie*, por sua vez, o prolongamento da reta acima até o ponto (4,8) (ou (5,10), ou ainda (6,12), ou mesmo (124,248)) já está garantida desde o começo pela equação que a descreve. E se porventura este ponto já esteja sendo usado na demonstração, isto é, pertença também a alguma outra linha cuja equação esteja sendo também usada, tal coincidência não apenas não ameaça o andamento da demonstração, como pode ainda revelar-se útil para a mesma. A estratégia de Descartes se dividia em três etapas: primeiramente, supondo a solução do problema como dada, deve-se nomear as linhas que são julgadas necessárias para sua solução, ou seja, dar a cada elemento o maior número de caracterizações possível, já que será o equacionamento destas o que permitirá a descoberta das magnitudes daqueles elementos que ainda não são conhecidos. A seguir, as relações entre as magnitudes são expressas por meio de operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raiz). Se uma magnitude determinada pode ser expressa de duas maneiras diferentes, estas podem ser equacionadas. Por fim, usa-se a álgebra para solucionar as

---

[31] Para mais detalhes a respeito do cálculo integral e do cálculo diferencial, que foram métodos que surgiram em função das tentativas de se solucionar, respectivamente, os problemas mencionados, cf. Reid 1963, pp. 78-96; Kline 1980, pp. 127-138.

equações, e as magnitudes inicialmente desconhecidas passam a ser expressas em termos daquelas já conhecidas. Embora pouco intuitivo se comparado ao método euclideano, o novo método permite, por sua uniformidade, um procedimento mais objetivo, direto ao ponto que interessa. De acordo com Descartes, tal característica faltava ao método grego de se fazer geometria, pelo que talvez eles não tenham sido capazes de encontrar as soluções para determinados problemas, mesmo que, ao menos em princípio, isso estivesse ao seu alcance[32].

As demonstrações da geometria analítica, de um modo geral, exigem estratégias menos elaboradas, ou pelo menos não requerem alguma apreensão intuitiva do que está sendo demonstrado, para que se atinja o fim desejado. Tudo depende de um procedimento quase mecânico, um cálculo, que parte de dados relativos a determinados pares ordenados e equações, bem como da suposição de que a solução buscada é possível, e após um determinado número de passos apresentará o resultado desejado em termos numéricos, sejam eles unidades de comprimento, de área ou de volume[33].

Greaves aponta pelo menos duas vantagens do método cartesiano com relação ao método descritivo da geometria euclideana: 1) a uniformidade e a simplicidade notacional, bem como o alcance instrumental que tal simplicidade engendra, fizeram com que as construções da geometria analítica ficassem em geral mais simples do que as da geometria euclidiana; e 2) por serem gerais e independentes de configurações espaciais, as equações da geometria analítica fazem desaparecer a necessidade da consideração de casos distintos para diferentes configurações que as figuras poderiam assumir, no caso da geometria euclideana[34].

---

[32] Mancosu 1996, p. 68.

[33] O método cartesiano, vale lembrar, é adequado não apenas para operações geométricas em até três dimensões, mas também para um número arbitrário delas. Isto, no entanto, apesar de possível não era visto como algo dotado de sentido, uma vez que a geometria ainda estava fortemente vinculada ao estudo do espaço tal como o intuímos, ou seja, o espaço tridimensional.

[34] Cf. Greaves 2002, p. 37. É importante lembrar, todavia, que embora pudessem assumir diferentes configurações, Euclides não considera diferentes casos diagramáticos em suas demonstrações, levando a cabo apenas uma demonstração para cada problema ou teorema. Outro ponto sobre o qual cabe uma observação, relativo ao texto de Greaves, diz respeito à afirmação de que Euclides utilizaria diagramas marcados em suas demonstrações (com marcas para ângulos retos e para identificar congruências).

Mesmo que muitos tenham se oposto à adoção dos métodos algébricos, as alegadas vantagens do método prevaleceram, e fizeram com que fosse questionada pela primeira vez a posição da geometria como “a rainha das matemáticas”. A geometria projetiva, posteriormente, rivalizou com a geometria analítica, apontando justamente para a possibilidade de métodos ao mesmo tempo gerais e mecânicos em geometria sintética.

Isto, entretanto, é apenas uma conjetura da parte de Greaves, e como será visto no próximo capítulo, tudo indica que Euclides não se utilizava de tais recursos.

3.3.2.
A geometria projetiva

Apesar do sucesso do método cartesiano, a clareza intuitiva e a boa fundamentação lógica dos *Elementos* fazia com que alguns matemáticos ainda defendessem a adequação dos métodos sintéticos em geometria, dada a íntima relação entre estes métodos e os aspectos intuitivos relacionados ao tema da geometria, bem como as vantagens da geometria sintética sobre a analítica no que diz respeito à compreensão do tema tratado. Além disso, como observa Kline[35], a estrutura dedutiva da geometria possuía uma boa reputação devido à boa fundamentação lógica de seus métodos, dependente em larga medida da axiomatização presente nos *Elementos*, enquanto que a aritmética e a álgebra não passaram por uma estruturação axiomática daquele tipo, sendo antes um conjunto de técnicas para a resolução de problemas particulares[36]. E mesmo que fosse possível a tradução da maioria dos problemas destas disciplinas em termos geométricos, as "criaturas" oriundas das novas técnicas não eram vistas com bons olhos, muito embora se revelassem úteis para a solução de muitos problemas antes insolúveis (dentre tais criaturas, destacam-se os números negativos e complexos, e os espaços de mais de três dimensões)[37].

Além da reputação duvidosa, os métodos algébricos não se mostraram adequados para a representação de alguns resultados oriundos de um novo domínio onde as figuras desempenhavam um papel central, a saber, a assim chamada geometria projetiva, cujos princípios fundamentais se devem ao engenheiro e arquiteto Gérard Desargues (meados do século XVII). A geometria projetiva pode ser descrita como o estudo das figuras euclideanas tal como as

---

[35] Kline 1980, p. 125.

[36] Para uma comparação entre os estilos de raciocínio peculiares à geometria e à álgebra antigas, ver Høyrup 2005.

[37] A álgebra, aliás, era vista por Descartes como um mecanismo de análise para problemas geométricos (daí a nomenclatura "geometria analítica" para a geometria de Descartes), e não como um método independente em matemática. Álgebra e aritmética tornaram-se independentes da geometria somente por volta do final do séc. XVII, mas a proliferação de resultados sem uma fundamentação lógica adequada tal como a que a geometria possuía foi uma das causas da crise de fundamentos na matemática no século XIX. Para maiores detalhes sobre o período criativo que a liberdade dos procedimentos algébricos e aritméticos ocasionou, ver o sexto capítulo da obra de Kline supracitada.

vemos no espaço, uma vez que nasceu sob influência da adoção da perspectiva nas pinturas renascentistas. Nelas o plano bidimensional das telas era trabalhado de modo a representar o espaço tridimensional da realidade. Dito de outro modo, ela estudava as propriedades das figuras que permaneciam constantes quando estas eram projetadas sobre outras figuras (um quadrado, por exemplo, mudará muitos de seus aspectos se "desenhado" sobre uma esfera, embora preserve algumas características básicas).

A geometria projetiva inverteu a abordagem da geometria analítica. Na última partia-se dos princípios para as figuras, usando a álgebra como um modo de operar sobre eles para por fim retornar às figuras para a representação dos resultados a que se chegava. Na primeira, por sua vez, eram as figuras os pontos de partida, e as operações sobre estas é que seriam determinantes para a interpretação dos princípios. Deste modo, algumas alterações com relação aos princípios da geometria euclideana foram necessárias, como será visto adiante.

Se a ênfase na métrica que a aritmética e a álgebra lançaram sobre a geometria euclideana revelou-se útil para a solução de alguns problemas, pode-se dizer que foi este mesmo caráter que trouxe empecilhos para sua utilização na geometria projetiva, como sustentava Gergonne[38]. O *dictum* cartesiano sobre a suficiência do conhecimento do comprimento de algumas linhas para a solução dos problemas geométricos, com efeito, deixa de ser válido para situações em que a métrica cede lugar a uma espécie de topologia, ou seja, situações nas quais o que interessa são as posições relativas de umas figuras com relação a outras (situações em que a visualização parece imprescindível para a compreensão daquilo que está sendo tratado).

De acordo com a interpretação de Greaves, mesmo que os matemáticos envolvidos em restaurar a primazia dos métodos sintéticos sobre os analíticos não tenham tido sucesso, seus esforços ressaltaram dois pontos importantes: 1) que os diagramas podem ser tornados independentes de uma semântica, sem que com isso se perca o rigor demonstrativo, e 2) que operações gráficas sobre eles podem revelar-se tão gerais e mecânicas quanto as da álgebra[39]. Um dos problemas que a geometria projetiva tentava resolver dizia respeito à falta de generalidade do método sintético, onde a demonstração de cada teorema poderia requerer uma estratégia diferente – em álgebra, todavia, o método é uniforme: a execução repetida de transformações de fórmulas de acordo com

[38] Citado em Greaves 2002, p. 41.

[39] Greaves 2002, pp.41-42.

determinadas regras[40]. Pretendia-se criar para a geometria com diagramas um método geral como o da álgebra. Foi este o espírito que animou, já no século XIX, o trabalho de Poncelet, e que fez com que seu nome se tornasse um dos mais importantes da geometria projetiva.

Veja-se mais detalhadamente a estratégia de Poncelet para a eliminação das distinções de casos das demonstrações em geometria sintética. Considere-se o caso em que o diagrama de uma determinada demonstração apresente duas retas, AB e CD. Na geometria sintética clássica[41], duas situações são possíveis para a representação destas retas: ou elas se intersectam num ponto E, ou elas são paralelas, isto é, elas não se intersectam de todo. Sabe-se que, na geometria euclideana, a posição relativa do ponto de intersecção das retas, bem como o ângulo de inclinação entre elas (no caso de as retas serem concorrentes), são aspectos irrelevantes, uma vez que não podem contar como fontes de informação para a demonstração em curso[42]. No entanto, se são concorrentes, o diagrama deve apresentar seu ponto de intersecção E, e a prova vai valer para todas as variações possíveis nas posições das retas AB e CD e do ponto E. Todavia, não se poderá dizer que o resultado cobre o caso de paralelismo, visto que o diagrama explicitamente falha em representá-lo. Na geometria analítica, porém, apenas um procedimento cobre ambas configurações, uma vez que as equações das retas simplesmente não terão solução comum, no caso de paralelismo, ou possuirão uma e apenas uma solução comum, no caso de concorrência

---

[40] Como se pode notar pela descrição do Livro I dos *Elementos*, as proposições demonstradas convergem, por assim dizer, para as demonstrações finais, de modo que quase toda demonstração ali presente dependa da demonstração imediatamente anterior. O método algébrico, por sua vez, revelou-se mais fértil porque dispensava a necessidade de se ter sempre presente os significados dos termos com os quais se lidava, possibilitando um procedimento quase automático. Com isso, tornou-se possível alcançar resultados para além daqueles que seriam intuitivamente concebíveis – característica que se revelou de vital importância para os desenvolvimentos da geometria no século XIX.

[41] A denominação de “geometria sintética clássica” está sendo adotada aqui para que se evite atribuir à geometria euclideana propriamente dita (que está sendo entendida como parte daquela) procedimentos que não foram efetivamente usados nos *Elementos*, como por exemplo o tratamento de casos distintos.

[42] Mais detalhes sobre os aspectos do diagrama que podem ou que não podem ser utilizados nas demonstrações serão dados no capítulo seguinte do presente trabalho.

O objetivo de Poncelet era aumentar o poder do método sintético de modo que um diagrama apenas servisse para ambos os casos, tal como faziam as equações algébricas no método analítico. Assim, baseando-se no assim chamado princípio de continuidade[43], que ele próprio formulara, e tomando emprestada dos métodos algébricos a possibilidade de utilizar elementos para os quais não há interpretação intuitiva (no caso, os elementos imaginários da álgebra), Poncelet criou uma representação diagramática que englobava ambos os casos. Nesta, o ponto E jaz fora das retas, mas mesmo assim faz o papel de ponto de intersecção delas: ele é um ponto imaginário cuja posição está no infinito. Deste modo, tanto um diagrama de duas linhas que não se intersectam servirá para provar um resultado para casos de intersecção, quanto um diagrama de duas linhas concorrentes servirá para o caso de paralelismo – afinal, o ponto que aparece no diagrama é um elemento simbólico, utilizado para fins de demonstração, e que portanto pode ou não possuir uma referência. Tal como um diagrama para *reductio*, em Euclides, sua função é permitir determinados passos nas demonstrações.

De acordo com Greaves, a estratégia de Poncelet resultou numa mudança drástica com relação à interpretação dos diagramas geométricos e, consequentemente, ao alegado tema da geometria. Ao propor os diagramas como *signos complexos* sobre os quais uma determinada gama de variações é permitida sem prejuízo para a situação por eles representada, Poncelet ataca a tese tácita, mas presente na maior parte das críticas à falta de generalidade nas demonstrações euclideanas, segundo a qual há uma correspondência um-a-um entre os diagramas e seus denotados. Rompe-se, assim, com a visão da geometria como uma ciência a respeito de um domínio de entidades cujas propriedades básicas são intuitivamente asseguradas, e dos diagramas como meras ilustrações dos objetos da geometria. Os diagramas de Poncelet não são, como os da geometria Euclideana, figuras construtíveis com régua e compasso. Eles são antes símbolos abstratos, convencionais, e não candidatos naturais

[43] Em linhas gerais, este princípio estabelece que, se um diagrama satisfaz um conjunto de condições iniciais, um determinado conjunto de transformações em algumas de suas partes será tal que as propriedades que valiam para as condições iniciais do diagrama continuarão valendo para as suas versões modificadas. Em Kline 1980 (p. 164), encontra-se a alegação de que Poncelet teria se valido de métodos algébricos para justificar o princípio antes de utilizá-lo, o que revela o quanto estes métodos estavam se tornando centrais na matemática da época.

para a representação de uma situação específica.

No entanto, o choque na visão tradicional a respeito do tema da geometria causado pelo trabalho de Poncelet, acabou resultando em um maior descaso com relação ao uso de diagramas em provas geométricas. As dificuldades de se encontrar representações adequadas para casos envolvendo paralelismo, ou de fundamentar os objetos imaginários introduzidos no sistema, contribuíram para que a geometria começasse a ser vista como uma ciência de estruturas formais, para a qual qualquer relação com a realidade é irrelevante. Como, por outro lado, nenhuma investigação de caráter filosófico a respeito do papel dos diagramas nas demonstrações foi levado a cabo, os resultados da geometria projetiva acabaram por acelerar o desaparecimento do diagrama no âmbito das demonstrações. Isto porque a independência da geometria com relação à intuição foi mais facilmente percebida do que o caráter simbólico, convencional, que os diagramas podem possuir. O que os mantinha em uso era a suposição de que, em certo sentido, eles eram (ou representavam suficientemente) os objetos sobre os quais a geometria versava. Como a manipulação dos diagramas como símbolos complexos tampouco se revelou uma tarefa simples, a tentativa de resgatá-los acabou por acelerar seu ocaso nas demonstrações geométricas. Um indício desta atitude pode ser percebido nos tratamentos dados à geometria projetiva a partir de então: na maioria deles não há um diagrama sequer, e as demonstrações são levadas a cabo de maneira exclusivamente algébrica. Assim, o sucesso dos métodos analíticos, que se revelaram úteis até mesmo para a própria geometria projetiva[44], acabou por ofuscar a tentativa de resgate dos métodos sintéticos, os quais seriam ainda mais prejudicados com as transformações que a geometria viria a sofrer até o final daquele século.

De fato, o panorama que começava a se delinear era de crise. Quando a relação da matemática com a realidade passa a ser questionada, surgem questões quanto à sua justificabilidade. Ora, se antes a geometria era tida como uma ciência consistente por partir de princípios *intuitivamente* claros, a partir do momento que a intuição sai de cena, algum outro parâmetro deve assumir seu lugar. A geometria projetiva, contudo, não foi a única responsável pelo rompimento com a visão tradicional segundo a qual as teorias matemáticas em

[44] Veja-se, por exemplo, o desenvolvimento dos sistemas duais de geometria (devido a Plucker), nos quais as interpretações para determinados termos primitivos são invertidas (o que é ponto, por exemplo, em um sistema torna-se linha no outro, e vice-versa), sem que com isso os resultados sejam invalidados.

geral, e a geometria em particular, possuem como pontos de partida verdades evidentes acerca do mundo. Em realidade, a principal mudança por ela engendrada foi ter tirado os diagramas do posto de representantes *par excellence* das entidades geométricas. Até então, os axiomas[45] da geometria eram vistos como verdades acerca do comportamento de determinadas figuras no espaço, e os diagramas como representações (ainda que imperfeitas) delas. Mas, embora os diagramas tenham ganhado um caráter convencional, tal como os símbolos da álgebra, os axiomas das teorias geométricas ainda eram vistos como verdadeiros acerca de algo, e não meras convenções. Em certo sentido, pode-se dizer que o advento da geometria projetiva livrou a linguagem da geometria de sua relação com o mundo físico, mas ainda foram necessárias outras transformações para que seus axiomas seguissem o mesmo caminho. A descrição destas transformações é o objetivo da próxima seção.

[45] A partir deste capítulo, a terminologia sofrerá uma pequena alteração. Doravante, a palavra “axioma” será utilizada para fazer referência, indistintamente, aos princípios que Euclides classificava como postulados e noções comuns. “Postulado” será utilizado apenas em contextos específicos onde houver o contraste com a obra de Euclides.

3.3.3.
As geometrias não-euclideanas

O surgimento das geometrias não-euclideanas no século XIX foi o resultado de uma longa história de controvérsias a respeito do postulado das paralelas, a qual remonta aos tempos imediatamente posteriores a sua formulação. Foi objetivo dos comentadores durante um longo período de tempo, como já foi dito, tentar se livrar do quinto postulado mostrando que ele pode ser demonstrado a partir dos demais axiomas. O primeiro a se dedicar a esta tarefa, de acordo com Proclo, foi Ptolomeu. O próprio Proclo também oferece em seu comentário uma tentativa de demonstrá-lo. Após ele, muitos outros seguiram o mesmo caminho. Este foi o caso de Saccheri, Lambert e Legendre, todos já na era moderna, de meados do século XVII até o começo do século XIX. Todos eles falharam com relação ao objetivo de provar a dependência do quinto postulado. De um modo ou de outro, suas demonstrações utilizavam princípios que eram equivalentes a ele.

A tentativa de Proclo foi infrutífera porque assumia pressupostos que se revelam dependentes do quinto postulado. Talvez influenciado pelo diagrama, se possa pensar que da definição de paralelas que Euclides apresenta (a saber, de retas que não possuem pontos em comum) se siga que elas permanecem a uma distância constante uma da outra. Este foi o erro de Proclo. Sua proposição estabelece que, se duas retas são paralelas, uma perpendicular a uma delas também será perpendicular à outra, ou, em outras palavras, uma reta que corte uma delas também cortará a outra. Para o sucesso da demonstração, no entanto, deve-se pressupor que as retas em questão não se afastam uma da outra. Isto, todavia, não fica assegurado pelo simples fato de que elas não possuem ponto em comum, uma vez que duas hipérboles podem não possuir ponto em comum sem que a distância entre as mesmas permaneça a mesma em todos os pontos. Esta é uma propriedade que só pode ser demonstrada com o auxílio do quinto postulado ou de um equivalente.

Saccheri e Lambert deram os primeiros passos em uma nova direção: tentar uma prova indireta da dependência do quinto postulado. Procuraram derivar uma contradição a partir da substituição do quinto postulado por um enunciado equivalente a sua negação. O máximo a que chegaram foi a enunciados contra-intuitivos. Com isso, Saccheri pensou ter provado indiretamente o postulado das paralelas. Lambert, por sua vez, mesmo tendo chegado a resultados semelhantes, não caiu no mesmo engano de Saccheri, e não sustentou ter provado o postulado. Com efeito, algo que contradiga os dados da intuição não é uma contradição lógica, como deveria ser o caso para que houvesse de fato uma prova nos moldes da *reductio ad absurdum*. Já no começo do século XIX, Legendre caiu no mesmo engano de seus antecessores, a saber, pensou ter provado o postulado quando na verdade o tinha substituído por afirmações equivalentes.

Deste modo, a teoria das paralelas tornou-se um dos problemas centrais na geometria do século XIX. Dentre os que se dedicaram ao estudo do tema nesta época destacam-se, além do já mencionado Legendre, Gauss, Lagrange, D'Alembert, Wachter, Schweikart, Farkas Bólyai e seu filho, Janos Bólyai, e Lobačevskiĭ. Gauss foi um dos primeiros a abandonar as tentativas de provar o quinto postulado e começar a extrair consequências de sua negação, por volta de 1813 – pelo que por vezes se atribui a ele a criação das geometrias não-euclideanas. O mesmo caminho seguiram Schweikart e Taurinus. Este último foi o único a publicar seus resultados, como elementos de uma nova geometria, mas ele próprio duvidava da possibilidade de tal teoria.

Foi apenas em 1823 que o problema do quinto postulado ganhou uma solução, ou que alguém ousou acreditar nela, já que Gauss e Bólyai já tinham alcançado resultados semelhantes. Lobačevskiĭ havia trabalhado alguns anos no problema, e após ter, como os outros, tentado dar uma prova para o quinto postulado, percebeu que o mesmo não continha a "verdade" que se lhe queria atribuir, afinal, não podia ser provado por dedução, mas apenas, segundo acreditava Lobačevskiĭ, por meio de experimento. Ele seguiu os passos de Saccheri e Lambert, derivando consequências da negação do quinto postulado tanto quanto lhe permitiam as regras de derivação e a ausência de contradição lógica. O novo postulado assegurava que por um ponto exterior a uma reta dada passam pelo menos duas paralelas. Se este postulado contradissesse os demais, se chegaria a alguma contradição lógica no curso das deduções. Assim, o quinto postulado seria provado indiretamente. No entanto, se a sua negação não se mostrasse contraditória com os demais postulados, ficaria demonstrado que ele é independente dos demais, e que se poderia desenvolver uma cadeia de consequências tomando a sua negação como postulado. Lobačevskiĭ chamou de imaginária a geometria criada a partir deste processo dedutivo, afinal não concebia para ela uma aplicação possível ao espaço físico. Não obstante este fato, seu trabalho foi o precedente das assim chamadas *geometrias não-euclideanas*, que se diferenciam entre si, de maneira geral, pelo tratamento dado à negação do quinto postulado da geometria euclideana em cada uma delas.

Retomando os *Elementos*, o Post. 5 estabelece uma relação entre a intersecção entre duas retas e a magnitude dos ângulos que elas formam com uma terceira. Já em sua formulação mais usual, devida a Playfair, o postulado estabelece que por um ponto externo passa apenas *uma* paralela a uma reta dada, o que o torna mais digno de ser chamado “postulado das paralelas”. A formulação de Euclides e a de Playfair são consideradas equivalentes, muito embora a última inclua uma cláusula de unicidade da paralela que não pode ser deduzida diretamente do primeiro. Por conta disso, este postulado pode ser negado de duas maneiras: 1) estabelecendo que há retas que obedecem às relações de magnitude entre os ângulos mencionados, mas que no entanto não se encontram, o que seria uma maneira de se negar mais diretamente a formulação euclideana; ou 2) estabelecendo que por tal ponto externo: 2a) não passa nenhuma paralela à reta dada, ou 2b) passam várias. Tanto 2a) quanto 2b) podem ser vistas como contradizendo a formulação de Playfair, mas não parecem contradizer diretamente o quinto postulado tal como formulado por Euclides – uma vez que este não menciona paralelas, deixando em aberto se elas são únicas, e até mesmo se existem ou não. Como será visto adiante, no entanto, a primeira variante da segunda maneira de se negar o postulado contradiz os demais princípios. Deste modo, o surgimento de outra geometria a partir de 2a) requer modificações não apenas no postulado em questão, como também em outros princípios.

A versão alternativa do quinto postulado apresentada em 1), bem como em 2a), é aquela adotada na geometria hiperbólica. A versão presente em 2b), por sua vez, deu origem à *geometria elíptica*. Criada por Riemann, por volta de 1860, o seu substituto para o quinto postulado euclideano assegura que duas retas sempre se encontrarão, ou seja, que não existem paralelas tal como definidas em Euclides. A simples substituição do quinto postulado euclideano por este, no entanto, daria origem a uma geometria inconsistente. Para que se entenda melhor esta afirmação, são necessários alguns esclarecimentos a respeito do restante do sistema euclideano, ou seja, daqueles princípios e resultados que não pressupõem o quinto postulado.

No Livro I dos *Elementos*, tais resultados incluem as 28 primeiras proposições demonstradas, já que a primeira utilização do referido postulado acontece em I,29. Até I,28, sabe-se que ângulos alternos internos iguais, formados por duas retas com uma transversal, implicam paralelismo. Mais ainda, a proposição I,31, que apresenta a construção de uma paralela a uma reta dada, também não depende do quinto postulado – ela poderia ter sido apresentada imediatamente após I,27, o que tornaria possível, neste fragmento de geometria euclideana sem o quinto postulado, a construção de uma paralela. O postulado apenas é utilizado quando se trata de demonstrar que a paralela a uma reta dada, por um ponto externo dado, é única. Em suma, em Euclides o postulado das paralelas não é usado para a própria construção da paralela[46]! Como, no entanto, ele é utilizado na demonstração da unicidade da paralela, deve-se dizer que é neste ponto que a geometria de Euclides e a de Lobačevskiĭ diferem – na geometria hiperbólica, conforme descrito acima, a paralela não é única.

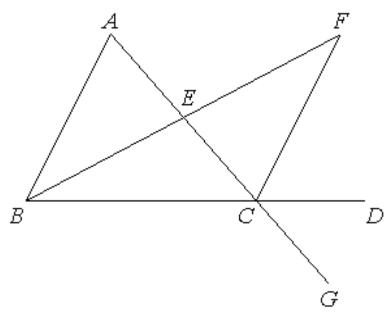
Já no caso da geometria elíptica, as diferenças com relação a Euclides surgem bem antes. Como foi dito, nesta geometria não existem paralelas. Isto, no entanto, contradiz os princípios da geometria neutra, uma vez que, é possível deduzir a existência de paralelas apenas dos quatro primeiros postulados. Adicionar um postulado que negue tal resultado obviamente acarretaria inconsistência. Por conta disso, algumas mudanças adicionais são requeridas para a construção da geometria elíptica. O modelo usual para a geometria elíptica é a superfície de uma esfera. Sobre tal superfície, uma reta deve ser entendida em termos de círculos máximos. Como estes necessariamente se intersectam em dois pontos, deve-se também entender de outra maneira a existência das retas: elas não são univocamente determinadas por dois pontos quaisquer, uma vez que por aqueles pontos que podem ser considerados pólos da esfera passarão infinitas "retas", no sentido definido. Além disso, as retas não são prolongáveis indefinidamente, e relações de estar entre, propriedades de triângulos e mais um significativo número de resultados também devem ser modificados. Em especial aqui, a existência de paralelas, demonstrada sem o postulado euclideano, não pode ser aceita, pois quaisquer duas retas se encontrarão em dois pontos distintos. Isto implica que o simples acréscimo do axioma da geometria elíptica aos da geometria neutra resultaria numa teoria inconsistente. Por esta razão, alguns dos princípios, tais como a própria definição de paralela, tiveram de sofrer alterações a fim de que fosse possível

[46] Atualmente, aqueles resultados que podem ser obtidos sem o uso do quinto postulado constituem o fragmento chamado de *geometria neutra* (cf. Greenberg 1972, pp. 95-98). Tal denominação foi aqui evitada, no entanto, porque os axiomas deste fragmento são retirados da geometria de Hilbert, e não da geometria euclideana. E os axiomas de Hilbert, como será visto adiante, diferem bastante dos de Euclides. A diferença mais significativa é a ausência de um equivalente para o quarto postulado euclideano.

esta outra nova geometria.

O ponto que diferencia a geometria euclideana da hiperbólica, e mesmo da neutra, é a possível quantidade de paralelas por um ponto. Mas o que a diferencia da elíptica envolve ainda a noção de perpendicular. Afinal, a demonstração I,31, de Euclides, depende apenas de I,27-28, que estabelecem apenas que ângulos *alternos* internos iguais, formados por duas retas e uma concorrente, implicam paralelismo. Como é possível, sem o quinto postulado, construir uma perpendicular a uma reta a partir de um ponto externo a ela (I,12), a aplicação da mesma construção a esta reta perpendicular resultará uma configuração na qual duas retas, cortadas por uma terceira (a perpendicular), possuem os ângulos alternos internos iguais (afinal trata-se de ângulos retos), pelo que pode-se dizer que a reta dada é paralela à segunda perpendicular construída.

De fato, I,31 depende de I,27, que por sua vez depende de I,16 (teorema do ângulo externo), que estabelece um resultado que não é válido em geral na geometria elíptica – pois o ponto F, que está sobre a reta bissetriz do lado AC do triângulo, não necessariamente cai no interior do ângulo ABC, pois ele pode ser o pólo oposto de B, e assim estar sobre o prolongamento de BC.



Este resultado remonta a I,9, que constrói a bissetriz de um ângulo, e supõe a existência de um ponto semelhante ao ponto F acima, no interior do ângulo. Por conta de tais demonstrações, Greenberg é levado a afirmar que demonstrações como I,16 são exemplos dos perigos que o uso dos diagramas pode trazer ao raciocínio dedutivo. É de se perguntar, no entanto, se tais críticas fazem sentido numa reconstrução mais fiel da geometria euclideana, para a qual casos como estes são aceitos não apenas em função do diagrama, mas também por conta de assunções como a de que as magnitudes tratadas sejam sempre estritamente positivas, de maneira que colapsos de linhas como o que é acima sugerido não seriam casos legítimos. Esta discussão será retomada posteriormente. Por ora, deve-se voltar a atenção para as consequências, para a geometria euclideana, do surgimento de geometrias alternativas a ela.

Com a demonstração da possibilidade de tais geometrias alternativas, a geometria poderia ser vista como independente de sua relação com o espaço, muito embora o próprio Lobačevskiĭ, por exemplo, não visse a sua geometria tal como alguém familiarizado com as teorias axiomáticas formais poderia ver. Seu interesse estava mesmo em descobrir algo sobre as características do espaço real, uma vez que para ele as verdades da geometria eram como as da física, e deveriam ser verificadas por experimento. Para ele a derivação de consequências da negação do quinto postulado estava legitimada apenas na medida em que poderiam ser úteis na indicação do caminho que deveriam seguir os experimentos para tornar a geometria uma ciência mais precisa.

Estava aberto um novo caminho. Em vez de *geometria*, *geometrias*. Em lugar da relação com o espaço físico, a consistência lógica como fundamento. Mas, já nas últimas décadas do século, ainda eram poucos os que se animavam a trilhar o novo caminho. A geometria euclideana ainda era, na prática, *a* geometria. Como as geometrias não-euclideanas não eram tidas como fundadas em propriedades intuitivas do espaço, provar a consistência de cada uma delas era uma necessidade para que as mesmas se tornassem mais que meras "criações lógicas", como eram consideradas até mesmo por seus idealizadores.

Era necessário, ao menos, que fosse oferecida uma demonstração de consistência relativa, isto é, uma demonstração de que as novas geometrias são consistentes se outra teoria que as incorpore também for. Dada a natureza do problema, e o fato de que, até então, a geometria euclideana era tida como o ramo da matemática mais bem fundamentado, por alicerçar-se em princípios intuitivos e evidentes, seria ela o parâmetro para a consistência das demais[47]. A estratégia utilizada para provar a consistência das geometrias não-euclideanas consistiu em oferecer modelos, na geometria euclideana, que satisfaçam os axiomas das novas geometrias. À tarefa de provar a consistência das novas geometrias se dedicaram matemáticos como Beltrami, Klein, Cayley, Poincaré e Riemann.

Um dos modelos utilizados para a demonstração da consistência da geometria elíptica, como sugerido acima, foi a superfície de uma esfera. Sem entrar em maiores detalhes, a demonstração baseia-se sobre o fato de que os

[47] Com efeito, nos séculos XVII e XVIII, por exemplo, ela já havia sido cogitada como base para a demonstração da consistência da álgebra e da análise.

círculos máximos de uma esfera, que representam as retas da geometria elíptica, comportam-se de acordo com o que é estipulado pelas proposições dos *Elementos*. Assim, se há alguma inconsistência na geometria elíptica, cujo modelo é a superfície da esfera, também haverá inconsistência na geometria de Euclides, dado que os axiomas e teoremas da geometria elíptica neste modelo podem ser traduzidos em teoremas da geometria euclideana.

A geometria hiperbólica, por sua vez, teve sua consistência demonstrada de maneira mais engenhosa. Uma das razões diz respeito ao fato de que não há, como no caso anterior, um candidato natural a modelo da geometria hiperbólica na geometria euclideana. Como, no entanto, tudo indicava que o postulado das paralelas era independente dos demais[48], a sua negação também não poderia revelar-se contraditória com relação a eles. Se assim fosse, isto indicaria que os outros quatro seriam suficientes para deduzir o postulado das paralelas como teorema. Mas os esforços de Saccheri e Lambert revelaram-se vãos neste sentido. Disso se segue que a independência do quinto postulado fica assegurada uma vez que se demonstre que a consistência da geometria euclideana implica a consistência da geometria hiperbólica.

Num dos modelos escolhidos para a demonstração, devido a Klein, o plano hiperbólico é interpretado como a área de um círculo no plano euclideano. Os pontos na circunferência são considerados externos ao plano hiperbólico, e as retas são tidas como cordas (segmentos que ligam pontos na circunferência do círculo, os quais, por estarem fora do plano hiperbólico, caracterizam tais cordas como abertas) que ligam estes pontos entre si.

Valerão também os teoremas euclideanos para o interior do círculo, embora algumas alterações devam ser feitas quando se trata da congruência de ângulos e áreas[49]. Todas as modificações, entretanto, são feitas de modo que os termos primitivos da geometria hiperbólica substituem os seus equivalentes euclideanos na interpretação dos termos definidos. Assim, na definição de

[48] Como bem observa Greenberg, tanto Lobačevskiĭ, quanto Bolyai e Taurinus desenvolveram uma trigonometria hiperbólica a partir da trigonometria tradicional, de modo que qualquer problema de consistência com a primeira implicaria inconsistência da última (Greenberg 1972, p. 184).

[49] Alterações que, vale lembrar, também são necessárias no modelo elíptico. Afinal, a soma dos ângulos internos de um triângulo, por exemplo, será maior que dois retos na geometria elíptica, e menor na hiperbólica. Outra curiosidade: na geometria hiperbólica vale, para identidade de triângulos, o critério ângulo-ângulo-ângulo (que na geometria euclideana implica apenas similaridade, mas não identidade).

"paralelas" todas as ocorrências do termo "reta" são substituídas por "corda aberta". Todos os axiomas da geometria hiperbólica podem ser demonstrados como teoremas da geometria euclideana, de modo que a demonstração de uma contradição na primeira implica que a mesma contradição pode ser derivada na última. Fica assim estabelecida a consistência da geometria hiperbólica relativamente à geometria euclideana[50].

Tais provas de consistência, entretanto, não terão valor se a consistência da própria geometria euclideana estiver sob suspeita. Com os sucessivos impactos causados pelas transformações descritas, ao final do século XIX a geometria euclideana de fato já não desfrutava da mesma reputação de antes. Nesta época, Klein também mostrou que todas as diferentes geometrias podem ser vistas como partes da geometria projetiva. O que as diferencia entre si é o tratamento que cada uma dá à noção de congruência. Além disso, Greaves observa que alguns resultados em análise – como a descoberta de funções contínuas não-diferenciáveis, por Weierstrass, e a demonstração da impossibilidade da trissecção de um ângulo na geometria euclideana, por Wantzel – lançavam mais suspeitas sobre a confiabilidade que a intuição geométrica pode possuir, bem como apontavam mais vantagens do método analítico sobre o sintético, já que a referida demonstração não é possível com os meios disponíveis em Euclides[51]. Além disso, de acordo com Kline, o fato de sempre haverem termos primitivos nas teorias axiomáticas faz com que aplicações totalmente diferentes sejam possíveis para a mesma teoria, dependendo da interpretação que se quer dar a tais termos[52]. A observação de Kline pode sugerir que, num sistema que lançasse mão de diagramas, uma configuração diagramática utilizada para provar que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois retos também pode ser utilizada para provar que tal soma é maior ou menor que isso, pois o que muda de um caso para outro diz respeito apenas aos princípios adotados com relação à medidas de ângulos e paralelismo.

Por conta de todas estas inovações descritas, a geometria necessitava passar por uma espécie de reforma. Sua situação não era tão grave quanto a da análise, uma vez que seus conceitos e métodos não eram tidos como obscuros, nem deram origem a contradições. Mas uma melhoria da linguagem, algumas

---

[50] Para maiores detalhes da demonstração, cf. Greenberg 1972, pp. 184-190.

[51] Greaves 2002, p. 61.

[52] Cf. Kline 1980, p. 181.

adições aos princípios, e sobretudo reparos onde a visualização do diagrama supria a falta de princípios seriam mais que bem-vindos. À tarefa de reconstruir a geometria euclideana se dedicaram Pasch, Veronese, Pieri e Hilbert, seguindo um movimento de rigorização que já havia se iniciado no âmbito da análise, e que será descrito a seguir.

3.3.4.
A crise de fundamentos

As mudanças ocasionadas na matemática pelo surgimento da geometria analítica vão muito além do âmbito da geometria. Com o advento do cálculo, e a possibilidade de se utilizar métodos da geometria e da álgebra para investigar propriedades dos números reais, bem como dos métodos da álgebra para estudar propriedades do mundo físico (os diagramas, vale lembrar, eram vistos como instâncias físicas, representações aproximadas do que seriam as instâncias dos conceitos geométricos – sem que se tivesse claro quais seriam estas instâncias), um universo cheio de criaturas estranhas também havia se formado no âmbito da análise. Quando Weierstrass deu um exemplo de uma função contínua mas não-diferenciável em nenhum ponto, por exemplo, reforçou a convicção de que as aparências não são suficientes para assegurar resultados matemáticos – uma vez que, por sugestão da representação gráfica de uma função contínua, pensava-se que toda função deste tipo era diferenciável, isto é, em sua representação gráfica, sua curva sempre deveria possuir uma tangente, exceto em pontos isolados (picos). Em geometria, como foi visto, foram as críticas às demonstrações de Euclides e a criação de novas geometrias que alertaram para este fato. De um lado e de outro, as ameaças provinham da confiança sugerida por aspectos visuais (das figuras geométricas, no último caso, e das representações gráficas para as funções contínuas, no primeiro). A proliferação de resultados e de polêmicas em diversos ramos da matemática fez surgir, assim, a necessidade de uma revisão de seus fundamentos.

Ao descrever o estado de coisas na matemática dos séculos que antecedem a crise de fundamentos (séculos XVII e XVIII), Kline ilustra bem a tônica que até então animava os estudiosos. Os matemáticos desta época, diz ele, eram “seduzidos por fórmulas”, a tal ponto que a mera derivação de umas a partir de outras por métodos como o cálculo integral ou diferencial já era suficiente para que se aceitasse um resultado[53]. Os motivos por trás de tal atitude envolvem, dentre outras coisas, o sucesso da aplicação dos novos métodos da matemática a fenômenos físicos. A correspondência aos fatos empíricos era, neste contexto, uma substituta para a demonstração rigorosa dos resultados matemáticos.

A euforia desta geração, embora tivesse proporcionado a descoberta de

[53] Kline 1980, p. 168.

muitos resultados, também foi responsável por uma relativa desordem no âmbito da teoria de números. “A fascinação pelo simbolismo sobrepujou e consumiu sua razão”, diz Kline, que apesar de reconhecer este fato, ainda assim enaltece esta geração de matemáticos por terem tido a coragem de se aventurar em todas as direções possíveis, embora sem muita atenção para a consistência de seus métodos. Assim, em meados do século XVIII, iniciam-se debates a respeito dos fundamentos para os métodos do cálculo (que envolvem o sistema dos números reais e a álgebra), uma vez que noções como as de número negativo e de número complexo não eram vistas com bons olhos. Estes debates receberam ênfase quando as geometrias não-euclideanas abalaram a crença na relação entre a matemática e o mundo físico. Pois, embora ainda fossem consideradas meras criações lógicas, as geometrias não-euclideanas já eram um alerta de que as proposições da matemática e as verdades do mundo não necessariamente coincidem.

Mesmo que os métodos utilizados pela teoria de números fossem considerados mais independentes da experiência que os da geometria, a análise ainda não estava livre dos perigos que a confiança na intuição poderia suscitar. Neste contexto, a ameaça estava em confiar nos métodos do cálculo baseando-se apenas no sucesso de sua aplicação para interpretar e predizer fenômenos físicos em mecânica, dinâmica, eletricidade e engenharia. De fato, a evidência intuitiva ou o sucesso na aplicação empírica dos resultados já não significava muito, uma vez que as novas geometrias, por mais contra-intuitivas que pudessem parecer, não se revelavam contraditórias – o que lhes assegurava o caráter de teorias matemáticas.

A impossibilidade da derivação de contradições (se não em um sentido absoluto, pelo menos com relação à teoria mais aceita acerca do assunto) a partir dos axiomas, assim, passava a ser o parâmetro para a aceitação de teorias. Além disso, passou-se a dar mais importância a outras propriedades dos sistemas axiomáticos, como a independência de seus axiomas (o conjunto de axiomas escolhido deve ser econômico a tal ponto que seja impossível a dedução de um axioma a partir dos demais). Assim, além de ter sua consistência demonstrada, os axiomas de uma teoria devem ser demonstrados independentes entre si[54]. A questão da independência dos axiomas, vale

[54] A demonstração da independência de um axioma é feita por meio da apresentação de modelos que satisfaçam os axiomas restantes, mas não satisfaçam o axioma testado. Como se pode deduzir qualquer coisa a partir de uma contradição,

lembrar, não pode ser vista como equiparável à questão da consistência. A independência dos axiomas é um aspecto que não interfere na validade de uma teoria axiomática. Seu ponto é relativo à economia e elegância do sistema, mas não à sua legitimidade enquanto sistema dedutivo.

Inicia-se, com isso, uma fase de profundas transformações nas teorias matemáticas, originadas da necessidade de se adequar as teorias a estes novos requisitos. As mudanças poderiam ser observadas tanto com relação à linguagem quanto com relação aos métodos e ao caráter das teorias. Alguns matemáticos perceberam a necessidade de um trabalho de rigorização e fundamentação lógica das teorias a fim de afastar os inconvenientes trazidos pela intuição, e ao mesmo tempo legitimizar os conceitos e métodos da análise. Com vistas efetuar esta tarefa, surge no século XIX o chamado *movimento crítico* – no qual se inserem, ao longo de todo aquele século, figuras como Bolzano, Abel, Cauchy, Weierstrass, Dedekind, Cantor e Peano.

Os três primeiros tentaram fundamentar a análise sobre a noção de número[55]. A geometria, como foi visto, já havia tido sua reputação maculada pela descoberta de geometrias alternativas, e embora ainda não se duvidasse da sua consistência, sabia-se que a geometria de Euclides também não se adequava à nova noção de rigor, e não poderia, portanto, constituir uma base segura[56]. Mas

---

explica-se por que o teste de consistência deve ter sido efetuado antes do de independência. Além da consistência e da dependência dos axiomas, outras características, tais como simplicidade e relevância, podem ser utilizadas para classificar sistemas axiomáticos. Comparando sistemas axiomáticos a conjuntos de regras que definem um jogo, Reid faz uma analogia que ajuda a entender a natureza do método axiomático. Se o conjunto de regras é tal que muitas exceções podem ser apontadas, ele não é simples. Se há regras desnecessárias, que podem ser derivadas da aplicação das demais, as regras não são independentes, e portanto falta economia. Se uma regra permite o que outra proíbe, o conjunto de regras é inconsistente. Se, finalmente, mesmo que o conjunto de regras possua todas as características necessárias, o jogo é tão sem-graça que mesmo a vitória não traz satisfação, o conjunto de regras não caracteriza um jogo relevante ou importante (Reid 1963, p. 25).

[55] Num movimento que Detlefsen denomina “des-geometrização” – mais que aritmetização – da análise (Detlefsen 2008, p. 182).

[56] Embora os trabalhos sobre as geometrias alternativas ainda não fossem amplamente conhecidos, os estudiosos já estavam cientes da sua possibilidade (lógica, ao menos), e talvez isso já fosse suficiente para que a geometria não fosse considerada uma boa candidata a fundamento da matemática. Cf. Kline 1980, p. 174.

mesmo que Bolzano, Abel e Cauchy, e depois deles, Weierstrass (já por volta de 1860), Cantor e Dedekind (na década seguinte), tenham tido sucesso em clarificar os conceitos e métodos da análise recorrendo aos métodos da aritmética, eles não obtiveram sucesso na rigorização da teoria de números como um todo por conta da falta de clareza a respeito da noção de número racional, necessária para a definição dos irracionais e consequentemente para o entendimento dos números reais como um todo. Todos eles tomaram por garantidas as propriedades dos números racionais e as estenderam, mudando o que devia ser mudado, aos números irracionais. A assim chamada “aritmetização da análise”, ou a eliminação dos infinitésimos, só foi alcançada por obra de Peano, que utilizando-se de resultados já alcançados por Dedekind, estabeleceu axiomaticamente as propriedades dos números inteiros positivos e delas derivou o conceito de número racional.

No que diz respeito à geometria, mesmo que as geometrias não-euclideanas também tivessem sido demonstradas consistentes relativamente à geometria euclideana neste ínterim, a consistência desta ainda era tomada por garantida apenas em virtude de sua relação com o espaço físico. Uma demonstração de consistência lógica da teoria euclideana, bem como um tratamento axiomático mais cuidadoso, ainda eram necessários. Para levar a cabo estas tarefas, estudiosos como Pasch, Veronese, Pieri e Hilbert desenvolveram aprimoramentos de modo a fazer com que a geometria euclideana satisfizesse o rigor formal requerido. Assim, modificações nos grupos de axiomas, nas definições, nas demonstrações e na linguagem empregada foram feitas com vistas a enfatizar o caráter dedutivo da teoria.

Pasch foi o primeiro a se dedicar à tarefa, e em sua obra intitulada *Vorlesungen uber Neuere Geometrie*, de 1882, já se encontra o clamor que se tornou um lema daquela geração: a fim de que sejam verdadeiramente dedutivas, as demonstrações devem ser independentes dos diagramas[57]. Embora o próprio autor admitisse que a escolha dos termos primitivos de seu sistema provinham da experiência[58], ele conseguiu mostrar que a geometria

[57] Citado em Greaves 2002, p. 66.

[58] O processo de obtenção de conceitos matemáticos pela abstração de aspectos de uma realidade física dada era visto por Pasch como característico na origem de uma teoria matemática. Este ponto de partida, no entanto, não poderia influenciar na aceitação dos teoremas da teoria, que devem ser alcançados por meio de dedução, apenas (cf. Greaves 2002, p. 67).

pode ser desenvolvida independentemente de sua relação com o espaço[59]. A nova geometria referida no trabalho de Pasch é a geometria pura – uma teoria essencialmente voltada para fins demonstrativos, sem qualquer comprometimento com a interpretação de seus termos. Por essa razão, os diagramas geométricos, considerados como interpretações para as sentenças da geometria, não poderiam fazer parte das demonstrações na geometria pura.

Greaves salienta que o trabalho de Pasch marcou época, e serviu como padrão para os *Grundlagen der Geometrie*, de Hilbert, em 1899. Como, no entanto, o tratamento dado por Pasch aos termos primitivos e ao simbolismo de seu sistema não eram de fácil entendimento, o trabalho de Hilbert ficou mais conhecido por aprimorar tais aspectos. Hilbert buscou manter seu sistema o mais próximo possível daquele dos *Elementos*, muito embora seu simbolismo abstrato permitisse qualquer interpretação possível – em vez de planos, linhas e pontos pode-se sempre pensar em mesas, cadeiras e canecas de cerveja, de acordo com sua famosa frase. Deste modo, conseguiu livrar-se do resíduo intuitivo que ainda era possível detectar na obra de Pasch, cujos termos primitivos eram obtidos por experiência e possuíam um significado[60]. De acordo com as palavras do próprio Hilbert, seu objetivo era fornecer uma análise lógica das relações espaciais tais como as percebemos[61].

Contudo, como bem observa Kline, a rigorização não acrescentou nenhum resultado novo às teorias já existentes[62]. Mesmo que a álgebra, a aritmética e a geometria tenham sido rigorizadas no sentido pretendido, a lógica apenas sancionou o que a intuição já havia conquistado para estas teorias. Além do mais, nenhuma prova de consistência absoluta foi oferecida. As provas de consistência oferecidas por Pasch e Hilbert eram relativas à teoria de números, cuja demonstração de consistência ainda era tarefa a realizar.

Pode-se dizer, neste sentido, que o esforço de rigorização trouxe mais benefícios à lógica e à filosofia da matemática do que à matemática

---

[59] De acordo com Kline, a independência da geometria com relação ao espaço físico, a despeito de sua aplicabilidade a ele, já havia sido observada por Grassmann em 1844 (Kline 1980, p. 191).

[60] Pasch fornece, por exemplo, uma explicação do significado de "ponto" muito semelhante ao que se encontra na primeira definição dos *Elementos* (cf. Greaves 2002, pp. 66-67).

[61] Os *Grundlagen der Geometrie* serão descritos mais detalhadamente na sequência.

[62] Kline 1980, p. 194.

propriamente dita. O movimento crítico, diga-se de passagem, também proporcionou importantes transformações na lógica, devidas a autores como Boole, Peirce e Frege. O último, inclusive, chegou a ver nela a base sobre a qual se deveria fundar a matemática (com exceção da geometria, a qual ele, tal como Kant, considerava sintética *a priori*, e portanto impossível de ser reduzida a relações lógicas[63]). Em geometria, os trabalhos de Pasch e Hilbert são exemplares da empreitada que tinha como objetivo principal oferecer bases seguras e independentes da intuição para a geometria euclideana. Em Hilbert, como será visto a seguir, o objetivo era uma exposição das relações logicas entre os conceitos geométricos, de maneira que fosse possível entender como, de maneira independente de qualquer recurso externo, os teoremas poderiam ser derivados a partir dos princípios, exclusivamente. De acordo com Detlefsen, a crise de fundamentos remonta à discussão aristotélica a respeito da pureza dos métodos de prova. De acordo com ele, a preservação dos métodos próprios, ou seja, a proibição do uso de métodos oriundos de outros domínios, poderia ainda ser vista, no período acima descrito, na busca por um método basilar em matemática, sobre o qual todo o edifício desta ciência pudesse ser erigido[64]. Sem entrar no tópico ressaltado por Detlefsen, a seguir será apresentada a reconstrução proposta por Hilbert para a geometria de Euclides, vista em princípio como uma maneira de livrar aquela teoria das suspeitas que lhe rodeavam.

[63] No entanto, tampouco as demais teorias, como se descobriria posteriormente, poderiam ser reduzidas à lógica.

[64] Detlefsen 2008, p. 193.

3.4. A reconstrução formal dos *Elementos*

Motivado pelo ideal de pureza dos métodos que deveria ser seguido pelas teorias matemáticas, Hilbert oferece uma reconstrução formal da geometria euclideana – marcando, com isso, o que Hallett identifica como o início do estudo acerca dos fundamentos da matemática na era moderna[65]. Hallett sustenta que o trabalho fundacional de Hilbert é construído a partir da retomada dos métodos sintéticos em geometria[66], e tendo como pressuposto a crença na natureza intuitiva da geometria – que Hallett faz notar através de uma passagem de uma obra anterior de Hilbert, onde o autor sustenta claramente esta visão.

De acordo com a visão de Hilbert no período que antecede a publicação dos *Grundlagen der Geometrie*, a geometria nasce da contemplação das coisas no espaço, e suas demonstrações dependem, assim, da forma mais simples de experimento que lhes é peculiar: desenhar. Isto, prossegue ele, representa um entrave para o desenvolvimento da ciência na medida em que lhe falta um método geral não apenas para resolver determinados problemas, mas para demonstrar a impossibilidade da resolução de outros – algo que um método mais refinado poderia prover. Por outro lado, a metodologia analítica, que é capaz de dar respostas a este tipo de questão, faz com que o tema próprio da geometria seja oculto sob a manipulação algébrica de signos, e com isso não propicia uma boa compreensão do que está sendo tratado. Por conta disso, o objetivo de Hilbert era fornecer para a geometria euclideana uma reestruturação em termos sintéticos, tanto quanto fosse possível, a partir de noções simples envolvendo relações de incidência e congruência.

Na introdução dos *Grundlagen der Geometrie* Hilbert deixa claro este objetivo: estabelecer um conjunto de axiomas, o mais completo e simples possível, a partir dos quais se possa derivar os teoremas importantes da geometria. Com isso, de acordo com ele, será possível entender melhor o significado dos axiomas e a importância das conclusões que deles se seguem. Seu trabalho pretende ser uma realização do ideal que desde Euclides foi buscado: oferecer uma análise lógica da percepção do espaço[67].

---

[65] Hallett 2008.

[66] O autor aponta Monge como um dos responsáveis por este retorno da metodologia sintética no século XIX (Hallett 2008, pp. 203 e ss.).

[67] Hilbert 1899, p. 2.

Após a curta introdução, o autor começa a descrever os princípios básicos e os grupos de axiomas. Os termos básicos são introduzidos na primeira definição. Eles são de três tipos, a saber, *pontos*, *linhas* e *planos*[68]. Os pontos serão representados na linguagem do sistema por letras maiúsculas (A, B, C...), as linhas por letras minúsculas (a, b, c) e os planos por letras gregas minúsculas (α, β, γ...). As relações entre estes termos, representadas por palavras como "sobre", "entre" e "congruente", não são definidas diretamente. A compreensão de seu significado acontecerá de maneira indireta, por meio da aplicação dos axiomas aos elementos básicos mencionados acima. Uma vez que os axiomas estipulam regras para o uso e a combinação dos elementos básicos recorrendo a estas relações, será o resultado da aplicação deles que determinará as características destas relações.

São elas, diga-se de passagem, que determinam o agrupamento dos axiomas. Hilbert os classifica em cinco grupos: o primeiro estabelece regras para a noção de *incidência*, o segundo para a *ordem*, o terceiro para a *congruência*, o quarto para a noção de *paralelismo*, e o quinto para a noção de *continuidade*. São 8 axiomas no primeiro grupo, 4 no segundo, 5 no terceiro, 1 no quarto e 2 no quinto, totalizando 20 axiomas próprios da geometria. A exemplo do que foi feito com os *Elementos*, a seguir será oferecida uma descrição mais detalhada de cada um destes grupos e de suas principais consequências relativamente à geometria plana, bem como alguns pontos importantes no nível meta-teórico – cujo tratamento constitui uma inovação relevante com relação a Euclides. Pela restrição à geometria plana, não serão apresentados os axiomas cuja utilização seja exclusiva da geometria espacial, como a maioria dos que estipulam relações para planos.

Os axiomas do Grupo I, como já foi dito, estabelecem regras de acordo com as quais a relação de incidência pode ser aplicada aos objetos da teoria e podem ser lidos do seguinte modo:

> *I,1: Para quaisquer dois pontos A, B existe uma linha que contém cada um dos pontos A, B.*
>
> *I,2: Para quaisquer dois pontos A, B não existe mais que uma linha que contém cada um dos pontos A, B.*

---

[68] Pode-se perceber que a geometria de Hilbert não contará com uma das ferramentas principais da geometria de Euclides, a saber, o círculo, cuja aparição nos *Grundlagen* resume-se a uma definição seguida a observação de que os teoremas sobre ele, com base nesta definição, seguem-se dos axiomas.

I,3: Existem pelo menos dois pontos sobre uma linha. Existem pelo menos três pontos que não estão sobre uma linha[69].

O primeiro axioma é um equivalente do Postulado 1 de Euclides, enquanto que o segundo cumpre uma tarefa que Euclides teria negligenciado: estabelecer a unicidade da reta entre dois pontos. O axioma I,3 completa o grupo de axiomas para a geometria plana, ao estipular a existência de elementos que não podem ser concebidos de maneira linear, ou, dito de outro modo, a existência do plano (a qual não é sequer tematizada por Euclides, a menos que se considere que a construção do triângulo equilátero, na primeira proposição, cumpra uma função semelhante ao deste axioma).

---

[69] Apesar de, como se pode ver, os axiomas serem expressos em linguagem informal, eles podem ser apresentados em linguagem lógica. As versões formais (que serão aqui diferenciadas por um asterisco ao lado da numeração original) para os três primeiros axiomas são as seguintes[69]:

I,1*: $\forall A \forall B\, [A \neq B \rightarrow \exists a\, [L(A,a)\ \&\ L(B,a)]]$

I,2*: $\forall A \forall B\, [A \neq B \rightarrow \forall a \forall b [L(A,a)\ \&\ L(B,a)\ \&\ L(A,b)\ \&\ L(B,b) \rightarrow a=b]]$

I,3*: $\forall a \exists A \exists B\, [A \neq B\ \&\ L(A,a)\ \&\ L(B,a)]$

$\exists A \exists B \exists C\, [A \neq B\ \&\ B \neq C\ \&\ A \neq C\ \&\ \forall a\, \neg[\, L(A,a)\ \&\ L(B,a)\ \&\ L(C,a)]]$

O símbolo “*L*” está sendo utilizado para representar a relação de incidência, ou “estar sobre”. As letras romanas maiúsculas e minúsculas, como já foi dito acima, estão pelos elementos da teoria (pontos e linhas, neste contexto), e os símbolos lógicos são interpretados da maneira usual. Estas formulações são oferecidas por Mueller 1981, p. 2.

Diferentemente de Euclides, antes de apresentar os demais axiomas Hilbert já enuncia alguns teoremas que podem ser derivados do primeiro grupo de axiomas. No primeiro teorema Hilbert estabelece que duas linhas (entendidas como duas linhas distintas) possuem um ponto em comum ou não possuem nenhum. Logo em seguida, são apresentados os axiomas que vão regulamentar o uso da noção de ordem, ou da relação de "estar entre" (a qual, por não ter sido introduzida, o autor define antes de apresentar os axiomas). Hilbert menciona, numa nota de rodapé, que estes axiomas foram primeiramente estudados por Pasch, e a ele é devida a formulação do quarto axioma deste grupo. Eles são formulados como segue (a relação de "estar entre" será representada formalmente por "B", de modo que "B(A,B,C)" signifique "B está entre A e C"):

> *II,1: Se um ponto B está entre um ponto A e um ponto C, então os pontos A, B, C são três pontos distintos de uma linha, e B também está entre C e A.*
>
> *II,2: Para dois pontos A e C, sempre existe pelo menos um ponto B sobre a linha AC tal que C está entre A e B*[70]*.*
>
> *II,3: De quaisquer três pontos sobre uma linha não existe mais que um que esteja entre os outros dois.*
>
> *II,4: Sejam A, B, C três pontos que não estão sobre uma linha, e seja a uma linha no plano ABC que não contém nenhum dos pontos A, B, C. Se a linha a passa por um ponto do segmento AB*[71]*, ela também passará por um ponto do segmento AC, ou por um ponto do segmento BC*[72]*.*

---

[70] Para facilitar a expressão formal do axioma, não será utilizada a notação sugerida por Hilbert para representar a linha que une os pontos A e C (a saber, "AC"), uma vez que se segue dos axiomas de incidência que entre A e C só pode haver uma única linha, e do axioma II,1 se segue que a relação de estar entre só pode ser aplicada a pontos que estão sobre uma mesma linha (cf. a este respeito, Mueller 1981, p. 2).

[71] Como no segundo axioma deste grupo, a notação alternativa de Hilbert para planos e segmentos não será adotada na versão formal, que se utilizará da notação inicial sugerida pelo próprio autor. A expressão "no plano ABC", por não ser útil no tocante à geometria plana, pode ser aqui ignorada.

[72] As versões formais deste grupo de axiomas, seguindo a sugestão de Mueller, seriam:

O primeiro axioma deste grupo pode ser visto como a explicitação de informações que em Euclides provinham do diagrama, tais como o requisito de que três pontos sejam colineares para que se diga que um deles está entre os outros dois, e o fato de que a inversão dos pontos extremos não altera a relação do ponto intermediário com relação aos extremos. O axioma II,3, com função semelhante ao primeiro, estipula a unicidade de tal relação, isto é, que de três pontos apenas um pode estar entre os outros dois. II,2 equivale ao Postulado 2, ou seja, à existência do prolongamento de uma linha dada.

O próprio Hilbert oferece uma leitura intuitiva do axioma II,4: se uma linha entra no interior de um triângulo, ela também sai dele – ou seja, se corta um dos seus lados, cortará também um dos outros dois. Ao que tudo indica, e pelo que

---

II,1*: $\forall A \forall B \forall C\, [B(A,B,C) \rightarrow A \neq B \,\&\, B \neq C \,\&\, A \neq C \,\&\, \exists a[L(A,a) \,\&\, L(B,a) \,\&\, L(C,a) \,\&\, B(C,B,A)]]$

II,2*: $\forall A \forall C\, [A \neq C \rightarrow \exists B[B(A,C,B)]]$

II,3*: $\forall A \forall B \forall C \forall a[[A \neq B \,\&\, B \neq C \,\&\, A \neq C \,\&\, L(A,a) \,\&\, L(B,a) \,\&\, L(C,a) \,\&\, B(A,B,C)] \rightarrow \neg B(B,A,C) \,\&\, \neg B(A,C,B)]$

II,4*: $\forall A \forall B \forall C \forall a[A \neq B \,\&\, B \neq C \,\&\, A \neq C \,\&\, \neg B(A,B,C) \,\&\, \neg B(B,A,C) \,\&\, \neg B(A,C,B) \,\&\, \neg L(A,a) \,\&\, \neg L(B,a) \,\&\, \neg L(C,a) \,\&\, \exists D[B(A,D,B) \,\&\, L(D,a)] \rightarrow \exists E[L(E,a) \,\&\, [B(A,E,C) \vee B(B,E,C)]]]$

sugere a presença de um diagrama como ilustração, este axioma também supre a ausência dos diagramas na geometria pura. Estes, aliás, aparecem pela primeira vez na ilustração dos dois primeiros axiomas do grupo, e aparecerão com frequência durante toda a apresentação dos axiomas e dos teoremas deles derivados.

Após a apresentação dos axiomas de ordem, Hilbert demonstra alguns teoremas que se seguem deles e dos axiomas de incidência. O primeiro deles, Teorema 3, estabelece a existência de pelo menos um ponto entre as extremidades de uma linha. A demonstração, cuja ilustração diagramática se dá por meio de triângulos, recorre aos axiomas I,3 e II,2-4. O Teorema 4 mostra que se três pontos são colineares sempre um deles estará entre os restantes. No Teorema 5 demonstra-se a transitividade da relação de estar entre. Dados quatro pontos colineares, sempre é possível identificá-los de uma maneira tal que um ponto que esteja entre um ponto na extremidade e outro no interior do segmento também estará entre o primeiro e o ponto da extremidade oposta. E o Teorema 6 generaliza este resultado para qualquer número de pontos colineares. Ao que tudo indica, sobre este teorema repousa a demonstração do Teorema 7 (que estabelece a existência de infinitos pontos em um segmento de linha), já que para ele não é apresentada uma demonstração. Também sem demonstração fica o Teorema 8, que diz que uma linha divide o plano em duas regiões, às quais pertencem todos os demais pontos que não estão sobre ela. Para estes vale uma das seguintes propriedades: ou eles estão em regiões diferentes, e o segmento que os une possui um ponto em comum com a reta que separa as regiões, ou eles estão na mesma região, e neste caso o segmento que os une não possui ponto em comum com a reta[73]. No Teorema 9 a

[73] No enunciado deste teorema parece haver um engano ou erro tipográfico na classificação dos demais pontos – apresentados como não estando sobre o plano, e não como não estando sobre a linha, como seria de se esperar. Ora, se os referidos pontos não estivessem no mesmo plano, poderiam haver dois pontos, um em cada uma das regiões mencionadas, tais que a linha que os liga não contém nenhum ponto em comum com a linha que separa o plano em duas regiões, ao contrário do que assegura o teorema. Além disso, a comparação com o Teorema 10 (que não será descrito por possuir aplicação apenas na geometria espacial), que estabelece uma função análoga para um plano com relação ao espaço, evidencia tal fato: neste teorema os pontos separados são aqueles que pertencem ao espaço mas não estão sobre o referido plano. Do mesmo modo, no Teorema 8 os pontos separados devem ser aqueles que, estando sobre o plano dado, não estão sobre a linha que o separa em duas regiões.

separação de regiões no plano se dá com relação a polígonos (definidos como um conjunto de segmentos AB, BC, CD...KL que conecta os pontos A e L). O teorema estabelece que os pontos do plano que não estão sobre os referidos segmentos serão separados em dois grupos, a saber, os que estão no interior e os que estão no exterior do polígono. As propriedades para os segmentos que ligam tais pontos são análogas às que valem para os pontos do Teorema 8. Como se vê, todas estas demonstrações servem para preencher lacunas deixadas por Euclides, as quais talvez não fossem explicitadas por conta da sua trivialidade em um contexto em que os diagramas estejam presentes.

O terceiro grupo de axiomas diz respeito à noção de congruência (simbolizada por "≡"):

> *III,1: Se A,B são dois pontos sobre uma linha a, e C é um ponto sobre a mesma ou sobre outra linha b, então sempre é possível encontrar um ponto D sobre um lado da linha b determinado por C tal que o segmento AB é congruente ou igual ao segmento CD*[74]*.*
>
> *III,2: Se um segmento CD e um segmento EF são congruentes a um mesmo segmento AB, então o segmento CD é também congruente ao segmento EF.*
>
> *III,3: Sobre a linha a, sejam AB e BC dois segmentos que possuem somente o ponto B em comum. Além disso, sobre a mesma ou sobre outra linha b, sejam DE e EF dois segmentos que possuem somente o ponto E em comum. Neste caso, se AB≡DE e BC≡EF então AC≡DF.*
>
> *III,4: Seja <(h,k) um ângulo sobre um plano α e a' uma linha sobre um plano α' e seja dado um lado definido de a' em α'. Seja h' um raio sobre a linha a' que emana do ponto O'. Então, existe no plano α' um e somente um raio k' tal que o ângulo <(h,k) é congruente ou igual ao ângulo <(h',k') e ao mesmo tempo todos os pontos interiores do ângulo <(h'.k') estejam sobre um lado dado de a'.*

[74] Neste caso o uso dos símbolos para um par de pontos para representar um segmento parece ser a alternativa mais econômica para a expressão formal do axioma. Deste modo, "AB" está sendo usado para representar o segmento determinado pelos pontos A e B. Também foi evitada a notação usada por Hilbert para os pontos, linhas e segmentos neste grupo de axiomas, já que a adoção de letras diferentes em lugar das mesmas letras diferenciadas por apóstrofes parece dificultar a formalização.

III,5: Se para dois triângulos ABC e A'B'C' valem as congruências AB≡A'B', AC≡A'C', <BAC≡<B'A'C', então a congruência <ABC≡<A'B'C' também vale.

Com o primeiro teorema deste grupo fica assegurada a possibilidade de se localizar, sobre qualquer linha a partir de um ponto dado, segmentos congruentes a um segmento dado. Hilbert observa que o axioma requer a possibilidade de se construir segmentos, mas que a unicidade do segmento congruente pode ser demonstrada. Este requisito não era necessário em Euclides, dado o caráter construtivo de sua geometria – todas as figuras que faziam parte da demonstração poderiam ser demonstradamente construtíveis. Hilbert também salienta que a ordem dos pontos que determinam os segmentos é irrelevante com respeito à sua congruência (pode-se dizer, por exemplo, tanto AB≡A'B' quanto BA≡A'B'). O axioma III,2 estabelece a transitividade da relação de congruência, e Hilbert alerta para o fato de que não é obvio que um segmento seja congruente a si mesmo, mas que isto pode ser provado pela aplicação do axioma III,1 para a construção de um segmento A'B' congruente com AB, e a aplicação do axioma III,2 sobre as congruências AB≡A'B' e AB≡A'B'. O axioma seguinte, III,3, estabelece a possibilidade de se somar segmentos. Com exceção de III,2 (que corresponderia à primeira noção comum), todos estes axiomas, como foi visto, são teoremas demonstrados em Euclides (embora o teorema I,3 fale da subtração de segmentos, não é difícil imaginar uma estratégia semelhante para a soma: bastaria que, com o segmento menor, se descrevesse um círculo com centro na extremidade comum a ambos os segmentos, e em seguida se prolongasse o segmento na direção em que o círculo foi descrito).

III,4 estabelece para os ângulos o que foi estabelecido para os segmentos em III,1, ou seja, a possibilidade de se identificar sobre uma linha dada no plano, a partir de um ponto sobre ela, um ângulo igual a um ângulo dado. O polêmico teorema I,4, de Euclides, aparece nos *Grundlagen* parcialmente como axioma, e parcialmente como teorema. Tal como Euclides, Hilbert *pressupõe* a possibilidade (e também a unicidade, diferentemente do caso dos segmentos vistos em III,2) de se construir ângulos. Euclides, todavia, demonstra esta possibilidade em I,23, enquanto que em Hilbert ela permanece como axioma. III,5, assim, estabelece que se dois triângulos possuem dois lados iguais a dois lados, e o ângulo por eles contidos também igual, então os ângulos restantes serão iguais. Apenas a congruência das bases é demonstrada subsequentemente. Assim, o primeiro caso de congruência de triângulos se transforma em um caso de congruência de ângulos apenas.

Com este axioma Hilbert diz ser possível a determinação da unicidade dos segmentos de que fala III,1. E a demonstração deste fato se dá por *reductio ad absurdum*. O diagrama que ilustra a demonstração, neste caso, é fundamentalmente igual ao diagrama da demonstração I,6 dos *Elementos*. A unicidade do segmento é determinada pela unicidade do ângulo, neste caso, de modo que sobre a base AB do triângulo não pode ser localizado um ponto B' tal que AB≡AB'.

As consequências mais notáveis deste grupo de axiomas incluem alguns resultados de congruência presentes nos *Elementos*. O Teorema 11, que estabelece a propriedade dos triângulos isósceles demonstrada por Euclides em I,5. O Teorema 12 é o primeiro critério de identidade de triângulos (lado-ângulo-lado) nos *Grundlagen*: sempre que dois triângulos ABC e A'B'C' apresentarem as congruências AB≡A'B', AC≡A'C' e <A≡<A', os triângulos serão congruentes entre si. Dado que o axioma III,5 assegura a congruência dos ângulos remanescente, a única tarefa é demonstrar que as bases são congruentes. A demonstração, por *reductio*, assemelha-se à demonstração da unicidade do segmento apresentada acima, recorrendo à unicidade do ângulo congruente a um ângulo dado.

O segundo critério de identidade de triângulos é apresentado logo na sequência, no Teorema 13: se AB≡A'B', <A≡<A' e <B≡<B', então ABC≡A'B'C'. Este critério corresponde à primeira parte do terceiro critério euclideano (ângulo-lado-ângulo), apresentado em I,26, e seu complemento (o critério lado-lado-ângulo) é apresentado no Teorema 25. O Teorema 14 demonstra que os ângulos complementares de ângulos congruentes também são congruentes entre si (a segunda parte da proposição I,5, em Euclides). Como corolário deste teorema se pode derivar a congruência dos ângulos verticais (definidos como ângulos com um vértice comum, e cujos raios ou lados formam exatamente duas linhas retas). Além disso, é possível demonstrar também a existência de ângulos retos (definidos como ângulos congruentes aos seus complementos).

No Teorema 15 é demonstrado para os ângulos contíguos o que foi estabelecido como axioma para os segmentos contíguos: aditividade. Em Euclides, tais resultados sempre dependiam da contemplação do diagrama e da pressuposição de que o todo é igual à soma das partes (por vezes interpolada às noções comuns pelos editores). O terceiro critério de identidade de triângulos (que corresponde ao segundo critério de Euclides), lado-lado-lado, é demonstrado no Teorema 18. E a transitividade da relação de congruência para ângulos (que em Euclides se seguiria sem mais da aplicação da primeira noção comum) é demonstrada no Teorema 19[75].

O Teorema 20 apresenta a comparação quantitativa entre ângulos. Pelo axioma III,4, como foi visto, ficam estabelecidas tanto a *possibilidade* quanto a *unicidade* da construção de um ângulo igual a um ângulo dado em um ponto sobre uma linha dada (de um mesmo lado da mesma). Pela definição que antecede este axioma, sabe-se que um ângulo divide os pontos de um plano em dois grupos distintos: os que pertencem ao interior do ângulo, e os que pertencem ao seu exterior. Com base nisso, e em alguns resultados demonstrados, Hilbert faz notar que dados dois ângulos[76] <A e <B, se a construção de <A sobre o vértice e um lado de <B acarretar a não-congruência dos lados restantes, então o lado restante do ângulo construído <B pertencerá ao interior ou ao exterior do ângulo original. O que o teorema demonstra é que se ele for interior a <A, a construção de <B sobre <A, nas mesmas condições, implicará que o lado restante de <A será externo a <B.

Com esta possibilidade, e com o auxílio do Teorema 14, torna-se possível provar o que Euclides escolheu – injustificadamente, nas palavras de Hilbert – como postulado: a congruência dos ângulos retos (Teorema 21). A demonstração oferecida repousa sobre a possibilidade de se comparar diretamente dois ângulos por meio da construção de um sobre o outro de modo a compartilharem determinados elementos – esta possibilidade, no entanto, revelar-se-á dependente não de métodos sintéticos, mas sim da representação analítica dos pontos que determinam os ângulos[77].

Ao final deste grupo de teoremas, Hilbert define “figura” e apresenta o teorema geral para congruência de figuras (Teorema 28). Uma figura é definida simplesmente como um conjunto finito de pontos, todos sobre um mesmo plano, no caso de figuras planas. E a congruência de duas figuras depende da possibilidade de se organizar em pares de maneira tal que todos os segmentos e ângulos de uma sejam congruentes aos da outra. No Teorema 29 fica estabelecido um resultado equivalente à pressuposição euclideana da não-

---

[75] Numa nota de rodapé, Hilbert atribui a Rosenthal a demonstração deste teorema, e observa que na primeira edição dos *Grundlagen* esta relação foi apresentada como axioma.

[76] Será utilizado, para ângulos, o símbolo “<” à esquerda da letra que designa o ponto sobre o qual o referido ângulo se encontra.

[77] Este assunto será retomado na conclusão desta seção.

degenerativide do espaço. Na linguagem dos *Grundlagen*, sempre será possível, dada uma figura e um ponto, encontrar, para uma figura congruente a ela, um ponto tal que as figuras formadas pela adição de tais pontos às figuras originais sejam também congruentes.

O quarto grupo é composto de apenas um axioma, nomeado “Axioma de Euclides” (por ser o axioma que distingue a sua geometria das demais). O axioma das paralelas é formulado em Hilbert da seguinte maneira:

> *IV: Seja a uma linha qualquer e A um ponto qualquer que não esteja sobre ela. Então existe no máximo uma linha no plano, determinada por a e A, que passa por A e não intersecta a.*

Depois da introdução do axioma, o autor assevera que o mesmo simplifica a fundamentação da geometria e facilita sobremaneira seu desenvolvimento[78]. Deste axioma segue-se o Teorema 31, que estabelece a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo. E depende dele também a demonstração das propriedades do círculo, definido como o conjunto de pontos que determinam com um ponto dado, e sobre um plano, segmentos congruentes entre si.

O quinto e último grupo de axiomas, denominados “Axiomas de Continuidade”, é composto pelos assim chamados “Axioma de Arquimedes” ou “de medida”, e “Axioma de completude da linha”. Eles são formulados, respectivamente, como segue:

> *V,1: Se AB e CD são segmentos quaisquer, então existe um número n tal que n segmentos CD construídos contiguamente a partir de A, sobre o raio de A até B, ultrapassarão o ponto B.*
>
> *V,2: Uma extensão de um conjunto de pontos sobre uma linha que possua relações de ordem e congruência tais que preservariam as relações existentes entre os elementos originais bem como as propriedades fundamentais de ordem e congruência lineares que se seguem dos Axiomas I-III, e de V,1, é impossível.*

Estes dois axiomas estabelecem que as linhas com as quais lida a geometria plana são contínuas, isto é, fica garantida a existência de pontos em qualquer lugar da linha – vale lembrar que é a falta de uma suposição equivalente a estas que torna falha a demonstração de I,1 em Euclides, pois não fica assegurada a existência do ponto de intersecção entre os círculos. A completude da linha fica determinada pelos dois axiomas, e Hilbert considera o

---

[78] “The introduction of the axiom of parallels *simplifies* the foundation of geometry and *facilitates* its development to a considerable degree.” (cf. Hilbert 1899, p. 25)

segundo a pedra fundamental de todo o sistema. Sobre os axiomas de continuidade repousa a possibilidade de se identificar a geometria euclideana e a cartesiana, e a demonstração da consistência dos axiomas depende desta equivalência.

Apresentado o sistema, no Capítulo II Hilbert dedica-se então à tarefa que constitui um dos principais motivos da formalização: a demonstração de consistência dos axiomas. Como foi visto, a demonstração de consistência requer a apresentação de um modelo que satisfaça todos os axiomas, isto é, um conjunto de objetos sobre o qual a interpretação dos axiomas não dê origem a resultados contraditórios. O conjunto escolhido é extraído do conjunto dos números reais: ele se constitui do número 1 e de todos os resultados a que ele pode dar origem pela aplicação sucessiva e finita das quatro operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão), além de uma operação especial, a saber, $|\sqrt{1+\omega^2}|$, onde "ω" representa um número qualquer obtido pela aplicação de uma das operações mencionadas a 1. Como fica sugerido por estas escolhas, os métodos da geometria analítica serão utilizados para dotar os teoremas da geometria euclideana de uma interpretação aritmética.

A demonstração da consistência dos axiomas pode ser descrita em linhas gerais como segue. Seja (x,y) um ponto cujas coordenadas são números do conjunto acima mencionado. Seja $(u:v:w)$ a representação de uma linha por meio de três números do mesmo conjunto, na razão estipulada. A equação $ux + vy + w = 0$ é lida como indicando que (x,y) pertence à linha $(u:v:w)$. De acordo com Hilbert, este modelo já é suficiente para que os axiomas I,1-3 e IV sejam satisfeitos. Como os números em questão pertencem aos números reais, e como estes podem ser ordenados de acordo com sua magnitude, os axiomas de ordem também se aplicam. A satisfação do axioma II,4, que estipula a existência de pontos fora da linha, é satisfeita na medida em que se estipule que quando os valores da equação acima difiram de zero, isto indicará que o ponto em questão está em um lado ou em outro da linha, conforme o resultado seja maior ou menor que zero. As construções de ângulos e segmentos são asseguradas pelas operações da geometria analítica, e como os números que surgem por meio da aplicação destas operações pertence ao subconjunto dos reais em consideração, o axioma V,1 também é satisfeito. Resta apenas o axioma de completude, V,2.

Para isso, Hilbert pede que se suponha a possibilidade de, sobre uma linha *g*, se encontrar pontos para os quais os axiomas de ordem e congruência para linhas, e o axioma de Arquimedes não valham. Seja um destes pontos denotados por *N*. Este número partirá a linha *g* em duas, e *N* funciona como um corte de Dedekind para os números que já existiam na linha. De acordo com o método do corte, a linha fica dividida de maneira tal que ou uma de suas partes tem um último elemento, ou a outra tem um primeiro elemento. Se *A* é um destes elementos, então entre *A* e *N* não haverá nenhum ponto pertencente ao grupo dos pontos originais (para os quais valiam os axiomas). Pelos axiomas, segue-se que há um ponto *B* tal que *N* está entre *A* e *B*. Pelo axioma V,I, existe um ponto *D* tal que a soma de segmentos iguais a *AN* eventualmente ultrapassará *B* e coincidirá com *D*. Se o segmento *AB* for dividido em *n* partes congruentes, os pontos que marcam a divisão destas partes serão pontos para os quais valem os axiomas em consideração (já que esta divisão se segue de operações regidas por estes axiomas). Seja *W* o ponto mais próximo de *A*, e pertencente a este grupo de pontos. Pelos axiomas de ordem, segue-se que *AW* é menor que *AN*, uma vez que *AB* é menor que *AD*. Mas isto equivale a dizer que *W* está entre *A* e *N*, contrariamente à hipótese sobre a qual se construiu a demonstração. Assim, demonstra-se que o modelo escolhido satisfaz a totalidade dos axiomas, e que, portanto, eles são consistentes.

Hilbert observa, ao final, que embora muitas geometrias possam ser construídas satisfazendo todos os axiomas I-IV e V,1, apenas uma satisfaz a todos eles e simultaneamente satisfaz o axioma de completude. Esta geometria é a geometria cartesiana, ou analítica. A geometria de Euclides, por não possuir nenhum equivalente de tal axioma, pertence ao primeiro grupo. As demonstrações de independência dos axiomas escolhidos são feitas logo em seguida. Estas demonstrações, todavia, não serão aqui descritas em detalhe. Por ora, basta ressaltar que elas constituem a razão de ser da formalização, já que nunca foi cogitada tal possibilidade com vistas a corrigir resultados aos quais Euclides tivesse porventura chegado de maneira incorreta. Estas demonstrações, com efeito, são como as últimas proposições dos *Elementos*, no sentido de ocuparem uma posição para a qual a obra como um todo parece convergir. Em Euclides o livro inteiro poderia ser visto como culminando em I,48. Em Hilbert não há uma proposição demonstrada que sirva de guia para o desenvolvimento do sistema. Mas as demonstrações de consistência e independência dos axiomas podem ser vistas como análogas à última proposição do Livro I dos *Elementos*.

Com exceção da falta de explicitação dos princípios lógicos utilizados, pode-se dizer que o trabalho de Hilbert cumpre com os requisitos de uma teoria axiomática. O ponto de partida são três termos indefinidos, e alguns axiomas que estabelecem relações e propriedades para os mesmos. Todo termo introduzido é definido com base no que já se conhece, e a dedução de teoremas a partir dos axiomas se dá exclusivamente por regras lógicas. Mesmo que, como bem observa Mueller, a transformação dos axiomas e demonstrações em linguagem formal fosse tomar um espaço exageradamente longo – a primeira demonstração, de acordo com Mueller, necessitaria em torno de cem fórmulas se os padrões lógicos fossem observados – tal expediente é sempre possível[79], e as demonstrações são sempre finitas. Por fim, o sistema culmina com a demonstração de que a escolha de seus axiomas é tal que evita repetições desnecessárias, bem como o surgimento de contradições.

É no mínimo curiosa, e digna de nota, a alegação de Hilbert de acordo com a qual o quarto postulado de Euclides é desnecessário – pois ele demonstra esta propriedade no Teorema 21. Quando Hilbert escreveu seus *Grundlagen*, deve-se salientar, a necessidade de se aceitar os axiomas sem demonstração era tida como tão fundamental quanto a necessidade de termos indefinidos no sistema. Além disso, e mais importante, Hilbert deveria ter se dado conta de que seu sistema apresenta uma série de mudanças e acréscimos com relação a Euclides, dentre os quais a inclusão do axioma III,4, usado na referida demonstração. Se Euclides analizasse os *Grundlagen der Geometrie*, poderia igualmente se surpreender com a inclusão, entre os axiomas, de algo que ele demonstra de maneira relativamente simples na quarta proposição de seu sistema – e que poderia ter sido demonstrado antes, já que não lança mão de nenhuma das proposições anteriores. E, finalmente, a demonstração de Hilbert da igualdade dos ângulos retos depende da comparação quantitativa de ângulos, que por sua vez depende do referido axioma.

Outro ponto importante para a comparação dos dois sistemas é justamente a comparação quantitativa de ângulos. Neste ponto o sistema de Hilbert apresenta um desvio considerável com relação a Euclides e com relação à geometria sintética em geral, por introduzir as coordenadas para a representação dos elementos geométricos. Tal desvio, todavia, não fere os objetivos de Hilbert porque, embora nos *Elementos* se torne possível o transporte irrestrito de ângulos e segmentos no plano, o caráter geral do sistema e de seu simbolismo tornam irrelevante a comparação efetiva de dois elementos quaisquer. Tal procedimento exigiria que se realizasse com os diagramas algo que está para além de suas possibilidades enquanto simbolismo. Mesmo assim,

[79] Cf. Mueller 1981, p. 4.

deve-se conceder que Euclides mostrar *como* um segmento pode ser efetivamente transportado utilizando-se apenas dos meios autorizados, enquanto o sistema de Hilbert não o faz explicitamente.

Deve-se ressaltar que a comparação quantitativa de quaisquer objetos em Euclides só é possível quando há entre os mesmos uma relação de parte/todo – caso em que é possível afirmar que o objeto que está contido no outro é menor que ele. Para além disso, Euclides apenas mostra que é possível comparar dois ângulos na medida em que um ângulo pode ser construído em qualquer lugar do plano – inclusive, obviamente, sobre outro ângulo já dado. Mas, para que ficasse determinado por tal expediente qual dos ângulos é o maior e qual é o menor, seria necessário pressupor ou um domínio completo e uma precisão ímpar no uso dos instrumentos de desenho, ou a utilização de uma noção de medida. A primeira alternativa implicaria que a geometria euclideana é de fato empírica, como vários matemáticos importantes chegaram a sustentar. A segunda alternativa, por sua vez, não pode ser satisfeita plenamente, já que, como foi visto, a única "unidade de medida" disponível nos *Elementos* é o ângulo reto.

Já no sistema de Hilbert, que prescinde de diagramas, a comparação baseia-se em um sistema de medida muito mais afinado: os números reais. Mas, do mesmo modo que em Euclides, apenas a possibilidade é apontada, baseada na possibilidade de se identificar a posição de um dos raios de um ângulo com relação ao outro ângulo por meio de equações algébricas. A comparação efetiva, no entanto, dependerá das equações que representam cada um dos elementos a serem comparados, e também não será assunto da geometria enquanto tal, mas sim da álgebra e da aritmética.

Este contraste entre os dois sistemas é melhor percebido quando se analisa o Capítulo VII dos *Grundlagen*, onde Hilbert apresenta um tratamento para as construções com régua e compasso que podem ser efetuadas de acordo com seu sistema de axiomas. Uma régua é apresentada como um meio prático adequado para a construção de uma linha entre dois pontos. Mas, sem o círculo, problemas como construir segmentos ou ângulos iguais a segmentos e ângulos dados requerem a introdução de uma escala, um instrumento com o qual seja possível determinar a magnitude de uma unidade nos dados do problema. A delimitação do domínio de problemas que podem ser resolvidos com régua e compasso, a propósito, dependerá inevitavelmente de métodos da geometria analítica.

Os métodos analíticos, assim, são utilizados tanto como substitutos das operações com régua e compasso quanto como ferramentas para delimitar o escopo de sua aplicação. E que a última função é a contribuição mais importante que estes métodos é algo que fica claro nas últimas observações de Hilbert. Na conclusão de sua obra, ele alega que seu objetivo foi investigar de maneira crítica os princípios da geometria. Isto foi feito na medida em que se apresentou um método de acordo com o qual é possível dizer se um problema qualquer pode ser resolvido com o auxílio de determinados meios. De acordo com um famoso dictum de Hilbert, “na matemática não há *ignorabimus*”. Dada uma questão matemática, deve sempre ser possível respondê-la ou mostrar que a resposta é impossível de ser alcançada pela aplicação dos métodos da teoria em questão.

A demonstração da *impossibilidade* de determinadas operações, portanto, desempenha um papel tão importante como a demonstração de resultados particulares. E a busca de respostas a questões deste tipo (acerca da possibilidade de determinadas demonstrações) é, segundo Hilbert, intimamente conectada com o requerimento de pureza dos métodos, que se tornou um dos aspectos mais importantes da matemática do século XIX. Afinal, o rigor buscado pelos que se dedicaram à revisão dos fundamentos da matemática deveria ser alcançado por meio da delimitação precisa dos princípios e métodos necessários para a resolução de determinados problemas.

Nas últimas linhas, Hilbert reitera que seu objetivo fora justamente este, para o caso da geometria elementar. Sua investigação possibilitou a exibição clara de quais são os requisitos para a solução de diferentes problemas em geometria elementar. Mas fica aberta a questão sobre, dentre vários métodos possíveis para um mesmo caso, qual é o melhor. Não será possível, de acordo com as palavras de Hilbert, que alguém possa dizer, com base nos resultados obtidos por meio da investigação dos fundamentos, que o método analítico é melhor que o sintético para demonstrar a possibilidade de construção de um ângulo reto, por exemplo. O alerta daquele que levou a cabo a rigorização da geometria, no entanto, parece ter passado despercebido. Pelo menos é isto o que denuncia a ausência dos diagramas na maioria dos livros de geometria do século XX.

Pelo que foi visto, pode-se dizer que a obra de Hilbert deu à geometria euclideana um tratamento axiomático adequado aos padrões de rigor em voga após a crise de fundamentos. Todas as assunções implícitas em Euclides foram tornadas explícitas, e princípios foram adicionados ou subtraídos conforme fossem necessários ou desnecessários para o desenvolvimento lógico do sistema. A seguir serão retomadas, à guisa de conclusão, algumas das modificações mais importantes.

Os termos indefinidos foram reduzidos a um mínimo indispensável (ponto, linha e plano, apenas), e todos os termos introduzidos subsequentemente via definição são tais que sempre podem ser decompostos em termos indefinidos. As relações e propriedades que se aplicam a estes elementos são caracterizadas de maneira abstrata pelos axiomas que as introduzem, e nenhuma interpretação informal é necessária para que se as entenda. Diferentemente do que fez Pasch, Hilbert não oferece nenhum tipo de caracterização informal dos termos primitivos da teoria. O entendimento a respeito do que trata a teoria, aliás, passou a ser visto quase como algo alheio às demonstrações matemáticas, uma vez que o desenvolvimento da lógica a tornou suficiente para a verificação de quais teoremas podem ser derivados dos axiomas da teoria.

Isto se deve a outra melhoria que Hilbert efetuou com relação a Euclides, a saber, o tratamento explícito de todo e qualquer princípio utilizado nas demonstrações. Desta maneira, todo resultado pode ter suas origens completamente mapeadas a partir dos princípios, pois se eles estão todos explicitamente formulados e um suposto resultado depende de considerações que não se encontram entre eles, então não se trata de um resultado propriamente dito. Dito de outro modo, se uma proposição que é sabidamente verdadeira não pode ser demonstrada logicamente a partir dos axiomas, algum princípio foi esquecido na formulação dos mesmos.

Para que a análise das relações lógicas entre axiomas e teoremas fosse possível, seriam necessárias ainda tanto uma escolha perspicaz do grupo de axiomas quanto a utilização de uma linguagem regrada e uniforme. E pode-se dizer que Hilbert alcançou ambos objetivos. Com efeito, mesmo que os axiomas e demonstrações dos *Grundlagen* sejam apresentados de maneira informal, isto é, em prosa, um tratamento simbólico é sempre possível; e graças a este aspecto pode-se saber que todos os teoremas são realmente consequências lógicas dos axiomas, ou seja, as fórmulas que os representam são obtidas por meio de sucessivas transformações das fórmulas que representam os axiomas. Como as fórmulas são compostas por símbolos que representam os termos primitivos e definidos da teoria, e também por símbolos que representam os operadores lógicos, as transformações autorizadas são as que estão em conformidade com o que a interpretação dos operadores lógicos determina. Os símbolos que representam elementos próprios da teoria desempenham um papel meramente coadjuvante, de modo que a demonstração pode ser efetuada sem que seja necessário conhecer os seus significados. Neste sentido, Hilbert também obteve êxito no desafio de mostrar a organização lógica da geometria, e afastar do âmbito das demonstrações quaisquer considerações oriundas do domínio de aplicação desta teoria. O caráter exclusivamente dedutivo da geometria ficava assim evidente, pois com o trabalho de Hilbert foi possível mostrar que, tal como as demais teorias matemáticas, a geometria pode ser apresentada sem que seja necessário mais que a boa formulação dos axiomas e a observação das leis lógicas.

Pode-se concluir dizendo que o trabalho de Hilbert deve ser visto como uma tentativa de levar a geometria a um nível de abstração mais alto do que aquele que se lhe atribuía à época. De acordo com Hilbert, a geometria axiomática tem a função de estabelecer quais axiomas são suficientes para a derivação daqueles resultados acerca dos quais se tem convicção por meio da geometria intuitiva, ou escolar[80]. Assim, uma análise lógica da intuição espacial, como ele mesmo denomina, é a tarefa própria da geometria dos *Grundlagen*. É por meio de uma investigação em termos axiomáticos que se pode determinar os limites dos métodos, e revelar as conexões lógicas entre os conceitos de uma teoria.

Deve-se ressaltar, todavia, que o próprio autor reconhece que seu trabalho deixa a desejar por não ser levado a cabo de maneira exclusivamente geométrica[81], já que introduz o sistema numérico para as demonstrações meta-teóricas. Isto, de acordo com o próprio autor, introduz o inconveniente de se reduzir, por vezes o mais simples ao mais complexo – por exemplo, intersecção de linhas ao caráter contínuo dos números reais – agindo na contramão das diretrizes do projeto fundacional. O autor reconhece, desta maneira, que o caminho está aberto para o desenvolvimento de uma fundamentação da geometria que não recorra à aritmética, o que pode ser visto como a admissão de uma possibilidade de uso dos diagramas de maneira tão legítima quanto o uso dos números é para a aritmética. Todavia, a concepção de demonstração que surgia após a crise de fundamentos não parece vislumbrar tal possibilidade, como será visto a seguir.

---

[80] Cf. Hallett 2008, p. 209.

[81] Ver citação em Hallett 2008, p. 251.

3.5.
A concepção padrão de demonstração

Até o momento foram descritos eventos que de alguma maneira contribuíram para o abandono das representações diagramáticas em geometria. Todos estes eventos, no entanto, pertencem ao âmbito especificamente matemático, e talvez por isso não exerceram tanta influência no referido desfecho quanto o desenvolvimento de uma concepção de caráter filosófico segundo a qual uma demonstração é algo exclusivamente linguístico, aliada a uma concepção da linguagem em termos exclusivamente sentenciais. Esta concepção, que se poderia chamar a *concepção padrão de demonstração*, tornou-se amplamente aceita sem muito questionamento por parte dos estudiosos – tendo maior reputação na filosofia da matemática do que na matemática propriamente dita. Embora não tenha sido defendida explicitamente por nenhum autor, basta que se consulte um manual de matemática do século XX para que se perceba o quanto ela é influente. Parece haver, entre os matemáticos das gerações posteriores à crise de fundamentos, um certo consenso sobre os requisitos básicos de uma prova – os quais incluem uma recusa de qualquer representação diagramática, embora não deixem claro quais são as características de um simbolismo adequado para os fins demonstrativos, ou o que faz com que os diagramas tornem-se indesejáveis desde um ponto de vista demonstrativo. Antes de tratar especificamente deste tópico, porém, devem ser mencionados alguns desenvolvimentos em lógica que ocorreram paralelamente aos desenvolvimentos em matemática acima descritos.

O sucesso da utilização do método algébrico para a solução de problemas em diferentes áreas da matemática acabou evidenciando o quanto uma linguagem simbólica pode ser importante para teorias abstratas. De fato, isto evita a interferência de elementos externos ao sistema, sugeridos pelo significado informal das palavras, na compreensão da teoria. Este aspecto do simbolismo vem a calhar para a lógica, onde o significado das palavras (“homem”, “grego”, “mortal”, etc.) só faz dificultar a compreensão do que realmente se quer enfatizar (a regra de *modus ponens*, por exemplo). Leibniz, por exemplo, já havia percebido a possibilidade de uma ampliação do escopo da lógica por meio da adoção de um simbolismo abstrato, de modo a englobar todas as formas de raciocínio[82]. No entanto, ele não chegou a desenvolver completamente um sistema simbólico para a lógica. Foi apenas dois séculos depois dele que um tratamento simbólico e axiomático foi efetuado. Alguns autores (Boole, Schröder, Peirce, Frege e outros) a partir de meados do século XIX, se empenharam em estender à lógica o rigor que já vinha sendo implementado com sucesso na matemática[83].

Boole, por volta de 1840, havia notado que a álgebra não necessitava ficar restrita apenas a sistemas numéricos, podendo ser utilizada inclusive para a expressão formal das leis do pensamento. Uma das primeiras modificações com relação à lógica tal como era conhecida até então[84] foi a substituição da linguagem verbal pela linguagem simbólica, pelo que foi possível uma representação algébrica para as leis do pensamento. Posteriormente, a partir da década de 70, Peirce e Schröder desenvolveram sistemas simbólicos para o tratamento lógico das relações, as quais ficavam de fora da lógica aristotélica. E foi Peirce quem primeiramente notou que as proposições podem ser tratadas como funções tais como as funções matemáticas, de modo que os elementos das proposições que representam objetos são representados pelas variáveis, e os que representam predicados ou relações são representados como funções. Além disso, deve-se também a ele o tratamento formal dos quantificadores. Com o trabalho de Peirce, todos os operadores lógicos necessários para a representação dos raciocínios matemáticos já tinham sido detectados. Com isso, os sistemas formais para as teorias matemáticas estavam aptos a apresentar, além de seus princípios próprios, também os princípios lógicos.

Cabe aqui um parêntese para apresentar, de maneira breve, outra contribuição de Peirce para a temática abordada neste trabalho. Trata-se de sua contribuição para o estudo dos diferentes tipos de signo que uma linguagem pode utilizar – o que o tornou conhecido como o fundador da semiótica[85]. Peirce classificou três espécies diferentes de signos, de acordo com a relação que eles

---

[82] Uma vez que, até então, a lógica ainda era entendida em termos da silogística aristotélica, basicamente.

[83] Por conta da utilização de métodos semelhantes aos da matemática, o tratamento rigoroso da lógica também é conhecido como “matematização da lógica”.

[84] De acordo com Kline, Leibniz pode ser considerado o fundador da lógica simbólica, muito embora seu trabalho não tenha se tornado conhecido até o começo do século XX (cf. Kline 1980, p. 183).

[85] Peirce 2000.

possuem com o objeto a que se referem e com o indivíduo que os interpreta. Um signo é considerado um *índice* se sua significância depende apenas da existência de seu objeto, mas não da existência de um intérprete. Impressões digitais na cena de um crime são exemplos de índices, assim como nomes ou letras utilizados para identificar pessoas ou objetos numa foto. Um *ícone*, por sua vez, é um signo cuja significância depende apenas da existência de um intérprete. Uma peculiaridade dos ícones é uma semelhança estrutural com seu objeto, de acordo com a qual um ícone pode ser uma *imagem*, um *diagrama* ou uma *metáfora*. Diagramas geométricos são exemplos de ícones, na concepção de Peirce, para quem também algumas estruturas algébricas (tais como as matrizes) são representações deste tipo na medida em que refletem, de maneira espacial, as estruturas a que se referem. Também são ícones pinturas ou outras representações imagéticas. Por fim, um *símbolo* é um signo na medida em que seus intérpretes concordem sobre seu designado. Os símbolos possuem natureza puramente convencional, e seu objeto é definido também por convenção[86]. Sua teoria sobre os signos, porém, não recebeu por parte dos matemáticos a mesma atenção que seus trabalhos em lógica receberam. Não foi polemizada, por exemplo, sua classificação dos diagramas como ícones e não como símbolos – o que poderia colocá-los no mesmo nível do simbolismo algébrico.

Frege, já no final do século, aperfeiçoou o que já havia sido feito por seus antecessores, visando não apenas tornar os princípios lógicos o mais abstratos possíveis, mas também estender o mesmo caráter para o âmbito das demonstrações. Neste sentido, seu tratamento axiomático da lógica constitui um ponto central, e mostra-se profundamente sintonizado com o espírito da época. Seu anti-psicologismo extremado o fez levar a lógica a um nível ainda maior de abstração, bem como o fez ver nela a fundação última para a matemática. Neste espírito, a tese segundo a qual os termos básicos das teorias matemáticas são frutos de processos tais como a abstração sobre dados da experiência deveria ser revista.

Não obstante todas as transformações mencionadas, muitos matemáticos do século XIX e até mesmo do século XX continuavam utilizando-se dos princípios lógicos de maneira informal, apenas. Não havia uma preocupação em explicitar formalmente, juntamente com os axiomas da teoria, as leis lógicas que seriam utilizadas. O excesso de preocupação com o rigor era visto por muitos

[86] É neste sentido que a palavra está sendo utilizada no presente trabalho.

como pedantismo, ou como um empecilho para a prática matemática propriamente dita. As posições dos matemáticos com relação ao rigor variavam, e muitas vezes chega a ser difícil precisar de que lado estão figuras importantes como Hardy, Weyl e Poincaré[87].

Mesmo assim, a fundamentação lógica e a preocupação com o rigor formal, devidas em grande medida à crise de fundamentos, acabaram tornando-se quase obrigatórios para a matemática do século XX. E, como não faziam parte da linguagem natural, nem eram considerados um simbolismo à parte, os diagramas não tiveram lugar nos sistemas formais modernos – a despeito da construção de sistemas diagramáticos para a lógica, por Peirce e Venn, ainda no século XIX. O fato de não se ter investigado a possibilidade de tratá-los como um simbolismo parece estar relacionado, ao menos no caso da geometria, à semelhança que eles possuem com seus objetos – que acaba por caracterizá-los, na melhor das hipóteses, como ícones, tal como Peirce os classificou. Assim, foram vistos como instâncias dos conceitos geométricos, e por isso perigosos porque poderiam contrabandear para os sistemas formais elementos não autorizados pelos axiomas.

A discussão não era novidade. Como foi visto, já em Platão e Aristóteles a questão a respeito do que conta, afinal, como uma verdadeira demonstração de um resultado geométrico era um tema recorrente. Mas a modernidade deu-lhe novos ares, graças ao desenvolvimento de sistemas potentes tanto em matemática quanto em lógica, e ao afastamento da intuição como um recurso para a compreensão destas teorias. Intuição e pureza de métodos, a esta altura, eram tidos quase como diametralmente opostos.

Mesmo que os *Grundlagen der Geometrie* ainda não apresentassem os axiomas lógicos dos quais se utilizava em suas derivações (prática que se tornaria habitual a partir de então), a obra já está de acordo com a nova visão a respeito da presença de elementos como diagramas nas demonstrações: embora presentes como ilustrações, não fazem parte do sistema dos *Grundlagen*. E, mesmo sem tomar uma posição explicitamente contrária ao seu uso, Hilbert chegou a comparar a manipulação dos diagramas com experimentos físicos, bem como dizer que uma vez que fossem formulados os axiomas, este

[87] Hardy, por exemplo, sustentava uma posição um tanto enigmática ao dizer que o rigor é uma questão de rotina. Já Weyl considerava a lógica como uma espécie de higiene das idéias matemáticas (citados em Kline 1980, pp. 194-195).

tipo de expediente torna-se inútil[88]. Mesmo que ainda não fosse unanimente aceita, a concepção padrão de demonstração já tinha conquistado o seu lugar.

Como foi dito, uma consulta a um bom manual como o de Greenberg pode fornecer uma caracterização suficiente daquilo que, a partir do final do século XIX, passou a ser considerado uma verdadeira demonstração. Na apresentação do seu sistema axiomático para a geometria[89], o autor adverte que alguns requerimentos devem ser preenchidos para que o mesmo funcione. Eles incluem não apenas a aceitação dos axiomas geométricos, como também o acordo a respeito de quais leis de raciocínio podem ser utilizadas na dedução dos teoremas. Greenberg acrescenta ainda outro requerimento, que ele considera ainda mais básico que os anteriores: que haja entendimento mútuo a respeito do significado das palavras e símbolos utilizados no discurso.

A linguagem, como foi visto, passou a constituir um ponto importante na construção de uma teoria. Embora se utilize na maior parte do tempo de linguagem natural, Greenberg alerta que sempre deve ser possível uma expressão exclusivamente simbólica para as sentenças da teoria. Faz-se necessário, deste modo, que sejam elencados de antemão todos os símbolos que formarão o alfabeto da teoria, a única fonte para as expressões a serem utilizadas. O alfabeto deve conter símbolos para os objetos da teoria (variáveis e constantes individuais), para propriedades e relações que se aplicam a eles (constantes para predicados e relações), símbolos para operações matemáticas e também para operações lógicas, além de símbolos auxiliares cuja função é facilitar a leitura das fórmulas. Cada sentença introduzida no curso da demonstração deve ser justificada por uma das seguintes razões: 1) por hipótese; 2) por axioma; 3) por um teorema previamente demonstrado; 4) por definição; 5) por um passo anterior na demonstração; 6) por regra lógica[90].

Uma caracterização suficiente da concepção padrão de demonstração, subjacente ao trabalho de Greenberg, bem com ao do próprio Hilbert, pode ser dada nos seguintes termos: uma demonstração deve ser 1) convincente; 2) inspecionável; e 3) formalizável[91]. O primeiro requisito não é uma novidade, e

---

[88] Citado em Greaves 2002, p. 72.

[89] Greenberg 1972.

[90] Cf. Greenberg 1972, pp. 33-34.

[91] Cf. Chateaubriand 2005, pp.281-282. A caracterização oferecida por Chateaubriand baseia-se no que diz Enderton em *A Mathematical Introduction to Logic.* Também pode-se encontrar uma boa discussão a respeito deste tópico em Sundholm

tampouco representa um problema para as demonstrações à maneira euclideana. Já o segundo requisito requer a possibilidade de se verificar que cada passo na demonstração é dado de acordo com as regras pré-estabelecidas – em princípio, nada impede que as demonstrações de Euclides sejam assim verificadas. O último requisito, no entanto, representa o ponto problemático para as demonstrações que lançam mão de representações diagramáticas. Até então, não obstante tenham sido desenvolvidos trabalhos como o de Peirce a respeito da natureza dos signos, os diagramas não eram tidos como o tipo de representação que pode ser formalizado. As fórmulas eram tidas, para todos os efeitos, como sequências lineares e discretas de símbolos cuja composição e manipulação poderiam ser executadas de maneira maquinal, sem necessidade de algum conhecimento a respeito das peculiaridades daquilo que elas representam.

Uma demonstração passou a ser vista como o processo de construir uma determinada sequência de símbolos a partir de outras dadas de antemão, por meio de regras que regem sua composição e decomposição. Posto deste modo, uma demonstração poderia ser realizada por uma máquina cujas operações respeitassem tais regras, pois uma vez que sejam formulados os axiomas, o processo demonstrativo pode ser visto quase como algo automático[92].

As demonstrações euclideanas, frente a tais requerimentos, ganharam, na melhor das hipóteses, o estatuto de esboços de demonstrações. Com efeito, mesmo que não reste dúvidas de que as demonstrações euclideanas sejam convincentes (vale lembrar que nenhum dos seus teoremas revelou-se falso com a rigorização proposta por Hilbert), e que elas sejam finitas em termos de números de passos, não se pode dizer que elas sejam inspecionáveis no sentido estrito que é dado ao termo, significando a possibilidade de se inspecionar algoritmicamente cada passo da demonstração. Além disso, também não seria possível uma derivação puramente lógica das proposições, pois considerações extra-lógicas sobre a natureza dos conceitos da geometria acompanham em geral as demonstrações de Euclides.

1993. Para uma descrição das razões pelas quais pode ser útil considerar os axiomas de uma teoria em termos de sentenças e não em termos de descrições de fatos, sugere-se a leitura do primeiro capítulo de Shoenfield 1967.

[92] Tanto que, hoje em dia, pode-se dizer que uma demonstração, no sentido descrito, deve sempre poder ser efetuada por uma máquina, como um computador, ou uma versão mais antiga e abstrata, como uma máquina de Turing.

Há boas razões, contudo, para que se adote uma postura mais condizente com a prática matemática. Chateaubriand critica um a um os requisitos mencionados acima, a fim de mostrar que mesmo a concepção formal de demonstração não está a salvo de críticas e problemas tanto no nível da fundamentação quanto no nível da aplicabilidade de tais requisitos. Quanto à suposição de que a prova se destina a convencer alguém, Chateaubriand objeta que nem sempre este é um dos objetivos de quem demonstra algo. Com efeito, a demonstração pode ser feita por questões estéticas, ou simplesmente pelo prazer da atividade em si. Também é possível que se esteja realizando uma determinada demonstração com o objetivo de testar o poder de derivação de um sistema axiomático. Com relação à exigência de finitude, há também bons motivos para que se acreditar que, por vezes, uma determinada prova tenha uma estrutura infinita. Algumas provas são *dadas*, outras podem apenas ser *descritas*, segundo o autor. E é uma descrição de uma prova o que é dado quando se trata de demonstrar que uma determinada propriedade vale para os infinitos membros de uma coleção, por exemplo. Embora se possa estar convencido pela demonstração, e embora ela seja apresentada de modo breve, ela possui uma estrutura infinita, mas isto não diminui seu caráter de demonstração. Por fim, se uma demonstração deve poder ter seus passos inspecionados por meio de um processo exclusivamente formal, algorítmico, a fim de que traga convicção final, então se estaria diante de uma situação curiosa, uma vez que a execução mecânica de um algoritmo faz justamente com que a demonstração torne-se algo enfadonho e aparentemente distante daquilo que está sendo demonstrado.

Fica claro que a concepção de demonstração surgida no século XIX está longe de ser satisfatória. Sequer seria adequado chamá-la *formal* ou *sintática*, como alguns autores o fazem, já que se estaria pressupondo, com isso, que um determinado grupo de representações, amplamente utilizado na prática matemática, não se enquadram na categoria de representações formais ou sintáticas. Ao que parece, o sucesso de uma tal concepção é devido mais à falta de um tratamento adequado do tópico do que a uma exigência genuína oriunda da prática matemática.

3.6. Considerações finais

Com este capítulo pretendeu-se mostrar, tanto quanto a complexidade do cenário permite, a trajetória descendente das representações diagramáticas em geometria rumo a um eclipse total na prática moderna daquela ciência. Deve-se ressaltar, contudo, que a descrição oferecida acima não resulta de uma análise exaustiva ou mesmo suficiente, em termos históricos, dos pormenores que fizeram com que o tema fosse visto de maneira positiva por alguns, e negativa por outros. O objetivo foi apenas mostrar uma das interpretações possíveis para algumas das causas da rejeição às representações diagramática em contextos de justificação na prática matemática moderna, especialmente em fins do século XIX e ao longo da maior parte do século XX.

Com a apresentação das primeiras sugestões de melhoramentos no método euclideano, pretendeu-se mostrar que as críticas antigas dificilmente eram dirigidas ao uso dos diagramas nas demonstrações. Seu alvo era em geral a escolha de princípios ou estratégias demonstrativas por parte de Euclides. E quando eram dirigidas de alguma forma ao uso dos diagramas, o objetivo era apresentar a existência de casos negligenciados – ou seja, de *diagramas* alternativos. Os diagramas, ao que tudo indica, eram considerados parte das demonstrações. Isto, no entanto, não significa que fossem utilizados de maneira acidental, ingênua ou inconsciente. Os casos apontados por Proclo, por exemplo, indicam o quanto fazia parte da prática o exercício das habilidades de interpretação e detecção das configurações diagramáticas possíveis para um determinado caso.

As críticas modernas, por sua vez, denunciam uma mudança radical com relação a esta prática. Nelas o diagrama é visto como fonte de limitações, erros e parcialidade nas demonstrações – nos casos mais extremos, como um mal a ser combatido para o bem da própria geometria. Por um lado, pode-se ver nesta mudança um efeito do retorno dos números à matemática: segundo alguns historiadores, desde a descoberta das grandezas incomensuráveis, por Pitágoras, as representações numéricas passaram a ser vistas como imperfeitas, suspeitas ou impotentes – talvez de maneira análoga ao que viria a acontecer posteriormente com os diagramas. Por outro lado, a recusa dos diagramas é um reflexo do rompimento com o uso de representações intuitivas ou pelo menos sugestivas neste sentido, o que por sua vez vincula-se tanto a uma espécie de "des-ontologização" da matemática, quanto a um aumento da exigência de pureza (rigor) dos métodos. Diferentemente do que aconteceu em geometria, as notações aritméticas sofreram importantes transformações ao longo do tempo, as quais as tornaram talvez muito distantes em termos intuitivos daquelas representações utilizadas pelos gregos no assim chamado "método por números" (*di' arithmon*).

A intuição revelou-se um verdadeiro entrave ao desenvolvimento da matemática quando descobriu-se que postulados alternativos ao quinto postulado euclideano poderiam ser úteis para o desenvolvimento de novas geometrias – a despeito de seu caráter anti-intuitivo. E o sucesso dos métodos algébricos para o tratamento destas novas geometrias, em contraste com a aparente incapacidade dos diagramas tradicionais para fazê-lo, fizeram com que estes perdessem muito de sua importância no desenvolvimento da geometria. Com isso, não apenas os diagramas mereciam ser substituídos por um simbolismo mais fino e confiável, como também a geometria euclideana merecia uma nova roupagem. Sua reconstrução axiomática, mas sem diagramas, e em linguagem formal (eventualmente com números para auxiliar algumas demonstrações) foi assim levada a cabo no final do século XIX.

De *substituíveis*, portanto, os diagramas passaram a *ilegítimos*, sem que neste ínterim fosse possível identificar as causas para a adoção desta postura. Pode-se pensar que o desenvolvimento do método axiomático em geometria – cujo marco inicial é representado pelos *Elementos*, e cuja perfeição, por assim dizer, é alcançada nos *Grundlagen der Geometrie* – teve como uma consequência natural o afastamento das representações diagramáticas. Uma análise mais cuidadosa destes eventos, no entanto, revela que não há entre eles um vínculo necessário. Não é possível, por exemplo, dizer que a formalização das sentenças da geometria, que é um requisito para a construção de um sistema *à lá* Hilbert, automaticamente exclua os diagramas.

Com efeito, isto implicaria supor que os diagramas não podem desempenhar o papel de símbolos, na acepção que Peirce dá ao termo. Vale lembrar, no entanto, que não apenas os diagramas, como também as fórmulas algébricas, na medida em que deixam perceber a estrutura daquilo que representam, são classificados como ícones[93]. Os símbolos propriamente ditos são os caracteres específicos que fazem parte das equações algébricas. Elas

[93] E, ao que tudo indica, um sistema de axiomas apresentado à maneira formal também seria classificado neste mesmo grupo, uma vez que deixa entrever uma certa estrutura em sua organização.

são, neste sentido, signos complexos, por natureza icônicos, mas compostos por símbolos[94].

Assim, a necessidade de uma formalização ao estilo algébrico para o tratamento formal de sistemas axiomáticos parece sustentar-se somente sobre o caráter linear e discreto dos arranjos simbólicos, requisito que as equações algébricas cumprem, mas os diagramas geométricos, ao menos da maneira como eram vistos, não o fazem[95]. De acordo com o que se argumentou acima, no entanto, esta característica é bem-vinda apenas por questões de afinidades operacionais, uma vez que facilita a execução mecânica de determinadas tarefas. Isto não quer dizer, contudo, que representações não lineares (e/ou contínuas) não possam ser vistas como adequadas para um trabalho como o de Hilbert[96].

Vale lembrar que as versões formais dos axiomas da geometria não devem ser vistas como sendo *os* axiomas da geometria, em um sentido estrito. Do mesmo modo, versões formais de demonstrações não são *as* demonstrações propriamente ditas, mas apenas um modo particular de apresentação das mesmas – a pergunta pelo que seriam as demonstrações para além de suas representações ganham, neste sentido, o mesmo aspecto da pergunta pelo que seriam os objetos geométricos propriamente ditos. Em outras palavras, o método formal para o tratamento de sistemas axiomáticos não é um substituto para os métodos próprios das teorias que eles representam. Assim, mesmo que a demonstração de consistência da geometria oferecida por Hilbert utilize o sistema de números como modelo, nada impediria que em lugar dele se tomasse como modelo os diagramas geométricos – o que, aliás, estaria mais de acordo com o ideal aristotélico de preservação dos métodos próprios de uma ciência. Bastaria, no caso da geometria euclideana, que fossem tornadas explícitas as

[94] E, na medida em que incorporem os números naturais, também são compostos de índices.

[95] Há interpretações que sugerem, no entanto, que os diagramas euclideanos são, para todos os efeitos, símbolos dispostos de maneira discreta, já que as partes relevantes dos diagramas devem ser dispostas de maneira tal que se possa perceber e diferenciar umas de outras (cf. Netz 1999).

[96] Greaves cita uma passagem de Hallett na qual ele alega que, por não serem arranjos discretos de símbolos, os diagramas não seriam adequados aos requisitos do *ponto de vista finitário* requerido para o trabalho de Hilbert – a despeito de ele ter afirmado que os diagramas são "fórmulas desenhadas", e os signos aritméticos "diagramas escritos" (cf. Greaves 2002, p. 74).

regras que permitem, por meio dos diagramas, as derivações de teoremas com base nos axiomas.

Como foi visto, no entanto, houve pouco interesse, durante o período analisado, em desenvolver uma tal abordagem. A concepção de demonstração que sobreveio aos eventos acima descritos possuía requisitos que inibiam qualquer tipo de representação que não fosse linear e discretamente disposto. Dizer que esta concepção é oriunda da maneira moderna de encarar a questão, no entanto, pode ser injusto para com os modernos. A visão moderna acerca dos requisitos de uma demonstração, embora possa incluir elementos de teor, por assim dizer, anti-diagramáticos, não é monolítica. Há, como se pode ver, uma certa confusão relacionada ao que pode ser considerado formal num sentido estrito. Pode-se perguntar, por exemplo, até que ponto pode-se dizer que a reconstrução de Hilbert preserva o caráter formal quando, na investigação de propriedades teóricas, ele toma como modelo o sistema de números. Do mesmo modo, pode-se perguntar se: seriam os números artifícios legítimos em provas aritméticas, ou, tal como ocorreu com a geometria, eles devem ser abandonados em nome de um simbolismo mais neutro com relação ao tema da teoria.

Apenas depois de transcorrido um século da crise de fundamentos na matemática este tipo de questão começou a ser enfrentada, e a filosofia da matemática pode abrir seus horizontes de pesquisa, utilizando-se tanto dos avanços nos desenvolvimentos lógico-formais quanto na pesquisa histórica acerca da atividade matemática. Principalmente, foi possível voltar a explorar questões de teor tipicamente filosófico, como a relação entre uma teoria matemática e seu simbolismo peculiar, ou entre este e algum domínio de aplicação da teoria[97].

No que segue pretende-se apresentar alguns avanços da pesquisa filosófica em geometria nas referidas direções, já no final do século XX e início do XXI. Tais avanços são frutos de um novo ânimo da pesquisa filosófica acerca da matemática, a qual não necessita cair em exames formais de teorias, nem tampouco restringir-se a observação de seus detalhes históricos – muito embora tanto uns quanto outros sejam levados em conta com vistas a oferecer uma

[97] Tal ampliação de foco na filosofia da matemática acompanha a tendência mais geral em filosofia relativa à busca de um diálogo aberto entre o que Hansson denomina "filosofia formalizada" e "filosofia não-formalizada" com vistas a iluminar tópicos que escapam a um tratamento exclusivamente formal (Hansson 2000).

abordagem mais rica a respeito das características distintivas de uma prática matemática enquanto tal.