4
Euclides Revisitado

4.1.
Introdução

A reconstrução formal da geometria euclideana acabou consolidando um padrão de demonstração que excluía representações outras que não fórmulas representando sentenças da linguagem natural (ou talvez de uma parte limitada da mesma). Embora explicitamente destinado a realçar as conexões lógicas entre os conceitos envolvidos em geometria, o trabalho de Hilbert teve consequências desviantes deste objetivo, e acabou reforçando um ideal de demonstração em termos de sequências de fórmulas, que por sua vez devem ser sequências de caracteres de natureza convencional, sem qualquer vínculo com a intuição. Mancosu descreve o projeto hilbertiano como visando um desenvolvimento *linguístico* da matemática, e observa em seguida que tal projeto era restrito apenas ao âmbito justificacional, ou seja, buscava-se um desenvolvimento linguístico ou sentencial apenas para as *demonstrações* matemáticas, propriamente ditas[1].

No entanto, a discussão sobre o que pode ser considerado lingüístico de acordo com os padrões estabelecidos pelos rigoristas, como foi visto acima, foi deixada de lado. Por conta disso, as consequências foram mais decisivas na geometria do que em qualquer outro ramo da matemática, afinal as fórmulas algébricas e aritméticas podem ser vistas como perfeitamente adequadas aos novos padrões – sequências lineares e discretas de símbolos – ao passo que os diagramas claramente falham em cumprir tais requisitos. Como, porém, a rigorização visava apenas o âmbito justificacional, os diagramas continuavam sendo vistos como úteis tanto para a descoberta quanto para a comunicação e aprendizagem de novos resultados, devendo ser evitados apenas nas demonstrações dos mesmos. De acordo com Hilbert, para que se pudesse utilizar elementos como as figuras geométricas em demonstrações seria

[1] Mancosu 2005, p. 14.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

necessário que se tivesse a certeza de que a aplicação de determinadas operações a elas não ferisse os princípios lógicos envolvidos[2]. Apesar de sugerir um caminho para o uso das figuras, no entanto, nem Hilbert nem os estudiosos que o sucederam dispensaram a devida atenção ao tema.

Mas, apesar de terem dominado a filosofia da matemática no século XX, as questões que a formalização almejava responder, relativas à consistência e a outras propriedades de caráter lógico das teorias matemáticas, foram se revelando demasiado restritas para a investigação filosófica acerca da matemática. Com efeito, há em matemática muito mais aspectos relevantes de um ponto de vista filosófico do que a mera estruturação lógica de suas demonstrações. Além disso, mesmo perguntas que deveriam ser respondidas por meio de uma investigação de natureza filosófica foram deixadas de lado por parte dos rigoristas. A principal delas seria justamente estabelecer o que se está entendendo por "linguístico" quando se propõe um desenvolvimento da matemática em tais termos. O que torna o sistema de Hilbert mais linguístico que o de Euclides? Em que sentido aplicamos o termo "visualização" a diagramas e a fórmulas? Qual a importância do simbolismo para o desenvolvimento formal da matemática? O que diferencia a notação da aritmética finitária de Hilbert, a notação numérica usual na aritmética e os diagramas em geometria, por exemplo?

Um dos catalisadores da queda dos diagramas em contextos de justificação, como foi visto no segundo capítulo, fora a descoberta de funções contínuas sem derivadas em nenhum ponto. Ora, a representação de uma função contínua é, visualmente, a de uma linha específica estendida sobre um sistema de coordenadas. Uma imagem que correspondesse à função descoberta por Weierstrass, no entanto, não parecia algo possível. Além disso, fora a partir da representação visual das funções que se pressupôs que toda função contínua deveria possuir derivada, exceto em pontos isolados (que corresponde visualmente a uma tangente à linha dada). Apesar de este resultado afetar

[2] Hilbert 1902 (citado em Mancosu 2005, p. 15). A posição de Hilbert ilustra bem o modo como os diagramas eram concebidos: artefatos incapazes de serem inspecionados de maneira cabal, tal como as combinações de símbolos que constituem as fórmulas. Por conta disso, seria de se esperar que eles pudessem ser responsáveis pela introdução de informações que a rigor não estariam disponíveis para uma determinada demonstração. Em suma, os diagramas não podem ser vistos como uma linguagem formal.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

especificamente a análise, em geometria os diagramas já não eram bem vistos por introduzirem, por via intuitiva, suposições apenas fundadas na aparência dos mesmos, como no caso de intersecções de linhas vistas como determinando pontos.

Apesar de não ter passado despercebida, a questão sobre a natureza e importância dos diagramas não ganhou a devida atenção desde o surgimento da geometria analítica. Alguns casos, no entanto, servem como evidência de que existiram discussões a este respeito desde os primórdios da modernidade. Leibniz já havia observado a importância dos diagramas como símbolos da geometria[3], e Peirce possui uma interessante teoria sobre a natureza dos signos[4]. Especificamente em geometria, Gergonne e Poncelet, bem como todos os que se dedicaram a uma abordagem sintética da geometria também podem ser vistos como parte deste grupo. A descoberta de Weierstrass mencionada no parágrafo anterior poderia ser vista como sacramentando a inadequação de recursos visuais para as demonstrações matemáticas. No entanto, insatisfeito com a suposta falta de correspondência entre o resultado analiticamente expresso e uma possível representação visual, von Koch conseguiu apresentar uma versão visualizável de uma função contínua sem derivada em nenhum ponto – representação que ficou conhecida como "floco de neve" [5]. Mas tais eventos não parecem ter recebido a devida importância, e podem ser vistos como marginais com relação à história da matemática moderna.

Com o desenvolvimento da ciência da computação, a partir de meados do século XX, novos desafios foram fazendo com que se ampliassem os horizontes de investigação da filosofia da matemática. Estas transformações possibilitaram a revisão de determinadas posições com relação ao papel da visualização em matemática, com o desenvolvimento de técnicas para a apresentação de informações nas quais a visualização desempenha papel central. Mancosu

[3] Leibniz.1982.

[4] Peirce 2000.

[5] Oliver Byrne, com uma representação dos *Elementos* que lança mão de cores para a representação de determinados aspectos dos objetos geométricos representados no diagrama, também representa um contraponto à visão dominante sobre a inutilidade de tais recursos desde um ponto de vista demonstrativo – e, de fato, sua obra pode ser vista mais como um método de ensino de geometria do que propriamente de demonstração. De Morgan também era um crítico da introdução do simbolismo algébrico em geometria por conta da perda do caráter próprio da teoria ocasionada por tal transformação. Para maiores detalhes, cf. Cajori 1993.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

caracteriza este período como marcando uma mudança de estilo na matemática. Uma característica distintiva do novo estilo reside numa mudança com relação ao uso de elementos visualizáveis em alguns âmbitos da atividade matemática – mais especificamente, nos contextos de descoberta e comunicação de resultados, mas não em sua justificação[6].

Isso, no entanto, ainda é pouco, uma vez que em geral o uso de diagramas sempre foi visto como útil e até necessário para a descoberta e para o ensino de matemática. Faltava ainda considerar os diagramas como um simbolismo propriamente dito, capaz de ser utilizado também nos procedimentos de demonstração. Conversamente, faltava também interesse em estudar em que medida os demais ramos da matemática necessitavam recorrer a expedientes que poderiam ser chamados visualizáveis ou imagéticos. Temas tratados pela filosofia kantiana da matemática, como se pode ver, ainda constituíam um fértil campo de investigação.

Apenas no final do século XX, a partir da obra de autores como Barwise e Etchemendy[7], a questão sobre a natureza simbólica dos diagramas foi encarada de frente. Um dos principais resultados a que estes autores chegaram foi à equiparação entre sistemas diagramáticos e os sistemas formais canônicos. Ou seja, assim como é possível o desenvolvimento de um modo rigoroso de raciocínio a partir de recursos linguísticos (verbais), também é possível que tal rigor seja obtido para sistemas diagramáticos por meio da inclusão de cláusulas adequadas que regulamentem seu uso.

Como seria de se esperar, a mudança de estilo acima referida incorpora também uma nova maneira de se interpretar a obra de Euclides. Com a ampliação do âmbito de atuação da filosofia da matemática, foi crescendo o interesse em procurar entender a matemática a partir de sua prática, dos contextos e peculiaridades que fazem com que uma teoria matemática seja digna de ser assim chamada, e não a partir de pré-concepções a respeito de seu domínio de objetos. Assim, especialmente no final do século XX e começo do XXI, fez-se sentir a necessidade de uma interpretação da geometria euclideana que levasse em conta o papel desempenhado pelo aparato diagramático do qual Euclides lança mão, de maneira que esta teoria pudesse ser apreciada tal como ela foi concebida e praticada – e não mais em comparação com um padrão de rigor estabelecido em uma época determinada. Com efeito, pouco se havia

[6] Cf. Mancosu 2005, p. 17.

[7] Barwise & Etchemendy 1996.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

investigado a respeito da importância dos diagramas para a prática euclideana. Ainda não havia, por exemplo, uma investigação filosófica acerca da natureza destes artefatos e da razão pela qual uma teoria matemática pode ter sido erigida a partir deles. Finalmente, desde uma perspectiva lógica, não havia um tratamento das demonstrações euclideanas que levasse em conta a contribuição dos diagramas, ou uma reconstrução alternativa às reconstruções formais de Pasch, Hilbert e Tarski. O caráter indispensável dos diagramas nas demonstrações de Euclides não era visto como uma razão para que se desenvolvessem tais abordagens, mas sim como a razão pela qual os *Elementos* não poderiam ser exemplo de sistema axiomático em matemática.

Preocupado em investigar sobre até que ponto os diagramas constituem um recurso confiável, Kenneth Manders escreveu, em 1995, um trabalho intitulado *The Euclidean Diagram*, no qual ele oferece uma diretriz que foi utilizada em várias investigações subsequentes a respeito do tema[8]. Embora tenha sido publicado apenas em 2008, juntamente com um artigo mais breve e de caráter introdutório ao tema[9], o trabalho de Manders circulou informalmente desde que foi escrito. Assim, por exemplo, o tratamento formal dos *Elementos* apresentado nos trabalhos de John Mumma[10] e Jeremy Avigad[11] utiliza-se explicitamente dos resultados alcançados por Manders. Em sua tese de doutorado intitulada *Intuition Formalized: Ancient and Modern Methods of Proof in Elementary Geometry*, de 2006, Mumma constrói um sistema formal que modela as inferências presentes na obra de Euclides de uma maneira tal que as informações fornecidas pelos diagramas também são levadas em conta. Mais tarde, em 2009, Mumma une esforços com Avigad e Dean e apresenta outra versão de sistema formal, desta vez de dedução natural, para os *Elementos*, em *A formal system for Euclid's* Elements.

Deve-se mencionar aqui outra formalização da obra euclideana apresentado por Nathaniel Miller[12], que difere do projeto de Mumma por tratar o sistema euclideano de maneira formal, mas sem com isso abrir mão do simbolismo diagramático. Ao passo que Mumma trata uma demonstração especifica de maneira a codificar, via linguagem verbal, as informações

[8] Manders 1995.

[9] Manders 2008.

[10] Mumma 2006.

[11] Avigad, Dean & Mumma 2009.

[12] Miller 2008.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

relevantes que são disponíveis nos diagramas de Euclides, Miller reconstrói a demonstração sem abrir mão do diagrama. Assim, em lugar de sequências de asserções o que se encontra na reconstrução de Miller são eventualmente sequências de diagramas, os quais são apresentados de maneira mais informativa dos que os originais euclideanos (isto é, com marcações adicionais para identidades de segmentos e ângulos, por exemplo). De um lado, tem-se uma formalização correspondente ao uso de figuras em demonstrações, no sistema de Mumma, e do outro, um sistema formal para diagramas, propriamente dito, no de Miller. As diferenças, porém, dizem respeito apenas ao modo como os sistemas são elaborados. Seus objetivos são os mesmos: demonstrar que o raciocínio euclideano *com diagramas* é adequado aos padrões de rigor requeridos em matemática, desde que seja dado um tratamento adequado aos diagramas utilizados.

No que diz respeito a aspectos históricos da obra euclideana, deve-se dizer que trabalhos como os de Mueller[13] e Knorr[14] constituem importantes indicativos de uma mudança em direção a uma visão mais compreensiva da prática matemática grega. Knorr busca oferecer uma melhor compreensão de como a obra euclideana, ao menos em parte, pode ser vista como inserida em um contexto de busca por rigor formal nas demonstrações, o qual é, em certo sentido, análogo a busca de rigor formal para a matemática durante a crise de fundamentos na modernidade[15]. Já Mueller oferece uma interpretação da obra euclideana de mais fácil acesso, de acordo com o próprio autor, que a edição usual de Heath – que, segundo ele, não é uma boa fonte de informação para quem não domina o assunto. Mueller trata a obra euclideana em constante comparação com os padrões modernos de demonstração e de geometria, de modo a tornar mais fácil o entendimento da obra por parte dos que não possuem familiaridade com a história da geometria ou com a geometria sintética em particular.

[13] Mueller 1981.

[14] Knorr 1975 e Knorr 1986.

[15] Cf. Knorr 1975 para uma comparação entre a crise de fundamentos moderna e a suposta crise de fundamentos antiga, que teria sido causada pelo problema dos incomensuráveis. De acordo com o autor, uma tal crise de fundamentos não parece ter sido a causa para o desenvolvimento de formalizações como a de Euclides, a qual ele vê como o resultado espontâneo da busca por formalização, impulsionada em partes pelos ideais platônico-aristotélicos de demonstração.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

Não obstante tais mudanças em termos de uma abordagem histórica acerca da obra de Euclides, no tocante àqueles aspectos relacionados ao modo como texto e diagrama eram utilizados nas demonstrações, um trabalho iluminador foi *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*, de Reviel Netz[16]. Nesta obra, Netz apresenta boas razões para que sejam refutadas teses que atribuem aos diagramas um papel meramente ilustrativo nas demonstrações.

Embora representem apenas alguns dos expoentes de uma nova maneira de se interpretar os *Elementos*, os trabalhos acima mencionados já são suficientes para o embasamento dos argumentos que serão sustentados ao final do presente trabalho. Tais obras fornecem boas razões para que sejam rebatidas as críticas apresentadas no segundo capítulo referentes aos *Elementos*. Por conta disso, será fornecida a seguir uma descrição pormenorizada das obras de Manders, Avigad e Netz. Com relação ao primeiro, será apresentada em detalhes a distinção entre os aspectos dos diagramas que podem ser levados em conta nas demonstrações e aqueles cuja utilização constituiria uma falta do ponto de vista demonstrativo. Em seguida será descrito o sistema formal desenvolvido por Avigad, Mumma e Dean com vistas a capturar não apenas a informação textual que Euclides apresenta, como também as informações legitimamente apresentadas pelos diagramas, de acordo com a classificação de Manders. Por fim, a obra de Netz será discutida com vistas a realçar o quanto as interpretações da obra euclideana são equivocadas tanto com relação ao texto das demonstrações quanto com relação aos diagramas a elas necessários. Depois disso serão apresentados os principais argumentos em favor do uso dos diagramas no contexto de justificação na prática matemática.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

[16] Netz 1999.

4.2.
O uso adequado dos diagramas: aspectos exatos e co-exatos

Manders procura interpretar a geometria euclideana mais como um antropólogo interpreta um fenômeno cultural do que como um químico investiga uma determinada substância: seu objetivo não é tanto investigar a geometria de Euclides em termos de seus resultados, princípios ou demonstrações, mas sim em termos de sua relação com o auditório a que ela era destinada. Dito de outro modo, sua preocupação não é tanto a relação entre a geometria e as formas geométricas, mas entre a geometria e os geômetras. Não está em jogo saber *se* a geometria euclideana é uma boa teoria – fato já suficientemente confirmado pelo seu duradouro sucesso – mas sim *por que* ela é uma boa teoria, isto é, quais são as características responsáveis pelo seu sucesso entre os matemáticos gregos. Assim, não cabe perguntar *se* os diagramas são elementos legítimos, mas sim *por que* eles são assim. Resta, portanto investigar quais aspectos os qualificam como instrumentos confiáveis num contexto de demonstração.

Manders considera a geometria euclideana uma *prática intelectual*. E uma prática intelectual, segundo o autor, deve fornecer uma espécie de jogo que as pessoas podem jogar, e jogar bem, de maneira conjunta, e de maneira a gerar alguns benefícios[17]. E, para que se possa entender o funcionamento de um determinado jogo, a melhor estratégia é observar o ambiente em que ele se desenvolve, o comportamento dos jogadores, os artefatos utilizados e as ações que lhes são permitidas, etc. Assim sendo, uma interpretação adequada de uma prática intelectual tal como a geometria euclideana não deve partir de uma concepção prévia a respeito de como uma demonstração geométrica deve ser. Uma boa interpretação é aquela que torna possível identificar quais são os aspectos que tornaram a geometria euclideana uma prática bem-sucedida em seu tempo, ou a razão pela qual aquelas demonstrações eram aceitas como tais da maneira como eram apresentadas ao seu público-alvo. Desta maneira seria possível entender o modo como a teoria se desenvolve, seus lances permitidos e proibidos, e em especial o aparato simbólico de que lança mão e as maneiras pelas quais se pode interagir com ele.

[17] Cf. Manders 1995, pp. 80-81. Àqueles que porventura objetem a escolha da analogia com jogos, Manders faz notar o quão difícil pode ser formular um bom jogo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

No caso específico da geometria euclideana, o aparato simbólico é, por assim dizer, heterogêneo, composto de uma parte textual e uma parte diagramática. Tal diversidade é diretamente proporcional à complexidade das ações a eles relacionadas, assim, é de se esperar que a geometria sintética seja mais complexa que a analítica – que seja um jogo cuja maestria exige mais esforço por parte dos jogadores.

De acordo com Manders, uma das características distintivas de uma prática intelectual é o recurso a *artefatos*, ou, como ele mesmo diz, "o desvio por meio de artefatos"[18]. Ora, se constituem um desvio, deve-se pressupor que haja saída quanto uma volta ao caminho original. Assim, tanto as fórmulas e as sentenças da linguagem natural quanto os diagramas são utilizados apenas como meios, não constituindo nem o ponto de partida, nem o de chegada[19]. E o que torna o uso de artefatos uma característica essencial das atividades intelectuais é a maneira controlada através da qual eles podem ser utilizados. Deve haver controle tanto no aspecto ativo quanto no aspecto passivo de seu uso. Isto é, os participantes devem proceder de uma maneira específica, reconhecida e aceita por todos os demais, tanto ao produzir quanto ao agir com base no que os artefatos sugerem. Para Manders, o avanço da geometria cartesiana com relação à euclideana pode ser visto, neste sentido, como uma redução tanto dos artefatos (*input*) quanto das ações que eles podem autorizar (*output*), visando uma maior uniformidade nas estratégias demonstrativas.

Em ambos os casos (diagramas e equações), no entanto, trata-se de artefatos. No caso dos diagramas, porém, pouco se investigou a respeito dos aspectos que os caracterizam como artefatos, ou seja, a respeito das razões pelas quais é possível dizer que as pessoas podem ter controle sobre eles. Em geral, como foi visto, os diagramas euclideanos foram considerados ao longo do tempo como representações (aproximadas) daquilo que era dito no texto das demonstrações. Sua participação ativa nas provas por *reductio*, no entanto, já serve para mostrar que tal descrição é, na melhor das hipóteses, incompleta. Com efeito, nem o diagrama nem o texto destas demonstrações, tomados isoladamente, seriam suficientes para a sua execução. É apenas quando se toma ambos conjuntamente que a contradição pode ser encontrada. Tanto a proposição I,6 quanto a I,7, por exemplo, apresentam construções que

[18] Em inglês: "The detour through artifacts". (Manders 1995, p. 81).

[19] Este ponto será retomado ao final, quando forem discutidos os parâmetros que determinam o âmbito de atuação da linguagem em uma demonstração.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

engendram contradições, como seria de se esperar de demonstrações por *reductio*. No entanto, as partes textuais das suas demonstrações não seriam suficientes para a derivação das contradições. Em I,6, o texto permite apenas que se derive a igualdade entre os dois triângulos, mas não sua desigualdade. Já na parte diagramática ocorre justamente o oposto: deriva-se a desigualdade, mas não a igualdade. Deste modo, em nenhum dos casos a derivação ocorre sem a participação das duas dimensões, textual e diagramática.

Por conta disso, para que as demonstrações por *reductio* nos *Elementos* sejam consideradas legítimas, é imprescindível que se coloque em pé de igualdade suas dimensões textual e diagramática, pois, via de regra, é do confronto entre ambas que surge a contradição. Assim, é curioso que muitas críticas ao uso dos diagramas em contextos de prova vêem no uso da *reductio* uma comprovação de que os diagramas não podem ser usados. Alega-se que a construção deveria ser de algo como uma figura absurda, uma instância de conceitos contraditórios. Tais críticas, entretanto, serão relevantes apenas a partir do momento em que se considere os diagramas como simples instâncias dos conceitos utilizados na demonstração. Uma vez que tal ponto de vista não seja adotado, e que eles sejam vistos como um componente da demonstração, tanto quanto o texto, é perfeitamente compreensível que uma contradição possa ser apontada na relação entre ambos os componentes. A contradição, no entanto, não é "mostrada" pelo diagrama, mas surge da interação entre o que é mostrado por ele e o que é dito no texto da demonstração.

Como, porém, o primeiro ponto de vista prevaleceu, os diagramas foram rebaixados à categoria de "figuras". A abordagem padrão às demonstrações de Euclides concentra-se apenas em um de seus artefatos, e relega o outro à condição de uma espécie de semântica imperfeita daquele. Com vistas a preencher a lacuna que este tipo de abordagem originou, o trabalho de Manders concentra-se justamente em oferecer um tratamento mais abrangente, especificando aquelas características que fazem com que os diagramas, ainda que *possam* ser vistos como instâncias imperfeitas dos conceitos geométricos, *devam* ser considerados artefatos da prática representada nos *Elementos*. Mais especificamente, Manders tenta mostrar que o uso dos diagramas obedece a padrões bem-definidos, tal como se deve esperar daquilo que ele caracteriza como artefato de uma atividade intelectual. O autor espera com isso oferecer uma alternativa à interpretação da geometria euclideana, para a qual considerações de caráter ontológico e semântico são centrais. De acordo com ele, a análise direta das inferências presentes na obra de Euclides, levando em

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

conta o papel dos diagramas, fornece um quadro mais fidedigno de como a geometria euclideana se desenvolve, de fato.

Reconhecendo a existência de duas partes distintas nas demonstrações de Euclides, uma *discursiva* e outra *diagramática*, o autor passa então a descrever suas peculiaridades e o modo como interagem. A parte discursiva consiste de uma sequência de asserções que atribuem características ou relações entre os objetos da teoria, as quais podem ou não influenciar a aparência do diagrama. Cada passo na sequência textual deve ser autorizado por sentenças anteriores na sequência ou por características apresentadas pelo diagrama. Assim, de acordo com Manders, um passo na demonstração consiste de uma atribuição textual, de uma construção diagramática, ou de ambos[20].

A caracterização oferecida por Manders não deixa claro se uma modificação no diagrama pode contar, por si só, como um passo na demonstração. Pelo que se observa nas demonstrações euclideanas isto não deveria ser possível, pois mesmo que haja elementos no diagrama que não sejam introduzidos explicitamente por meio do texto (determinados pontos de intersecção, por exemplo), eles são consequências de ações que o texto prescreve. Assim, pode-se dizer de maneira mais adequada que um passo na demonstração consiste de uma atribuição textual, apenas; ou de uma atribuição textual e de modificações no diagrama, as quais dependem desta atribuição.

A maior parte, senão a totalidade, dos passos que fazem parte da etapa de construção (*kataskeue*) pertencem ao último grupo, enquanto que os da prova (*apodeixis*), em geral, ao segundo. A sentença “Entre os pontos A e B traçar a linha reta AB”, por exemplo, introduz um elemento no diagrama (a linha entre os referidos pontos), e ao mesmo tempo atribui-lhe uma característica (ser reta). Como se pode ver, alguns passos na demonstração envolverão tanto a parte textual quanto a diagramática, outros envolverão apenas a primeira, mas nenhum envolverá apenas o diagrama. O ponto de intersecção dos círculos BCD e ACE em I,1, por exemplo, que surge no diagrama sem que o texto o autorize previamente, embora como consequência de ações por ele autorizadas, só pode ser levado em conta depois que um passo na sequência textual o mencione – a saber, “(...) e a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B, (...)”. Se não fosse assim introduzido, ele seria apenas um dos muitos aspectos diagramáticos que surgem durante a demonstração mas não são utilizados (como o outro ponto de intersecção entre os círculos, na mesma

[20] Manders 1995, pp. 86-87.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

demonstração)[21]. Sua aparição, por si só, não constitui um passo na demonstração. Segundo Manders, os passos nas demonstrações geométricas tradicionais são, em geral, autorizados em parte pelo que é mostrado no diagrama.

A tarefa de Manders passa a ser então apresentar razões para que se leve os diagramas a sério, como artefatos cujas produção e interpretação se dão sob regras rígidas e de domínio total por parte dos participantes. Afinal, as críticas a seu uso geralmente dirigem-se a uma suposta falta de controle em sua manipulação, de modo que conclusões errôneas poderiam ser derivadas com base em diagramas mal-feitos. E mesmo que tais erros grosseiros não sejam observados na história da prática, não há um tratamento satisfatório das representações diagramáticas em geometria que consiga rebater estas críticas. Quais são os aspectos dos diagramas que podem ser utilizados com segurança nas demonstrações, e quais são os que poderiam dar origem a falácias? A resposta a esta pergunta constitui talvez a contribuição mais significativa da obra de Manders para o assunto.

Ao contrário do que geralmente se pensou, não é necessário que os diagramas sejam desenhados de maneira impecável para que eles possam ser utilizados com segurança. Apesar da necessidade de que eles sejam produzidos de acordo com determinados critérios, estes não diferem muito daqueles que se aplicam à grafia das letras em um texto manuscrito. O importante é que os diagramas sejam produzidos de modo que seja sempre possível tanto identificá-los de acordo com sua descrição textual quanto utilizar determinadas características relativas à sua aparência.

Manders denomina *exatas* as características que dependem de estipulação textual. E as características cuja atribuição depende da visualização do diagrama são denominadas *co-exatas* (por dependerem, em certa medida, das estipulações textuais)[22]. As características co-exatas são aquelas estáveis sob

[21] Como será mostrado em seguida, de acordo com Netz 1999, o texto euclideano é mais elíptico do que o que é aqui utilizado como exemplo. Euclides em geral não menciona termos como “ponto” ou “reta”, referindo-se a eles meramente por meio das letras que os representam no diagrama.

[22] Em Manders 1996, o autor denomina este segundo grupo como *não-exatos* (*non-exact*). Tal mudança, no entanto, não é adotada no artigo introdutório ao primeiro (Manders 2008), revelando que o autor acabou optando pelo modo original de expressão – que, de fato, parece mais adequado ao que o autor pretende descrever: aspectos que são exatos na medida em que dependem de aspectos exatos, e portanto são co-exatos.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

uma ampla gama de deformações que o diagrama possa apresentar, e que não são eliminâveis por meio de seu aperfeiçoamento. Elas incluem, basicamente, o reconhecimento de regiões, bem como relações de contiguidade ou continência entre regiões, segmentos e pontos. Estes elementos determinam o que Manders considera como sendo, para quaisquer fins demonstrativos, a *aparência* ou *topologia* do diagrama[23].

É possível que se identifique o modo como os diagramas podem ser "lidos" nos *Elementos* por meio da análise de algumas de suas definições. Nelas pode-se ver quais são os aspectos que podem ser levados em conta na representação diagramática dos objetos geométricos. Na definição de figura[24], por exemplo, percebe-se que não é a natureza da linha que determina o que está em jogo no diagrama, mas sim a delimitação de uma região por ela contida. As primeiras definições, alvo de incontáveis críticas por conta de sua aparente inutilidade, ganham novos ares sob esta perspectiva. O apelo sensível presente em algumas delas, criticado pela maioria dos comentadores, ganha importância quando a aparência do diagrama é considerada essencial para as demonstrações. As definições de ponto e linha, de acordo com esta interpretação, funcionam como guias para a leitura do diagrama. Dos elementos diagramáticos que representam pontos, apenas a posição deve ser levada em

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

[23] É interessante notar que os aspectos diagramáticos relevantes para as demonstrações são os mesmos que constituem o tema da topologia. De acordo com Klein, que com o assim chamado *Erlangen Program* procurou fornecer um tratamento unificador para as várias geometrias existentes em seu tempo, via noção de grupo, uma geometria pode ser definida como o estudo das propriedades das figuras que são invariantes sob um determinado grupo de transformações. De acordo com esta definição, a topologia investiga as propriedades invariantes sob transformações por deformação de figuras (ou sob o grupo de transformações contínuas), tais como noções de interior/exterior, aberto/fechado, contíguo/separado. Reid, citando Piaget, chama a atenção para o fato de que estas são as primeiras noções geométricas que as crianças conseguem dominar (cf. Reid 1963, p. 178 e pp. 188-192). Este seria um bom contra-argumento às críticas dirigidas a uma suposta complexidade e dificuldade de interpretação ou uso dos diagramas em demonstrações, afinal os únicos aspectos relevantes são justamente os que são percebidos sem que seja necessária muita perspicácia por parte dos envolvidos. A maior dificuldade, contudo, e que é o centro das críticas ao uso dos diagramas em demonstrações, dirige-se à aplicação de noções como a de generalidade e necessidade, por exemplo.

[24] Def. 14: "Figura é o que é contido por alguma fronteira ou fronteiras".

conta; dos que representam linhas, apenas o comprimento; e assim por diante. O diagrama, claro está, apresenta os pontos como dotados de uma certa magnitude, bem como as linhas como dotadas de uma certa largura. Mas as definições servem, neste sentido, justamente para avisar que tais aspectos não devem ser levados em conta nas demonstrações.

Como foi visto anteriormente, muitas críticas a Euclides reclamam da falta de explicitação de alguns princípios utilizados nas demonstrações, mas ausentes da parte textual das mesmas. Ora, quando não é apenas o texto o encarregado de fornecer informação, é natural que alguns itens utilizados na demonstração não estejam disponíveis nele. A questão que se põe neste contexto diz respeito à confiabilidade das fontes alternativas de informação no processo demonstrativo. Em Euclides, a tarefa é então esclarecer em que medida os diagramas podem portar informação de maneira tal que ela possa ser utilizada com segurança na derivação dos resultados geométricos. Para Manders, as informações que o diagrama está autorizado a fornecer estão vinculadas aos aspectos co-exatos mencionados acima, ou seja, características tais que uma vasta gama de distorções no diagrama não seria suficiente para impedir sua visualização.

O que pode ser extraído do diagrama, a partir do que permitem seus aspectos invariantes, resume-se ao reconhecimento do seguinte: regiões limitadas por linhas; extensões de determinados elementos; relações de continência que decorrem da inclusão de uma região em outra ou da extensão de um determinado elemento; e intersecções entre duas linhas – tudo isso sob a condição de que não se trate de aspectos eliminâveis por meio da produção de diagramas alternativos. Nos parágrafos seguintes, serão descritos pormenorizadamente cada um destes tópicos.

Uma das primeiras contribuições que se pode esperar de um diagrama geométrico razoavelmente arranjado é a possibilidade de se reconhecer regiões de acordo com a disposição das linhas que o compõem. Quando uma linha é apresentada no diagrama, o plano sobre a qual ela repousa passa a ser composto por duas regiões que se opõem por meio dela. Se a linha encerra uma figura, estas regiões podem ser chamadas externa e interna, e seu reconhecimento no diagrama é seguro e imediato. Outro aspecto confiável dos diagramas geométricos é sua capacidade de possibilitar o reconhecimento da orientação de uma determinada figura (um segmento ABC, por exemplo, tem assegurada pelo diagrama a posição relativa dos pontos sobre si, e portanto princípios explícitos a este respeito, como os Axiomas de Ordem, dos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

Grundlagen, seriam redundantes). Por conta destas peculiaridades dos diagramas, Euclides pode, em I,12, pedir que seja considerado um ponto D *no outro lado* da reta dada AB com relação a um ponto C, sem que nenhum princípio autorize textualmente a escolha de pontos arbitrários em uma determinada região. Além disso, não há restrição textual que previna que se o ponto está *do outro lado* de uma reta ele não pode estar sobre ela. No entanto, o contexto de demonstração é tido como suficientemente claro para que considere ambos como pontos *externos* à reta dada. Os diagramas, mais uma vez, podem ser vistos aqui como responsáveis por tais restrições, uma vez que excluem automaticamente casos indesejáveis ou simplesmente irrelevantes.

Como seria de se esperar, com o auxílio do texto as informações que podem ser tiradas do diagrama aumentam. De acordo com a natureza das linhas que limitam uma região e com o número de pontos identificados, por exemplo, pode-se dizer de que figura se trata, se um triângulo, quadrilátero, pentágono, etc. Contudo, faltaria informação textual para dizer quando um triângulo é equilátero, isósceles ou escaleno, ou quando um quadrilátero é um quadrado, um retângulo ou um paralelogramo. Do mesmo modo, o diagrama deve permitir o reconhecimento de linhas de acordo com suas peculiaridades: uma reta nunca poderá encerrar espaço, enquanto que um círculo sempre deve fazê-lo. Mas esta possibilidade já não é independente da parte textual do sistema, uma vez que é ali que se pode constatar que estes dois são os únicos tipos de linha disponíveis no sistema.

O estabelecimento de relações de igualdade, via de regra, deve ser feito mediante permissão textual. No entanto, em alguns casos é possível inferir esta relação sem possibilidade de erro, baseando-se apenas na aparência do diagrama. Isso ocorre quando o diagrama apresenta uma coincidência não-acidental entre os elementos que estão em questão. Estes casos são de dois tipos: quando duas figuras compartilham um mesmo componente (como no caso da base BC nos triângulos ABC e DBC, em I,6); e quando uma determinada figura pode ser vista como uma composição de outras figuras, de modo que a soma destas partes coincide com o todo (o que ocorre, na mesma proposição I,6, com o triângulo ABC e os triângulos DBC e DCA, ou na demonstração de I,2, onde o segmento DF resulta do prolongamento de DB, e que portanto este é menor que aquele, por estar nele contido).

Algo semelhante acontece com certos casos de desigualdade. Embora a aparência do diagrama também não seja, em geral, suficiente para autorizar afirmações de desigualdades entre seus elementos, os casos em que estes

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

elementos devem necessariamente ser representados no diagrama de maneira sobreposta formam uma exceção à regra. Nestes casos, também trata-se de uma coincidência no diagrama, mas a operação em jogo não é a de adição mas sim a de subtração das partes com relação ao todo. Dito de outro modo, o todo subtraído de uma parte será igual à parte restante, e, assegurado que não se pode falar de uma parte sem dimensão ou nula, o todo deve ser maior que qualquer uma das partes. Por conta disso, em I,6 Euclides pode efetuar a *reductio*, pois mesmo que não seja possível encontrar na parte textual da demonstração duas sentenças que se contradigam, o diagrama apresenta um triângulo como parte de outro – como necessariamente desiguais, portanto – enquanto o texto afirma uma igualdade entre eles. A desigualdade não é afirmada no texto, mas inferida a partir do diagrama. Portanto, a contradição se dá entre uma atribuição que é feita de maneira explícita no texto e outra que é inferida a partir do que o diagrama mostra de maneira explícita.

Tanto para as igualdades quanto para as desigualdades, portanto, a condição para que o diagrama possa ser usado no seu estabelecimento é a de que os termos envolvidos estejam dispostos num mesmo local no diagrama, de maneira que um esteja incluído no outro, ou que estejam dispostos contiguamente. Como isso nem sempre será possível no diagrama inicial da proposição, algumas construções são necessárias, de maneira que os elementos a serem julgados iguais ou desiguais possam ser finalmente comparados no diagrama[25]. A comparação, no caso, será sempre relativa – não é possível, por meio deste expediente, determinar qual dentre duas retas quaisquer é a maior. Faz-se necessário que elas possam ser relacionadas de modo que uma revele-se igual a uma parte da outra, ou que ambas sejam iguais a uma terceira, por exemplo, para que a relação entre elas se determine.

Por esta razão o transporte das figuras no plano é imprescindível para que possa se desenvolver um raciocínio geométrico nos moldes euclideanos. Não se deve, no entanto, entender o transporte como envolvendo a manipulação do diagrama *in concreto*, ou alguma destreza no uso de régua e compasso, por exemplo. Antes, o transporte que está em jogo, como já foi sugerido anteriormente, deve ser entendido em termos de cópia ou transferência e não como transporte mecânico – já que os elementos do diagrama não são movidos,

[25] Situação análoga àquelas observadas nos métodos analíticos, nos quais dois elementos quaisquer, inicialmente sem qualquer relação aparente entre si, podem ser relacionados por meio das equações que os definem e de suas implicações.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

de todo. As proposições classificadas como problemas, responsáveis pela execução desta tarefa, servem para mostrar como, nas sucessivas transformações diagramáticas que são permitidas, determinadas propriedades e relações podem, por assim dizer, migrar de uma parte a outra do diagrama de acordo com o que o texto estipula. Assim, quando o objetivo é a demonstração de uma igualdade ou desigualdade, as relações entre dois diagramas separados vão sendo transferidas de modo que, ao final, elas possam ser observadas simultaneamente em um mesmo local. Um excelente exemplo deste trabalho de transferência de magnitudes pode ser observado na demonstração de I,5, relacionado aos ângulos da base e sob a base do triângulo dado.

Com relação à intersecção de linhas no diagrama, alguns casos especiais podem ser diagramaticamente assegurados. A intersecção entre retas e círculos, por exemplo, apenas pode ser lida do diagrama se determinadas exigências forem cumpridas. De maneira geral, este é um tipo de intersecção entre duas linhas que não pode ser visto como uma característica co-exata do diagrama. Com efeito, uma reta que corta um círculo pode fazê-lo de maneira acidental, tal que um diagrama alternativo poderia apresentá-la como apenas tocando o círculo ou como não possuindo nenhum ponto em comum com este. Este é o caso, por exemplo, do segmento BC e do círculo KLG na proposição I,2, para os quais Proclo oferece construções alternativas em que eles não se intersectam[26]. Mas há casos em que necessariamente o ponto de intersecção deve existir, e apenas estes casos são autorizados pela prática euclideana. No Livro I, tais intersecções podem ser lidas do diagrama apenas nos casos em que a reta em questão é o raio do círculo, ou seu prolongamento[27]. Ora, para a construção de um círculo é necessário um segmento de reta, cujas extremidades marcarão o centro e um ponto na circunferência do mesmo, respectivamente. Assim, uma linha reta que contenha este segmento necessariamente intersectará a circunferência do círculo com ele construído. Na mesma proposição I,2, a linha DE necessariamente cortará o círculo GKL, pois o ponto D é o centro deste círculo. Portanto, deve-se dizer que nos casos em que uma determinada reta passa pelo centro de um determinado círculo (fato que depende em larga medida de estipulação textual), pode-se inferir pela aparência do diagrama que a mesma intersecta a circunferência deste círculo.

[26] Cf. Heath 1956, p. 245.

[27] No Livro III este critério também será estendido para casos em que um ponto da reta é estipulado como estando no interior do círculo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

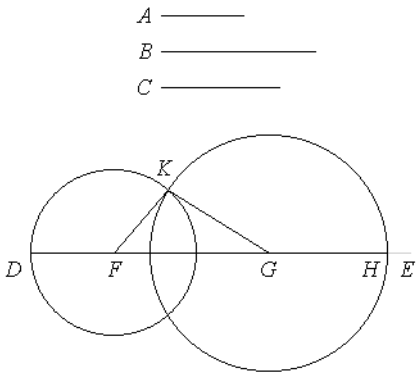
A razão para o reconhecimento de intersecções entre dois círculos, tal como em I,1, parece não ser muito diferente desta. Há somente um caso em que dois círculos necessariamente se intersectarão (e, pelas peculiaridades desta figura, eles se intersectarão em dois pontos determinados), a saber, quando o centro de um está sobre a circunferência do outro[28]. Em I,1, o círculo DBC possui seu centro A sobre a circunferência do círculo ACE, e vice-versa. Os pontos de intersecção dos círculos, deste modo, podem ser tidos como elementos passíveis de serem utilizados no decorrer da demonstração, embora um já seja suficiente para a construção. Como os dois círculos compartilham o mesmo raio, e o ponto de intersecção pertence a ambas as circunferências, simultaneamente, é lícito dizer que nele as extremidades dos raios dos dois círculos se tocam, ou seja, que ele é um ponto nas extremidades dos segmentos que determinam os raios destes círculos – de acordo com o que determina a Def. 3. O ponto C nesta demonstração representa, neste sentido, o primeiro dos casos de coincidência a partir dos quais é possível extrair, pelo diagrama, relações de identidade. Um ponto da extremidade do raio do círculo DBC sobre a circunferência é igual, por ser coincidente, a um ponto da extremidade do raio do círculo ACE.

A proposição I,22, no entanto, apresenta um caso em que um ponto de intersecção entre dois círculos é utilizado sem que se cumpra a exigência enunciada no começo do parágrafo anterior. Este fato também motivou críticas por parte dos comentadores, a começar por Proclo[29]. A proposição demonstra a possibilidade de construção de um triângulo a partir de três segmentos quaisquer, observada a condição de que dois deles somados sempre sejam maior que o restante. Uma vez colocados lado a lado, de maneira contígua sobre uma linha reta, os segmentos DF, FG e GH (iguais, respectivamente, aos segmentos dados A, B e C), pede-se que se descrevam círculos DKL e KLH usando-se como raios os segmentos das extremidades, DF e GH.

[28] O critério para estes casos também deve ser estendido, no Livro III, para casos análogos aos mencionados na nota anterior.

[29] Cf. Heath 1956, pp. 293-294.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA



Embora não se enquadre no requisito acima descrito, a intersecção fica garantida por conta das relações que devem ser mantidas entre os segmentos. Se os círculos apenas se tocassem em um ponto K (isto é, possuíssem apenas um ponto em comum, sem se intersectarem), isto implicaria que DF+GH=FG (caso se tocassem externamente), ou que DF=GH+FG (caso se tocassem internamente). Os raios dos dois círculos somados coincidiriam com o segmento restante, ou o raio de um deles coincidiria com a soma do segmento central e o raio do outro círculo. Em ambos os casos, seria possível ler do diagrama uma relação de identidade que contraria a restrição imposta pelo enunciado da proposição a respeito das magnitudes relativas dos segmentos escolhidos. Por fim, se eles nem sequer se tocassem, isto implicaria que DF+GH<FG (a soma dos raios seria ainda apenas uma parte do segmento central, caso os círculos estivessem separados), ou que DF>GH+FG (um dos raios seria maior que a soma do outro raio com o segmento central, caso um círculo estivesse totalmente contido no outro), o que também não atende os requisitos para a construção. Assim, a existência do ponto de intersecção pode ser inferida da aparência do diagrama porque os círculos envolvidos devem possuir pelo menos uma parte de seus raios em comum. Afinal, se o segmento que separa seus centros não deve ser nem maior nem igual à soma de seus raios, devendo ser menor que ela, então necessariamente os diagramas dos círculos irão se sobrepor parcialmente – e portanto terão pontos de intersecção. Assim, pode-se reformular o requerimento acima apresentado e, além dos casos em que o centro de um círculo é um ponto sobre a circunferência do outro, também os casos em que dois círculos devem necessariamente compartilhar um segmento de seus raios constituem os casos em que os pontos de intersecção possuem existência diagramaticamente assegurada.

Finalmente, outro aspecto que um diagrama pode oferecer de maneira legítima no curso de uma demonstração euclideana diz respeito à intersecção

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

entre duas, e apenas duas, linhas retas. De duas retas quaisquer que o diagrama apresente de maneira indeterminada quanto à intersecção, vale lembrar, não se pode inferir a intersecção das mesmas, tanto quanto não se pode inferir do diagrama seu paralelismo. No entanto, nos casos em que a intersecção não é eliminável por meio do que Manders chama disciplina diagramática – a habilidade de se produzir diagramas adequados – a intersecção ou o ponto que ela determina pode ser utilizado sem prejuízo para a demonstração. Em I,10, na bissecção de uma linha reta finita dada, toma-se por garantido que a bissetriz do ângulo oposto à base a intersectará em um ponto, e que este estará localizado entre os extremos da base. Mas isto não pode trazer perigo para a demonstração porque, uma vez que se utilizem os diagramas em sua execução, tais características necessariamente serão explícitas em qualquer diagrama adequado para a situação representada.

A peculiaridade dos aspectos co-exatos é seu caráter intrínseco, por assim dizer, às características próprias do simbolismo diagramático. Como foi dito, os aspectos co-exatos são aqueles que aparecerão em qualquer diagramação, ou seja, sua eliminação é impossível de ser executada por refinamento do diagrama ou produção de configurações alternativas – respeitados, obviamente, certos requisitos mínimos para a produção dos diagramas. Por esta razão, são os únicos aspectos do diagrama que podem ser utilizados nas demonstrações sem risco de induzirem ao erro. De acordo com Manders, eles aparecem no curso de uma demonstração por meio de alguma estipulação textual ou a partir da interação de determinados elementos do diagrama, independentes de explicitação textual. As regiões circulares introduzidas pelo uso do Post. 3 em I,1 são um exemplo do primeiro tipo de aspectos co-exatos, e o ponto de intersecção dos dois círculos, um exemplo do segundo tipo.

A estabilidade dos aspectos co-exatos com relação a eventuais distorções ou deformações no diagrama pode variar de um caso para outro. De acordo com Manders, alguns aspectos como o surgimento de dois pontos de intersecção entre os círculos de I,1, podem ser observados até mesmo num diagrama severamente distorcido, enquanto outros aspectos, como a ordem de determinados pontos em uma linha, por exemplo, não sobrevivem a muitos abusos por parte de quem está traçando o diagrama. Em casos como estes últimos, embora haja uma ameaça real do que Manders denomina desarranjo ou

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

impotência do diagrama com relação à expressão do que está sendo tratado[30], a simplificação do diagrama ou o tratamento de casos separados são suficientes para afastar tal ameaça. Em suma, todo uso acidental do diagrama pode ser evitado mediante o que o autor chama de disciplina diagramática – a habilidade de se entender, produzir ou melhorar os diagramas utilizados nas demonstrações de maneira controlada[31].

Além daquilo que pode ser classificado como um aspecto co-exato, no entanto, nenhuma outra propriedade ou relação que os diagramas podem sugerir pode ser derivada sem autorização textual – e é por isso que não procede a alegação de que a prática demonstrativa euclideana não é rigorosa. Todos os demais componentes de uma demonstração euclideana devem ter sido introduzidos textualmente. E, como será visto adiante, na apresentação do trabalho de Netz[32], o texto das demonstrações euclideanas tampouco deixa a desejar com relação ao rigor e ao método. Por ora, deve ser ainda analisado o segundo grupo de atribuições que devem ser levadas em conta na demonstração com relação ao diagrama, a saber, aquelas que o texto apresenta como valendo a respeito de uma dada configuração diagramática – as atribuições *exatas*.

Como o autor bem descreve, enquanto os atributos co-exatos são *indicados nos* diagramas, os diagramas são *sujeitos aos* atributos exatos[33]. Para qualquer diagramação dos círculos em I,1, o ponto C pode ser indicado no diagrama, pois este necessariamente o apresentará. Já a igualdade dos lados do triângulo construído, cujo estabelecimento é o objetivo da proposição, não pode ser considerada da mesma maneira. Com efeito, a igualdade dos segmentos (entendidos como os traços fisicamente considerados) não seria observada nem na mais cuidadosa das diagramações. Tal preciosismo com relação aos

[30] Manders fala de *impotência* ou *desarranjo* quando o processo demonstrativo falha no cumprimento das expectativas que a prática suscita. Isto pode ocorrer quando não se tem um controle total sobre o que pode ou não acontecer no curso de uma demonstração, por exemplo. Para mais detalhes, cf. Manders 1995, pp. 82, 94.

[31] Este ponto será retomado adiante, quando for analisada a conhecida falácia supostamente engendrada pelo uso dos diagramas, segundo a qual todo triângulo é isósceles.

[32] Netz 1999.

[33] Manders ressalta, a este respeito, que nenhum diagrama indica todas as condições co-exatas e é sujeito a todas as exatas, e por esta razão são possíveis as provas por *reductio* em que texto e diagrama conflitam.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

diagramas, no entanto, não é de todo necessário na prática euclideana – embora não seja raro ver comentadores pressupondo-a como necessária para a prática euclideana[34]. Este tipo de relação cabe apenas ao texto estipular, nunca podendo ser inferida a partir da aparência do diagrama.

Muitos atributos possuem uma natureza mista, em parte exata e em parte co-exata. Dizer que um determinado diagrama representa um triângulo inclui o reconhecimento de uma região limitada por linhas (um componente co-exato, já que é apresentado por qualquer diagrama que pretenda representar uma figura), e também o reconhecimento de que trata-se de três segmentos de reta (um componente exato, cuja apresentação diagramática seria impossível por questões práticas – tanto quanto se sabe, não há como se obter uma instância empírica de uma linha reta). A distinção entre atributos exatos e co-exatos poderia ser vista desde a seguinte perspectiva: àquelas noções que podem ser vistas, para os devidos fins, como instanciadas no diagrama, correspondem os atributos co-exatos; já às que são incapazes de serem exemplificadas pelos diagramas em pelo menos um caso específico, correspondem os atributos exatos. A parte textual, desta forma, teria a função de acrescentar informações cuja representação é impossível ou inadequada na parte diagramática. Mas mesmo que os aspectos exatos nunca devam ser lidos do diagrama, tanto pela imperfeição destes quanto pelo fato de já estarem disponíveis no texto, os diagramas devem ser apresentados de acordo com as restrições que estes aspectos impõem, a fim de que não sejam gerados aspectos diagramáticos espúrios. Assim, linhas exageradamente tortas ou curvadas devem ser rejeitadas porque podem interferir na leitura de aspectos co-exatos (surgimento de regiões, por exemplo), mas não porque falham em instanciar a propriedade que o texto lhes atribui.

Assim como há elementos cuja apresentação cabe apenas ao diagrama, há também os que são exclusivamente de competência do texto. As atribuições que cabe somente ao texto apresentar incluem relações de igualdade entre não coincidentes (segmentos, figuras, áreas, etc.), proporcionalidades, o caráter de ângulos (se são retos, por exemplo), de linhas (se pertencem a retas ou círculos), e de figuras (se se trata de um quadrado ou de um quadrilátero qualquer, por exemplo), a intersecção de três linhas, tangências, entre outros. Nas palavras de Manders, os aspectos exatos são aquelas que, na geometria analítica, podem ser expressos por meio de equações algébricas, muito embora

[34] Cf., por exemplo, Kline 1972, p. 175.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

uma equação algébrica não esgote o significado de uma noção como a de reta ou círculo, por exemplo – tanto que tais noções não são dispensadas, mas sim tomadas como primitivas na geometria analítica a fim de que se torne possível relacionar o plano coordenado à geometria euclideana[35].

Uma vez que é pelo texto que são autorizadas inferências de congruências de não coincidentes, bem como transitividade de propriedades e relações, percebe-se que a maior parte das demonstrações depende mais do texto do que dos diagramas. Por outro lado, como a manipulação dos diagramas pode contribuir de maneira independente e regrada no curso de uma demonstração, percebe-se que não há como considerá-la um meio menos importante ou rigoroso para a prática.

Como foi visto, no entanto, as críticas ao uso de diagramas não parecem levar em conta estes fatores. Greenberg, por exemplo, após apresentar os axiomas da geometria plana que serão utilizados em sua obra (incluindo os que Euclides teria falhado em explicitar), o autor alerta para o "perigo dos diagramas"[36]. Para ele, as distorções no diagrama podem dar origem a resultados falsos, tal como ocorre no caso da demonstração falaciosa de que todos os triângulos são isósceles.

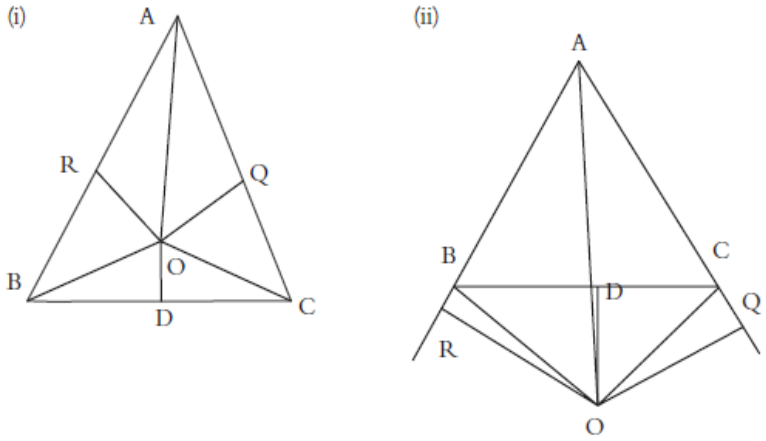
Esta famigerada demonstração requer, dado um triângulo ABC, bissecar o ângulo BAC, e bissecar o segmento BC a ele oposto. As bissetrizes podem ou não possuir um ponto de intersecção. Se não possuem, elas são ou coincidentes ou paralelas, e em ambos os casos o triângulo deve ser isósceles, pois a bissetriz do ângulo BAC será perpendicular a BC, dividindo o triângulo em dois e possibilitando derivar a igualdade dos lados AB e AC pela aplicação do critério ângulo-lado-ângulo para identidade de triângulos. Se, por outro lado, possuem um ponto de intersecção O, há três casos possíveis: O cai no interior do triângulo; O cai sobre o triângulo; ou O cai fora do triângulo. Para cada caso, pede-se que sejam construídas, a partir do ponto de intersecção O, a perpendicular OR, com relação a AB, e a perpendicular OQ, com relação a AC. Nos casos em que o ponto O esteja fora ou dentro do triângulo, pede-se ainda que sejam traçadas as retas OB e OC. Os diagramas resultantes seriam, respectivamente, os seguintes:

---

[35] Manders apresenta a relação de proporção como apenas valendo para segmentos (como um atributo exato), embora ao que tudo indique isto também valha para proporções entre áreas, ângulos ou figuras (cf. Manders 1995, p. 92).

[36] Cf. Greenberg 1972, pp. 48-49.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

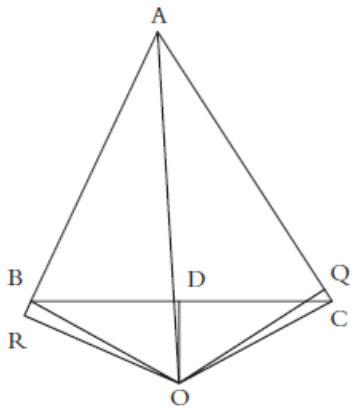


Como RAO=QAO (duas metades do ângulo RAQ), ORA=OQA (por serem retos) e AO é comum, segue-se que os triângulos AOR e AOQ são iguais. Em particular, OR=OQ e AR=AQ. Por possuirem dois lados iguais a dois lados (BD=DC e DO comum), e os ângulos por eles contidos (DOB=DOC), os triângulos BDO e CDO também são iguais. Em particular, BO=CO. Por fim, se BO=CO, também serão iguais os triângulos BOR e COQ, por possuirem iguais entre si dois lados (BO=CO e OR=OQ) e um ângulo (BRO=CQO). Em particular, BR=CQ. Logo, AB=AR+RB=AQ+QC=AC ou, para o caso em que D é externo, AB=AR-RB=AQ-QC=AC). Ficaria demonstrado, deste modo, que todo triângulo é isósceles.

Ora, à luz da interpretação de Manders uma crítica deste tipo torna-se quase ingênua. Afinal, o sucesso da demonstração falaciosa depende de fatores que não passariam despercebidos por um bom discípulo de Euclides[37]. Se a demonstração é vista levando-se em conta os requisitos da disciplina diagramática, ela é deficiente porque não são analisadas todas as configurações possíveis para o diagrama, sendo que a configuração ignorada é justamente a que refutaria o resultado, a saber, aquela em que os pontos de intersecção R e Q das perpendiculares aos lados AB e AC encontram-se-iam em posições alternadas com relação a estes segmentos, de modo que se R caísse sobre AB, Q teria de cair no prolongamento do lado AC, e vice-versa. Assim, ter-se-ia um dos pontos no interior e outro no exterior do triângulo ABC, e as equações AB=AR+RB=AQ+QC=AC e AB=AR-RB=AQ-QC=AC não seriam verdadeiras nesta configuração, o que bastaria para que se refutasse o resultado.

[37] Talvez a obra de Euclides intitulada *Pseudaria* ou *Pseudographemata*, da qual se tem conhecimento por conta de menções por parte de comentadores antigos como Proclo (que o chamava *Livro das Falácias*), servisse para aguçar a capacidade de se analisar demonstrações falaciosas deste tipo (cf. Heath 1921, pp. 430-431).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA



Se, por outro lado, são levadas em consideração as regras que controlam o uso de alguns aspectos co-exatos, a suposta demonstração também revela-se deficiente porque as supostas coincidências diagramáticas entre o todo e a soma das partes (no caso o lado AB ou AC e os segmentos AR e AB, ou AQ e QC) não são observadas em todas as diagramações possíveis, e não podem ser utilizadas com a generalidade pretendida. Ao final, a falácia revela-se minimamente convincente apenas quando os diagramas são visualmente parecidos com triângulos isósceles. Em casos como estes, no entanto, a prática sugere que é prudente que se considere justamente os casos mais diversos, afinal espera-se que os resultados demonstrados valham em geral, e não apenas para os casos mais óbvios.

Como se pode ver, a distinção apresentada por Manders entre aspectos exatos e co-exatos das demonstrações euclideanas permite que sejam refutadas aquelas críticas ao uso de diagramas que são elaboradas supondo que pseudo-demonstrações como a que foi vista acima estão livre de defeitos no uso que fazem dos diagramas, ou poderiam convencer sem mais a alguém que estivesse a par das regras em uso. O contra-exemplo, no entanto, não é mais perigoso para os métodos da geometria do que um argumento mostrando que todos os números são ímpares com base em determinadas representações algébricas poderia ser para a teoria de números.

Manders oferece uma boa justificativa para o sucesso da prática euclideana, mostrando que o uso dos diagramas obedece critérios tão rigorosos quanto os que estão em voga para o uso de sentenças ou fórmulas em uma demonstração. Assim, ao mesmo tempo que admite que alguns aspectos dos diagramas são vitais para as demonstrações euclideanas, ele oferece argumentos para que seu uso seja considerado um recurso legítimo e incapaz de ameaçar a confiabilidade das demonstrações. As inferências diagramáticas – isto é, aquelas que de alguma forma dependem da visualização do diagrama –

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

são autorizadas apenas quando baseiam-se em aspectos co-exatos, que são aqueles que determinam a aparência do diagrama, em sentido estrito.

A obra de Manders, como já foi dito na introdução deste capítulo, marca um rompimento com a visão dominante no século XX a respeito da obra euclideana. Não seria exagero, neste contexto, falar da queda de um mito no que diz respeito ao uso dos diagramas em Euclides. No artigo acima analisado encontra-se uma nova abordagem, a qual encara de maneira exitosa o problema posto pela utilização dos diagramas. Manders propõe uma análise filosófica das razões pelas quais os diagramas também demonstram. Que eles assim o fazem, é um fato evidente diante do sucesso da prática. Faltava apenas que se respondesse por que isto é possível. Mas o esforço de Manders apenas lançou uma base sobre a qual uma interpretação rigorosa das demonstrações de Euclides – tal como elas realmente eram apresentadas na prática, ou pelo menos tentando aproximar-se deste ideal – poderia ser levada a cabo. Assim, utilizando-se da descrição das demonstrações euclideanas oferecida por Manders, e principalmente da distinção entre atribuições exatas e co-exatas, Avigad, Mumma e Dean apresentam, já no final da primeira década do século XXI, um sistema formal no qual é apresentado de maneira mais fidedigna do que a de Pasch, Hilbert ou Tarski, a geometria contida nos Livros I-IV dos *Elementos*.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

4.3.
Um novo sistema formal para os *Elementos*

O trabalho de Avigad, Dean e Mumma busca oferecer uma interpretação formal dos *Elementos* de uma maneira tal que as assim chamadas inferências diagramáticas – aquelas que dependem dos atributos co-exatos, também possuam uma contrapartida formal no sistema. De acordo com eles, este tipo de inferência perdeu prestígio, principalmente após a crise de fundamentos do século XIX, por dois motivos principais: 1) por ser necessário o recurso à intuição para que se possa averiguar a correção destas inferências; e 2) por faltarem recursos, do ponto de vista moderno, para que se atribua generalidade aos resultados obtidos por seu intermédio.

As axiomatizações de Pasch, Peano e Hilbert, no século XIX (que os autores caracterizam como *informais*), e a axiomatização de Tarski, no século XX (considerada *formal* pelos autores), partiram de uma concepção de demonstração para a qual apenas os axiomas e as regras de inferência formuladas explicitamente devem ser utilizados na derivação dos teoremas. Esta visão, no entanto, fez com que estas axiomatizações soassem mais como o estabelecimento de um novo paradigma para a geometria do que propriamente reconstruções da geometria de Euclides, num sentido estrito. Com efeito, na geometria de Hilbert não há círculos, itens essenciais na geometria de Euclides. E na geometria de Tarski, os únicos objetos utilizados são pontos. Isto já serve para mostrar o quão distantes tais formalizações estão com relação à prática que lhes deu origem. E, mesmo que hajam falhas nos raciocínios euclideanos de acordo com o paradigma moderno, a falta de resultados errôneos na geometria de Euclides, por mais que seus métodos fossem inadequados, deveria sugerir uma abordagem diferente, mais próxima tanto em modos de raciocínio como de apresentação, da geometria presente nos *Elementos*. Para isso seria necessário apenas que se estabelecessem como axiomas aquelas assunções implícitas que Euclides utiliza, sem que com isso fosse renegada a importância da dimensão diagramática para as demonstrações.

O objetivo de Avigad, Mumma e Dean é justamente oferecer uma alternativa a estas formalizações, um tratamento formal no qual as inferências não sejam diferentes, ou pelo menos não muito diferentes, daquelas que se encontram nos *Elementos*. Particularmente, sem ignorar a importância dos diagramas – uma vez que, de acordo com o que se argumentou acima, eles são essenciais para tais inferências. Para que isto se torne possível, a distinção entre

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

atribuições exatas e co-exatas, devida a Manders, é utilizada como parâmetro para a inclusão, na apresentação formal do sistema, daqueles aspectos cuja aparição, nos *Elementos*, depende de alguma maneira da visualização do diagrama. Como foi visto, no que diz respeito a relações ou propriedades de caráter métrico, as quais são expressas nas atribuições exatas (que os autores preferem chamar *asserções métricas*), os diagramas são completamente dispensáveis. Mas a geometria de Euclides utiliza-se em larga escala de relações ou propriedades topológicas, para cuja expressão os diagramas são o meio mais adequado.

O sistema formal *E*, criado para representar a maneira pela qual se dão as inferências nos *Elementos*, é construído sobre o sistema batizado de *Eu*, elaborado por Mumma e apresentado em sua tese de doutorado[38]. Nestes sistemas os diagramas são tratados como objetos confiáveis e passíveis de serem introduzidos no curso de uma demonstração com vistas a permitir determinadas inferências. A generalidade de um resultado obtido através do raciocínio sobre uma configuração diagramática determinada justifica-se pela sua possibilidade de aplicação a toda uma classe de diagramas que compartilham a mesma informação do ponto de vista diagramático.

O recurso a classes de equivalência entre diagramas faz com que seja possível evitar a ramificação de casos nas demonstrações – procedimento necessário, por exemplo, no sistema de Miller[39], no qual a generalidade de um resultado depende da análise de todas as configurações diagramáticas possíveis e relevantes para o caso em questão. De acordo com os autores, apesar de se assemelharem em seus objetivos, o sistema de Miller difere de *E* porque reproduz com menos fidelidade a maneira como Euclides efetivamente procede (ou seja, sem considerar casos distintos para uma mesma proposição). Em *E* a consideração de casos é substituída pela observância de um conjunto de regras gerais que estipulam quando determinadas características lidas de um diagrama particular podem ser consideradas como válidas em geral. Além de uma maior proximidade com o sistema euclideano, os autores alegam que seu sistema é elaborado com vistas a oferecer, ao final, demonstrações de correção e completude relativas a uma semântica apropriada – a saber, a das construções com régua e compasso, construída sobre um subconjunto dos números reais. Assim, os autores esperam, ao mesmo tempo, oferecer um sistema formal que

[38] Mumma 2006.

[39] Miller 2008.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

possibilite uma melhor descrição dos procedimentos de prova utilizados nos *Elementos*, bem como demonstrações de caráter meta-teórico para este sistema.

Um aspecto importante da formalização proposta por Mumma é a utilização dos métodos de dedução natural, que de acordo com os autores, reproduz mais fielmente a natureza das demonstrações Euclideanas. Como bem observa Macbeth[40], os postulados, definições e noções comuns se assemelham mais a regras de transformação que regulam os passos da demonstração. Por esta razão, sustenta a autora, o sistema euclideano é melhor visto como um sistema de dedução natural do que um sistema axiomático à maneira hilbertiana.

Após uma descrição breve e geral da estrutura das demonstrações, de suas subdivisões e dos tipos de proposições que são encontradas nos *Elementos*, os autores observam que, embora sejam efetivamente utilizados nas demonstrações, os diagramas são dispensáveis para a comunicação das mesmas. Embora soe um tanto estranha, a afirmação tem uma boa justificativa. Em realidade, não há nenhum indício de como eram produzidos e vistos os diagramas na época em que Euclides escreveu os *Elementos*. Não obstante este fato, considera-se, em geral, que as demonstrações de Euclides tenham chegado ao tempo presente de maneira mais ou menos parecida com a que Euclides as teria elaborado. Ora, para que isto tenha acontecido seria necessário ou que o diagrama fosse dispensável – o que não parece ser o caso, dada a presença das inferências diagramáticas no sistema – ou que ele fosse recuperável a partir do texto[41]. De fato, não é difícil reconstruir o diagrama, pois mesmo os dados que são apresentados exclusivamente de maneira diagramática são facilmente obtidos uma vez que se aja da maneira segundo a qual o texto determina. O ponto de intersecção entre os círculos de I,1, neste sentido, seria facilmente percebido uma vez que se executassem as operações estipuladas pelo terceiro postulado. Isto não implica, portanto, que se deva dispensar de todo a dimensão diagramática. Para que seja notada a necessidade do diagrama quando se trata de entender a demonstração, os autores propõem que se tente acompanhar uma demonstração euclideana somente por via textual, ou seja, sem sequer tentar imaginar um diagrama que comporte-se de acordo com o que está sendo dito no texto.

[40] Macbeth 2009.

[41] Netz 1999 é citado como base para a última tese.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

Portanto, embora desnecessários para a comunicação de uma demonstração, os diagramas não podem ser vistos como dispensáveis. Afinal, embora uma versão exclusivamente textual da demonstração, acrescida quando necessário das assumpções implícitas que o diagrama se encarrega de apresentar, possa ser vista como suficiente para que a demonstração se dê (no sentido de poder ser executável de maneira mecância), há algo nela que a torna irremediavelmente diagramática. Nas palavras dos autores, o diagrama proporciona uma apreensão intuitiva do que está sendo dito no texto da demonstração, a qual de certo modo é o que a caracteriza como geométrica, e não aritmética, por exemplo[42]. Desde este ponto de vista, a reconstrução formal de Hilbert não serviria a alguém que quisesse fazer *geometria* propriamente dita, pois lhe faltaria um componente essencial para a prática, o qual apenas o diagrama, desenhado ou imaginado, é capaz de apresentar – a este propósito, todavia, tampouco a reconstrução proposta serviria, já que não há nada de propriamente diagramático no sistema *E*.

Como exercício é sugerido que se examine a seguinte sequência, que poderia ser vista como parte de uma demonstração: sejam A e B dois pontos distintos em uma linha, sejam C e D dois pontos em lados opostos de AB; em seguida, seja traçada a linha CD; seja então E o ponto de intersecção de AB e CD. O ultimo passo, como pode-se observar, é a explicitação de uma característica que o diagrama apresenta de maneira direta e permitida (um aspecto co-exato). Para que ela seja aceita neste contexto exclusivamente textual, no entanto, é necessário algum tipo do que se poderia chamar *raciocínio diagramático*, algo que requeira ao menos a imaginação da representação diagramática da demonstração. E, ainda que se a aceite apenas por razões combinatoriais a partir dos axiomas, não se pode dizer que é possível entendê-la por esta via.

Se alguém é questionado sobre se o ponto E está necessariamente entre C e D, baseando-se na sua apreensão intuitiva da situação esta pessoa provavelmente responderá de modo afirmativo. Se, no entanto, a pergunta é sobre se E está necessariamente entre A e B, uma resposta afirmativa indicaria que a pessoa questionada também seria seduzida pelo diagrama na falácia dos triângulos isósceles. Mas não se pode condenar o raciocínio diagramático por conta de eventuais deslizes por parte dos que se dedicam a praticá-lo. Mais

[42] Avigad, Dean & Mumma 2009, pp. 7-9.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

propriamente, o que se deve apresentar é uma noção rígida de inferência diagramática que sancione a primeira resposta, mas proíba a segunda.

Assim, após este exercício duas conclusões importantes são estabelecidas:

1) A inferência diagramática não diz respeito à instanciação física que o diagrama representa. Ela versa sobre características gerais e comuns a todos os diagramas que podem ser usados num determinado contexto. O diagrama é um artefato, no sentido atribuído por Manders, e como tal deve ser usado apenas de determinadas maneiras. Portanto, as inferências diagramáticas autorizadas são as que seriam possíveis em qualquer configuração, e de acordo com o que é dado.

2) A instância física do diagrama não contém toda a informação relevante para a inferência. Há ainda a necessidade de que se entenda o modo como as construções podem ser efetuadas (pelo que se perceberia que o ponto E poderia estar sobre o prolongamento de AB, e portanto não entre A e B, por exemplo), o papel das letras na referência cruzada entre texto e diagrama (pelo que se entenderia que a troca dos nomes dos pontos A e B com C e D, respectivamente, inverteria a ordem das respostas afirmativa e negativa para as perguntas feitas), e assim por diante.

Até este ponto, embora alguns avanços tenham sido apresentados, não se está distante dos resultados já alcançados por Manders. As inovações mais significativas são apresentadas na sequência, quando são descritas as regras segundo as quais se pode determinar quando uma determinada característica topológica de um diagrama particular pode ser considerada de caráter geral, podendo assim ser utilizada numa inferência. Por meio da estipulação destas regras os autores pretendem evitar a proliferação de casos que se observa no sistema de Miller, e que por isso o distanciam do original euclideano. Em *E* o diagrama será tomado, para todos os efeitos, como a coleção de tais aspectos gerais cujo uso possibilita as inferências diagramáticas – e neste ponto o sistema se diferencia também de seu antecessor *Eu*, no qual os diagramas contêm, além destes aspectos gerais, aspectos acidentais que a escolha de um diagrama particular inevitavelmente acarreta. Disso se deduz que, apesar de ser dedicado a representar as demonstrações euclideanas, o caráter formal de *E* acaba por também deixar de lado os diagramas enquanto entidades físicas, concretas. Por isso, tal como acontece nos *Grundlagen*, os diagramas não são efetivamente utilizados para além de um papel exemplificador.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

É importante ressaltar, no entanto, que o sistema de Miller e o sistema *Eu*, de Mumma, se aproximam mais de Euclides no que diz respeito ao uso efetivo dos diagramas, que em *E* são tratados de maneira abstrata, ou seja, não como figuras geométricas, mas apenas enquanto objetos portadores de determinadas informações – do mesmo modo que a parte textual também é ocultada com vistas a facilitar a compreensão das demonstrações propriamente ditas. Deste modo, não apenas em Hilbert, mas também em Avigad e Mumma, os diagramas não são usados enquanto símbolos. Ambos, no entanto, procuram construir sistemas que possam ser vistos como uma apresentação linguística da geometria, revelando a estrutura de suas demonstrações, e não tanto seu conteúdo. A diferença está no fato de que Hilbert não considera o diagrama como parte das demonstrações, uniformizando as fontes de dados como exclusivamente textuais, enquanto Avigad e Mumma também consideram o diagrama como fonte de dados para a demonstração.

Antes da apresentação de *E*, uma análise da forma lógica das demonstrações euclideanas é oferecida, a qual merece atenção. A primeira característica apontada é a de que as demonstrações são construtivas, uma vez que os equivalentes a afirmações de existência (que aparecem nos problemas) sempre requerem a construção do objeto cuja existência está em questão. Por esta razão, não é necessário todo o aparato da lógica clássica para a reconstrução formal destas demonstrações, mas apenas um fragmento construtivo dela.

As proposições classificadas como teoremas podem ser lidas, desde um ponto de vista moderno, como contendo um quantificador universal (“Para todo triângulo, a soma de seus ângulos internos é igual a dois retos” – Prop. I,32). E aquelas classificadas como problemas, contém também um quantificador existencial implícito (“Para todo segmento de reta existe um ponto que o divide em duas partes iguais” – Prop. I,10). Mas, para além da enunciação, a demonstração procede de maneira livre de quantificadores. A sequência de passos de uma demonstração euclideana pode ser tratada em termos de fórmulas atômicas e negações de fórmulas atômicas. Por esta razão os autores chegam a afirmar que as demonstrações de Euclides não são apenas livres de quantificadores, como também virtualmente livres de lógica – já que o número de operações lógicas efetuadas é bastante reduzido. As exceções seriam os usos da lei de tricotomia (dois objetos do mesmo tipo são iguais, ou um deles é maior que o outro) e da regra do absurdo, as quais envolvem um pouco mais de sofisticação em termos lógicos.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

Uma diferença na sequência de passos das demonstrações de Euclides com relação ao sistema *E* diz respeito ao fato de que, no primeiro, a fase construtiva (*kataskeue*) sempre precede a fase dedutiva (*apodeixis*), ao passo que no sistema formal isto não é necessário – talvez porque não é necessária a construção física de um diagrama. De acordo com Avigad, tal divisão é mais uma escolha estilística do que uma necessidade lógica. Cabe observar aqui que em Euclides também é possível que sejam feitas algumas construções, seguidas de algumas deduções, e em seguida sejam feitas novas construções seguidas de novas deduções (desde que em cada estágio dedutivo sejam inferidas apenas fórmulas que as construções já efetuadas autorizam), pelo que a alegada diferença entre os dois sistemas não é algo tão notável como os autores supõem.

Com relação às assim denominadas *assunções de não-degeneratividade*, que geralmente são tidas como necessárias em Euclides para que sejam assegurados resultados como I,4, sua ausência tanto em Euclides quanto em *E* justifica-se pelo fato de que os diagramas escolhidos são suficientemente gerais, no sentido de serem insensíveis a uma ampla gama de deformações. Além do mais, casos de possíveis deformações apenas merecem atenção quando são capazes de fornecer um contra-exemplo genuíno e interessante, o que não acontece nas configurações diagramáticas tratadas nos *Elementos*.

Finalizando a caracterização lógica da obra de Euclides, os autores salientam que não pretendem oferecer uma análise histórica de como as demonstrações ali presentes ganharam a forma pela qual são atualmente conhecidas. Tampouco visam uma exposição filosófica a respeito do estatuto epistêmico destas provas, ou uma investigação das virtudes pedagógica destas demonstrações, ou um tratamento computacional do sistema euclideano. Seu objetivo é, antes, oferecer uma análise do raciocínio diagramático presente em Euclides, isto é, uma abordagem que permita distinguir as inferências diagramáticas daquelas que independem do diagrama. As inferências ditas diagramáticas, vale lembrar, não são tidas como tais porque o diagrama deve ser utilizado para averiguar sua correção, nem tampouco porque ele é necessário para que se entenda o que está sendo dito. Sua característica distintiva, na visão dos autores, é que elas são tomadas como básicas, e podem ser feitas sem justificação textual. Assim, o sistema *E* tentará mapear estas inferências ao longo dos quatro primeiros livros dos *Elementos*.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

4.3.1.
O Sistema Formal *E*

A linguagem de *E* difere da linguagem dos *Elementos* no que diz respeito à representação textual das entidades geométricas utilizadas. Euclides utiliza apenas letras maiúsculas para fazer referência a seus objetos, de modo que ABC pode designar tanto um triângulo quanto sua área, ou ainda um círculo ou um segmento estendido. Já no sistema formal *E* haverá representações distintas para os tipos primitivos de objetos utilizados. Eles são classificados em seis tipos distintos: pontos, linhas e círculos; e segmentos, ângulos e áreas. Os três primeiros são tidos como primitivos, e os últimos são obtidos pela aplicação de determinadas funções a objetos do primeiro tipo (pontos). Por esta razão, na linguagem de *E* há variáveis apenas para os primeiros três tipos, sendo que os demais são representados por funções.

As variáveis são representadas na linguagem do seguinte modo:

- variáveis para pontos: *a, b, c,…*
- variáveis para linhas: *L, M, N, …*
- variáveis para círculos: α, β, γ, …

E os objetos derivados dos objetos primitivos são representados por funções cujas variáveis representam pontos, além de poderem ser representados por símbolos próprios. Eles devem ser entendidos em termos de magnitudes, de modo que segmento é entendido como a distância entre dois pontos, ângulo como a magnitude da inclinação entre duas retas que se intersectam, e área como o espaço encerrado por uma figura (no caso, serão considerados apenas os triângulos, já que as áreas das demais figuras podem ser decompostas em termos de áreas de triângulos):

- funções para segmentos: *segment(a,b)*
- funções para ângulos: *angle(a,b,c)*
- funções para áreas: *area(a,b,c)*

Pontos, linhas e círculos podem ainda apresentar algumas relações, representadas do seguinte modo:

- ponto sobre uma linha: *on(a,L)*
- dois pontos no mesmo lado de uma linha (nenhum deles sobre ela): *same-side(a,b,L)*
- relação de estar entre dois pontos numa linha: *between(a,b,c)*
- ponto sobre a circunferência de um círculo: *on(a,α)*
- ponto no interior de um círculo: *inside(a,α)*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

- ponto no centro de um círculo: *center(a,α)*

Para intersecções, entendidas como intersecções transversais, entre linhas e círculos há as seguintes representações:

- linhas que se intersectam: *intersects(L,M)*
- linha que intersecta um círculo: *intersects(L,α)*
- círculos que se intersectam: *intersects(α,β)*

Para os tipos que representam magnitudes são disponíveis as seguintes funções, relações e uma constante – valendo apenas para objetos do mesmo tipo:

- igualdade, identidade ou congruência: =
- adição: +
- menor que (estritamente): <
- constante para cada uma das magnitudes: *0*
- constante exclusiva para ângulos: *right-angle*

A constante *0* poderia ser dispensada se é levado em consideração o fato de Euclides utilizar somente magnitudes positivas. Mas ela é incluída no sistema com vistas a facilitar a formulação dos axiomas.

As *fórmulas* são definidas como é usual nos sistemas de lógica. Elas são entendidas como determinadas composições dos símbolos apresentados acima. Uma fórmula atômica ou a negação de uma fórmula atômica é denominada um *literal*[43], ou ainda uma *asserção*. Os literais são, portanto, aqueles fatos apresentados, por texto ou pelo diagrama, que podem ser utilizados nas derivações – que o centro de um círculo esteja dentro da área do mesmo, por exemplo. Literais contendo as funções de estar sobre (para pontos e linhas), estar entre, e estar do mesmo lado são denominadas *asserções diagramáticas*, e literais contendo as funções de estar sobre (para pontos e círculos), estar no interior e estar no centro, são denominadas *asserções métricas*.

Os teoremas em *E* possuem a seguinte estrutura:

$$\forall\, a,L,\alpha(\phi(a,L,\alpha) \rightarrow \exists\, b,M,\beta\ \psi(a,L,\alpha,b,M,\beta))$$

[43] Em inglês, *literal*.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

Onde ϕ representa uma conjunção de literais e ψ uma conjunção de literais ou o símbolo do absurdo. De acordo com esta estrutura, um teorema diz que dado um diagrama composto por pontos *a*, linhas *L* e círculos α, que satisfazem as asserções agrupadas em ϕ, é possível construir pontos *b*, linhas *M* e círculos β tais que as asserções em ψ são verdadeiras a seu respeito – ou tais que contradigam alguma asserção em ϕ , caso ψ esteja pelo símbolo do absurdo.

Na representação dos problemas, o conjunto das variáveis à direita da seta não pode ser vazio, uma vez que os problemas estabelecem a possibilidade de construção, a partir daqueles objetos dados ao início da demonstração, de novos objetos que obedecem determinadas condições. Já no caso dos teoremas, não haverá novas variáveis à direita da seta, uma vez que os objetos construídos no curso da demonstração serão utilizados apenas para demonstrar propriedades dos objetos dados – ou seja, as asserções em ψ dirão respeito apenas aos objetos que já estavam disponíveis, representados pelas variáveis à esquerda da seta. Se ψ é o símbolo para o absurdo, o teorema estabelece a impossibilidade da configuração descrita em ϕ.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

Com o quantificador universal implícito, e o conjunto de literais tomado como uma conjunção de asserções, as provas em *E* podem ser descritos como sequentes (onde *Γ* e *Δ* ocorrem como conjunções de literais[44]):

$$\Gamma \Rightarrow \exists\, b, M, \beta, \Delta$$

Aqueles passos nas demonstrações euclideanas que possuem um caráter *construtivo*, por introduzirem novos objetos, serão representados como a passagem de um sequente $\Gamma \Rightarrow \exists\, x\Delta$ (onde *x* é uma variável para os tipos primitivos, substituindo *b*, *M*, e *β*) para um sequente $\Gamma \Rightarrow \exists\, x,y\Delta,\Delta'$ (onde *y* é uma variável que não ocorre no primeiro sequente, e cujas propriedades são descritas em *Δ'*). Já os passos *demonstrativos* serão representados como a passagem de um sequente $\Gamma \Rightarrow \exists x\Delta$ para um sequente $\Gamma \Rightarrow \exists x,\Delta,\Delta'$, no qual não são apresentados novos objetos. Os arranjos de fórmulas que constituem as demonstrações serão representados em *E* como árvores, e não como sequências. E, com exceção das ramificações de casos que modelam o uso da lei de tricotomia e as provas por *reductio*, as árvores serão lineares, ou seja, cada sequente possuirá apenas um predecessor.

Os passos demonstrativos incluem as *inferências diagramáticas*, onde *Δ'* representa um conjunto de consequências diretas de asserções diagramáticas que ocorrem em *Γ* e *Δ*; as *inferências métricas*, onde *Δ'* representa um conjunto

[44] Diferente do que ocorre no cálculo de seqüentes de Gentzen, onde *Δ* deveria

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

de consequências métricas derivadas de asserções métricas que ocorrem em *Γ* e *Δ*; e as *inferências de transferência*, onde *Δ'* representa um conjunto de consequências métricas e diagramáticas diretas derivadas de asserções métricas e diagramáticas que ocorrem em *Γ* e *Δ*. No texto euclideano, como se sabe, as chamadas inferências diagramáticas raramente se fazem presentes. Em *E*, embora possam estar explícitas, estas inferências tampouco necessitam de explicitação, podendo ser derivadas diretamente dos dados por meio das regras que governam as inferências diagramáticas. Para cada um destes tipos de inferência, bem como para as construções e para os casos de superposição, são elencados conjuntos de regras de acordo com as quais elas podem ser feitas em qualquer momento da demonstração, e que serão apresentados no que segue.

a) Regras de construção

Uma construção é representada como um sequente da forma $\Pi \Rightarrow \exists\, x\Theta$,

onde as variáveis *x* não aparecem em Π, Π representa as condições que tornam a construção possível, *x* são os objetos construídos de acordo com a regra, e *Θ* representa as propriedades que caracterizam os objetos construídos. As regras de construção, portanto, autorizam a entrada de novos objetos no diagrama, alguns dos quais são determinados de maneira unívoca (uma reta entre dois pontos determinados, por exemplo), ao passo que outros envolvem a escolha entre dois ou mais casos possíveis (a escolha de um ponto sobre uma linha, por exemplo).

As regras de construção estabelecem condições e consequências para a inserção no diagrama de novos pontos, linhas (segmentos e círculos), e intersecções. A primeira regra para a construção de pontos diz respeito à possibilidade de escolha de um ponto arbitrário, distinto dos já existentes. Esta regra não possui condições ou pré-requisitos, e a única conclusão que se segue de sua inclusão no diagrama diz respeito ao fato de ser distinto dos demais elementos no diagrama. Em casos mais complexos, porém, as conclusões podem ser mais numerosas.

---

ser entendido como uma disjunção de asserções.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

Uma delas, por exemplo, regulamenta a possibilidade de se tomar arbitrariamente um ponto *a* que prolonga um segmento *bc*. As condições para esta construção são que os pontos *b* e *c* estejam sobre uma mesma linha *L*, e que sejam distintos. E as conclusões que se seguem desta construção são que *a* está sobre *L*, e *c* está entre *a* e *b* – a escolha do ponto *c* para figurar entre os outros dois é convencional, uma vez que nada determina para qual lado se pode prolongar um segmento; ao que parece, os autores utilizam a ordem lexicográfica para determinar a orientação dos segmentos.

As conclusões que podem ser derivadas das construções por meio da visualização do diagrama não são mencionadas neste grupo de regras, pois correspondem a inferências diagramáticas. Além disso, também porque, ao que parece, os predicados e relações são definidos de maneira tal que, por exemplo, se um ponto está sobre uma linha, então ele não está em nenhum dos lados desta linha (ou nem dentro nem fora, caso se trate de um círculo). Por isso, as regras 7-9, para introdução de pontos com relação a círculos, parecem deixar de lado conclusões que facilmente se seguiriam – como, por exemplo, da construção de um ponto na circunferência de um círculo se segue que ele não está fora do círculo, que também não está dentro, e que portanto também não é o centro do círculo.

Para segmentos e círculos são estabelecidas duas regras de construção. Os requisitos são dois pontos distintos, e a conclusão é a de que cada um deles está sobre o segmento construído, no primeiro caso; e de que um deles é o centro e outro está sobre a circunferência, no segundo.

Para as intersecções (transversais) entre retas e círculos, é interessante notar que não é dada a devida atenção ao fato de que as intersecções entre retas e círculos que são relevantes para as demonstrações (pelo menos no Livro 1) são aquelas nas quais o ponto no centro do círculo está sobre a reta que o intersecta, de maneira que o raio do círculo é um segmento de tal reta. Assim, na regra 5 para intersecções, que possibilita a introdução de um ponto *a* de intersecção entre uma reta *L* e um circulo *α* estendendo um segmento *cb*, os requisitos são que *b* esteja dentro de *α*, esteja sobre *L*, seja distinto de *c* e *c* esteja sobre *L*. As conclusões permitidas são que *a* está sobre *L* e *α*, e que *b* esteja entre *a* e *c*. Em se tratando da representação das demonstrações do Livro I, pelo que foi dito acima, poderia ser tomado como requisito que o ponto *b* não apenas estivesse no interior de *α*, como também fosse seu centro. Afinal de contas, o único ponto no interior do círculo que nunca poderá ser considerado como externo a este por meio de alguma deformação ou variação no diagrama é

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

o que representa o centro do círculo. Todavia, como o Livro III apresenta casos em que um ponto no interior do círculo pode ser utilizado sem que necessariamente ele esteja no centro.

A negligência com relação a este aspecto se torna ainda mais justificável deste ponto de vista quando os autores explicam a não inclusão de uma regra que permita tomar um ponto *a* sobre uma reta *L* que intersecta uma reta *M* tal que ele esteja no mesmo lado de *M* com relação a um ponto *b*. A justificativa para a não-inclusão desta regra é a de que ela não é utilizada nas demonstrações dos *Elementos* – pelo menos naquelas contidas nos quatro primeiros livros. Para os propósitos deste trabalho, no entanto, poder-se-iam fortalecer alguns requisitos de maneira a tornar o sistema ainda mais próximo do original. Como, no entanto, o objetivo de seus idealizadores não é apenas fornecer uma representação formal das demonstrações euclideanas, como também demonstrar que o sistema formal é correto, tanto de um ponto de vista informal quanto com relação à semântica pretendida, e também preenche os requisitos tanto para modelar as demonstrações dos *Elementos* quanto para ter a completude do sistema demonstrada.

b) Regras para inferências diagramáticas

As inferências diagramáticas são regulamentadas por um conjunto de regras que estabelecem critérios para sua execução, e que impedem o uso de diagramas anômalos. Entre as regras mais gerais encontram-se aquela que por vezes foi interpolada como uma noção comum pelos editores dos *Elementos*, a saber, a de que dois pontos não encerram espaço, ou de que dois pontos determinam uma e apenas uma reta. De acordo com esta regra, se dois pontos distintos estão sobre uma reta *L*, e também sobre uma reta *M*, então *L* e *M* são iguais, coincidem. Também fica estabelecida a unicidade do centro de um círculo, bem como o fato de este encontrar-se no interior do círculo, e não se encontra sobre a circunferência do mesmo.

Em seguida, são apresentadas regras para as inferências diagramáticas da relação de estar entre dois pontos. Estas regras estabelecem a unicidade desta relação, de maneira que, de três pontos distintos, apenas, e necessariamente, um está entre os outros dois. Além disso, restringe-se o uso desta relação a casos de colinearidade, e estabelece-se casos para transferência da relação de uns pontos a outros.

Há também um conjunto de regras para a relação de estar do mesmo lado, para pontos com relação a retas. E em seguida são elencados as regras ou

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

axiomas que relacionam a relação de estar do mesmo lado com a relação de estar entre dois pontos. Estes axiomas, que Hilbert inclui em seu sistema sob a denominação “Axiomas de Pasch” servem para estabelecer que se uma reta intersecta um lado de um triângulo, ela necessariamente intersectará um dos outros lados ou o vértice oposto. O terceiro axioma deste grupo estabelece que se um ponto está entre outros dois e está sobre uma reta, então os outros dois não estão no mesmo lado desta reta. Falta a este axioma, contudo, a condição de que eles também não estejam sobre a mesma reta do ponto que está entre eles, ou seja, que esta reta seja intersectante da reta que contém aos três, e portanto distinta desta.

Os axiomas para tripla incidência regulamentam a divisão de um espaço em regiões por meio da intersecção de três retas em um ponto. Este tipo de regra torna possível a derivação do teorema I,32, por exemplo, no qual os ângulos de um triângulo devem ser justapostos em torno de um ponto sobre uma reta.

Para os casos de intersecção entre retas e círculos, são introduzidas também regras que permitem inferir a existência de pontos de intersecção naqueles casos em que, nos *Elementos*, isto é diagramaticamente garantido. O último grupo de axiomas ou regras para as inferências diagramáticas contém os axiomas lógicos para a relação de igualdade. O primeiro estabelece a identidade de um objeto consigo mesmo – e como há seis tipos de objetos, deve haver um número igual de relações deste tipo, uma para cada tipo. O segundo estabelece que se dois objetos são iguais, as fórmulas atômicas que são verdadeiras a respeito de um também serão verdadeiras a respeito do outro.

c) Regras para inferências métricas

A fim de modelar as inferências métricas em Euclides, é introduzida uma estrutura composta dos números reais não-negativos, do zero, da adição e da relação de ser menor. Para a adição valem as propriedades de associatividade e comutatividade; e a relação de ser menor é definida como uma relação linear tendo 0 como elemento mínimo, e também é tal que se um elemento é menor que outro, continuará sendo menor caso sejam adicionadas a eles quantidades iguais. Embora Euclides trate apenas de magnitudes positivas, os autores justificam a inclusão do zero, como já foi dito, bem como regras envolvendo casos degenerados de figuras (como “triângulos” sem área), por questões de simplicidade – muito embora isto constitua uma diferença significativa com relação à prática.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

Dentre os axiomas deste grupo destacam-se os que estabelecem que um ângulo é igual ou maior que zero, e menor ou igual a dois retos. O último dos axiomas deste grupo explicita as condições para igualdade de áreas (de triângulos), a saber, que todas as partes dos triângulos em questão sejam iguais entre si.

d) Regras para inferências de transferência

As regras para este tipo de inferência, que envolvem tanto propriedades métricas que podem ser lidas do diagrama, quanto propriedades topológicas engendradas no diagrama por propriedades métricas atribuídas pelo texto, dividem-se em três grupos, conforme envolvam magnitudes de segmentos, ângulos ou áreas.

Os axiomas para segmentos estabelecem relações tais como a igualdade entre um segmento e a soma de dois segmentos determinados pelos pontos em suas extremidades e um terceiro ponto entre eles, ou seja, $ab+bc=ac$. Além desse, são estabelecidos axiomas para regulamentar as relações métricas entre o centro de um círculo e os pontos sobre a circunferência deste, bem como entre raios de círculos.

Dentre os axiomas para inferências de transferência envolvendo ângulos destacam-se o que estabelece a magnitude nula para um "ângulo" determinado por três pontos colineares, o que estabelece a magnitude de ângulo reto para os ângulos complementares iguais formados por duas retas, além de axiomas para a determinação de pontos no interior de um ângulo, que serão usados para assegurar as propriedades da soma de ângulos, e do equivalente do quinto postulado euclideano, que assegura um ponto de intersecção entre duas retas que obedecem a determinadas restrições sobre as magnitudes dos ângulos que formam com uma terceira. Este postulado é um caso em que informações métricas são utilizadas para forçar características diagramáticas. Ele permite, conhecidas as magnitudes dos ângulos em questão, determinar se duas linhas se intersectam ou não em um ponto.

Os axiomas de transferência para áreas são dois. Um deles estabelece a não-colinearidade de três pontos como condição básica para que um determinado objeto seja tratado como possuindo uma área não nula. E o segundo estabelece condições para soma de áreas em diagramas contíguos.

e) Regras para superposição

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

O método de superposição, cujo uso constitui um dos pontos mais polemizados pelos estudiosos da obra euclideana, recebe um tratamento mais fiel ao espírito dos *Elementos* do que aquele dispensado por Hilbert, por exemplo – que simplesmente adiciona como axioma o primeiro e principal teorema euclideano que faz uso dele. De acordo com os autores, seria injusto e pouco justificável em um trabalho que pretende reproduzir o mais fielmente possível as inferências euclideanas apresentar como axioma métrico ou como regra de construção resultados que Euclides parece se esforçar por estabelecer a partir dos princípios de que dispõe.

Assim, a superposição é representada no sistema como a derivação de uma conclusão por meio da introdução de novos objetos. A peculiaridade destas introduções de novos objetos é que elas não estão de acordo com alguma regra de construção estabelecida previamente, sendo tomadas *como se* fossem autorizadas – como se, por exemplo, fosse possível a esta altura o transporte de ângulos. Outra peculiaridade diz respeito ao fato de que os objetos introduzidos são utilizados apenas para derivar resultados acerca dos objetos já disponíveis no diagrama. O transporte do ângulo contido pelos segmentos em I,4, por exemplo, é uma construção assumida como possível apenas para que se possa demonstrar a igualdade dos dois triângulos já disponíveis, e nada mais. Assim, a superposição pode ser tratada como uma regra de eliminação em dedução natural: se é possível derivar um resultado supondo-se a existência de objetos adicionais, este resultado vale independentemente destes novos objetos. Os objetos adicionais não podem, contudo serem usados na construção de outros objetos.

Fica a impressão de que algo está errado quando a suposição da possibilidade de uma construção é usada para a derivação de um teorema que por sua vez será utilizado para demonstrar a possibilidade daquela mesma construção. Mas tal impressão se desfaz quando se leva em conta que o teorema demonstrado não é utilizado para construir (transportar) um ângulo. Neste sentido, os problemas são independentes dos teoremas porque a sua sequência independe da sequência de teoremas. Os primeiros introduzem objetos, os últimos apenas lhes atribuem relações e propriedades. Assim, o transporte de ângulos só se tornará possível depois que se saiba realizar todas as construções que levam a I,23 (I,1-3; I,9-12 e I,22), mas esta sequência de ações independe da demonstração das propriedades dos objetos que elas introduzem. Por conseguirem captar este modo de raciocínio, Avigad, Dean e Mumma podem oferecer uma representação formal das demonstrações dos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

Elementos sem julgar falho o procedimento de Euclides – finalmente oferecendo um tratamento adequado para o método de superposição.

Com as regras para casos de superposição tornadas explícitas, está estabelecido o conjunto de regras para *E* – as quais incluem ainda as regras para construção, utilizadas para a introdução de novos objetos no diagrama; as regras para inferências diagramáticas, que permitem a derivação de consequências imediatas a partir dos diagramas; as regras para inferências métricas, que permitirão a comparação quantitativa entre os objetos da teoria; e as regras para inferências de transferência, que permitem o intercâmbio de informações entre texto e diagrama, ou, em outras palavras, que regulamentam as atribuições de caráter métrico que podem ser feitas baseadas na aparência do diagrama (como que se *b* está entre *a* e *c*, então *ab*+*bc*=*ac*) e atribuições diagramáticas que podem ser derivadas de dados textuais (como que se *ab*<*cd*, então se *c* é colocado sobre *a*, *d* estará entre *a* e *b*).

A apresentação do sistema é encerrada com uma discussão de caráter técnico a respeito da noção de consequência direta. Os autores apresentam as regras que determinam quando uma asserção diagramática, por exemplo, é consequência dos fatos diagramáticos disponíveis em um determinado estágio da demonstração. E, utilizando-se do aparato lógico do cálculo de sequentes, conseguem demonstrar, por exemplo, que o sistema é decidível.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

4.3.2.
Observações sobre novos sistemas formais para os *Elementos*

Pode-se perceber, pela análise da obra de Avigad e Mumma, que muitos aspectos os tornam distantes da obra que eles formalizam. Em especial, deve-se mencionar a ausência dos diagramas – aspecto em que o trabalho de Miller talvez seja mais fiel ao original euclideano. Com o uso do diagrama, Euclides abre mão de mencionar peculiaridades sobre as configurações, relacionadas a noções como estar dentro ou fora, para um ponto com relação a uma figura, por exemplo. Relacionado a este fato está o de que poucas vezes é necessário (em *E*, a exemplo do que ocorre nos *Elementos*) introduzir asserções diagramáticas no decorrer de uma demonstração, pois a informação nelas contida está por vezes implícita nos demais axiomas. Já o excesso de axiomas, e o fato de muitos deles não serem independentes dos demais, é algo que os autores justificam por estarem tentando manterem-se fiéis ao modo como as demonstrações se dão em Euclides.

O aumento dos axiomas deve-se, aliás, ao fato de que em *E*, tanto quanto nos *Grundlagen*, embora os diagramas possam ser utilizados para o acompanhamento da demonstração, eles já não jogam nenhum papel efetivo. É o que acontece quando são oferecidas versões em *E* para algumas das demonstrações euclideanas. Estranhamente, os diagramas são deixados de lado mesmo numa obra que pretende lhes devolver o estatuto de instrumentos de prova. Outros quesitos em que *E* difere da metodologia euclideana dizem respeito à ausência de qualquer uso de assunções de não-degeneração dos diagramas, a ausência de casos, e o uso de inferências diagramáticas mais fortes do que as que permitem as regras de *E* – um exemplo é na demonstração de I,9, onde Euclides assume sem justificação que o ponto de intersecção entre a bissetriz de um ângulo e uma reta que intersecta as pernas deste cai no interior do ângulo. Tais peculiaridades, no entanto, parecem ser advindas do que Manders denominou *disciplina diagramática* (à qual o sistema *E* não necessita, ou não pode, levar em conta) – a habilidade de produzir diagramas adequados serve para descartar determinados casos anômalos como o do exemplo mencionado, afinal supor que o ponto possa cair fora do ângulo revela mais uma ignorância do assunto tratado do que propriamente preocupação com a generalidade do teorema.

Um dos vários resultados interessantes do trabalho de Avigad, Dean e Mumma diz respeito à possibilidade de um tratamento computacional dos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

procedimentos demonstrativos em Euclides, no sentido de que seja possível criar um programa para checar a correção de uma fórmula que expresse uma asserção tal como as que se pode encontrar nos *Elementos*. No que tange à possibilidade de um tratamento algorítmico de uma demonstração dita rigorosa, portanto, já não se pode dizer que as demonstrações de Euclides são pouco rigorosas por serem impossíveis de tal tratamento.

Os autores alertam para o fato de seu trabalho não ir além de questões de cunho lógico e computacional, deixando de lado importantes tópicos do ponto de vista filosófico, alguns dos quais são encarados por Manders na obra analisada anteriormente. Estes temas dizem respeito, por exemplo, ao modo como o simbolismo diagramático é empregado, seu caráter simbólico e instanciativo com relação aos objetos geométricos, e suas relações com outros sistemas simbólicos como a notação de barras da aritmética finitária de Hilbert, ou mesmo a notação decimal em aritmética clássica. Em que medida tais "notações", ou artefatos, são necessárias para a prática matemática, e qual a importância da intuição em sua manipulação, são questões ainda em aberto.

Não obstante, o trabalho de Avigad, Mumma e Dean possui o mérito de mostrar que a reconstrução formal tal como a apresentada por Hilbert não é a única saída para que sejam respondidas as questões que ele aponta como motivos para a formalização – questões relativas a aspectos meta-teóricos do sistema. O sistema *E* mostra a possibilidade de que tais questões possam ser respondidas sem que seja necessário o colapso da esfera diagramática na esfera textual das demonstrações. Com isso, é possível ver o sistema euclideano de maneira tal que o aspecto informal que muitas vezes se lhe atribui não se verifica na prática. Antes, as demonstrações de Euclides são muito mais *formais* do que se considerava, talvez tão formais quanto as demonstrações presentes nos *Grundlagen der Geometrie*. Vinculado a isso, os autores mostram que é possível que as inferências modeladas no sistema formal *E* podem ser executadas mecanicamente, por meio de programas apropriados. Como se pode ver, uma a uma vão sendo refutadas as alegadas razões para o abandono dos diagramas, de maneira que cada vez mais o assim chamado *raciocínio diagramático* vai recuperando seu posto na atividade matemática, especialmente na geometria.

Veja-se a seguir, a fim de que se possa comparar o sistema de Avigad e o de Miller, a forma que toma a demonstração da proposição I,1 dos *Elementos* nos sistemas de ambos. Em *E*, a demonstração se dá como segue:

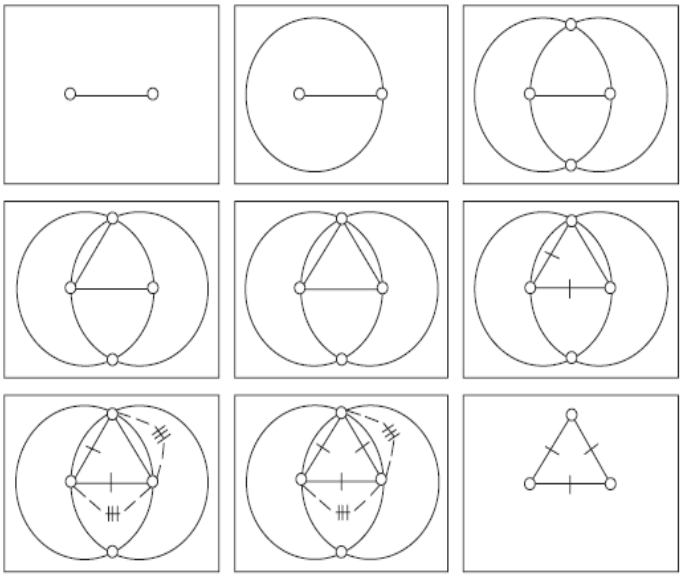
- Dados: assumir que *a* e *b* são pontos distintos;

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

- Requisito: construir um ponto *c* tal que *ab=bc* e *bc=ca*;

- Prova: seja α um círculo com centro em *a* e passando por *b*; seja β um círculo com centro em *b* e passando por *a*. Seja *c* o ponto de intersecção entre os círculos. Tem-se *ab=ac*, já que eles são raios de α. Tem-se também que *ba=bc*, pois são raios de β. Portanto, *ab=bc* e *bc=ca*. Q.E.F.

Em Miller, dado o caráter propriamente diagramático de seu sistema, a demonstração é a sequência de figuras a seguir:



Como a existência do ponto de intersecção dos círculos é assegurada por regras explícitas nos dois sistemas, pode-se dizer que ambos reproduzem com fidelidade a Euclides, bem como com rigor formal, a construção do triângulo equilátero.

Com o surgimento de sistemas formais como estes, perde força a tese de que as demonstrações euclideanas, tais como são feitas, são condenadas ao estatuto de provas informais, incompletas ou qualquer outro adjetivo que lhes diminua frente às demonstrações algébricas, por exemplo. A seguir, veremos como, mesmo em Euclides, teses a respeito de uma suposta inferioridade das demonstrações euclideanas com relação a estes aspectos tampouco encontram respaldo histórico.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

4.4.
Uma nova história da prática euclideana

Se os diagramas também foram negligenciados pelos que se dedicaram a escrever a história da prática euclideana, o trabalho de Netz vem para preencher esta lacuna, lançando nova luz sobre a maneira como os diagramas eram usados na geometria praticada ao estilo euclideano[45]. Esta nova interpretação, no entanto, é apenas uma consequência do objetivo original do trabalho de Netz, o qual é fornecer, ao mesmo tempo, uma descrição das práticas matemáticas gregas, uma teoria sobre o surgimento do método dedutivo e um estudo de caso para a história da ciência, de acordo com suas próprias palavras[46].

Netz utiliza-se da teoria de Kuhn sobre a estrutura das revoluções científicas, mas modifica-a de modo a livrá-la da ênfase em aspectos proposicionais, a qual faz com que muitas vezes sejam ignoradas partes tão ou mais importantes para as práticas científicas do que suas dimensões proposicionais ou linguísticas, em sentido estrito. De acordo com Netz, é mais adequado considerar a ciência como um conjunto de práticas, e não de crenças, como sugere Kuhn. Afinal, argumenta, se há algo que uma comunidade científica compartilha são as práticas, que permanecem estáveis durante um longo período de tempo, e são até mesmo utilizadas para que se afastem as discrepâncias dos participantes com relação às crenças que sustentam. Nas palavras de Netz, “crenças compartilhadas requerem práticas compartilhadas, mas não vice-versa”.

Além disso, o autor toma emprestado de Fodor o tratamento da mente humana em termos modulares. De acordo com Fodor, os processos cognitivos são de dois tipos: mecanismos de entrada e saída (*input-output*), e processos centrais. Linguagem e visão seriam exemplos do primeiro tipo, e a fixação de crenças, um exemplo do segundo. E, de acordo com Fodor, os mecanismos de entrada e saída podem ser entendidos como módulos, como capacidades para a

[45] Cuja origem o autor localiza na obra de Aristóteles (por volta de 360 a.C.), e cujo primeiro expoente é, de acordo com sua interpretação, Eudoxo. O autor considera Hipócrates de Quios (440 a.C.) como o marco inicial da matemática propriamente dita (ou seja, como uma ciência de caráter estritamente demonstrativo, não especulativa nem tampouco empírica), e Eudoxo como o primeiro matemático ao estilo euclideano(cf. Netz 1999, p. 275).

[46] Cf. Netz 1999, p. 1.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

execução de tarefas específicas, de maneira quase automática, e sobretudo independentemente de outras capacidades. Além dos mecanismos de entrada e saída, nada mais pode ser considerado modular nos processos cognitivos – a fixação de crenças, por exemplo, não é nem operacional, nem automática, e nem independente de outros processos. O objeto da ciência cognitiva, de acordo com esta visão, não são os processos centrais mas sim os assim chamados módulos[47].

Baseando-se nestas duas teorias, Netz tenta mostrar que o surgimento do método dedutivo entre os gregos se deu devido ao uso restrito de dois recursos cognitivos específicos: o *diagrama* e a *linguagem matemática*. Evitando fornecer uma definição de "dedução", o autor prefere em vez disso investigar como o uso destas ferramentas foi capaz de fornecer argumentos que pareceram conter conclusões *gerais* e *necessárias* aos olhos daqueles que os desenvolveram. A obra inclui, desta maneira, uma descrição pormenorizada dos diagramas e das asserções presentes nas demonstrações ao estilo euclideano. Esta descrição será útil para que sejam atacadas aquelas posturas anti-diagramáticas, por assim dizer, que se originam de uma compreensão deficiente do contexto histórico da prática – por exemplo, as que atribuem ao diagrama um papel meramente ilustrativo nas demonstrações ao estilo euclideano.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

[47] Cf. Netz 1999, pp. 2-8.

4.4.1.
O diagrama euclideano

Na obra de Netz é possível encontrar um trabalho minucioso a respeito do uso e das características dos diagramas na prática euclideana. Carente de evidências materiais, no entanto, o procedimento é quase especulativo, procurando adequar uma possível descrição do uso dos diagramas ao que se sabe com mais segurança a respeito do contexto em que foram usados.

Uma das primeiras características mencionadas diz respeito ao número de pessoas envolvidas. De acordo com Netz, não há razões para que se pense que houvesse muitas pessoas envolvidas na prática matemática da época. Isto implica, segundo ele, que a forma escrita de apresentação deva ter prevalecido sobre a forma oral – a qual, quando utilizada, deveria também ser acompanhada de um diagrama para que o público pudesse acompanhar. Muitas das obras do período tornaram-se conhecidas porque foram incluídas em cartas que os matemáticos trocavam entre si. Como este não é o tipo de assunto que se costuma encontrar em uma carta, deve-se supor que as pessoas envolvidas nestas correspondências eram matemáticos de calibre – muito provavelmente os responsáveis pelo desenvolvimento desta ciência naquela época.

Devido aos meios disponíveis, e ao aspecto esquemático dos diagramas (como ilustra um papiro datado do século II d.C., representando a proposição I,9), deve-se supor que eles não eram desenhados no momento das demonstrações, mas sim preparados com antecedência – não havia ainda as facilidades do lápis e do papel para este expediente, de modo que uma vez desenhados eles provavelmente não poderiam ser apagados. A ausência de efeitos de projeção quando se trata de diagramas representando situações tridimensionais também corrobora a tese de que os diagramas não eram ilustrações, mas sim componentes das demonstrações. Tudo indica que havia consciência da inutilidade dos mesmos para a representação de medidas ou proporções, pelo que em geral eles eram simétricos (ver o caso da proposição I,27, discutida acima), mesmo quando as situações a serem representadas envolvessem objetos que, por definição, são assimétricos. Pode-se dizer que o diagrama era utilizado em sua dimensão qualitativa apenas, sendo ignorados os detalhes quantitativos que porventura ele pudesse apresentar – não haveria, desde esta perspectiva, uma representação especial para o ângulo reto, por exemplo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

O diagrama, afinal, não era o único portador de informação. Para obter este tipo específico de informação, aliás, o meio apropriado é o texto. Texto e diagrama, no entanto, não podem ser vistos como dimensões separadas. Há um sem-número de “elos” que as tornam irremediavelmente ligadas: as letras. São elas que fazem com que o diagrama deixe de ser apenas um desenho, e com que o texto se organize, ganhe uma referência. De acordo com Netz, esta é a razão pela qual são possíveis as assim chamadas *inferências diagramáticas*. O processo de fixação de referência, ou de atribuição de letras a pontos do diagrama, ocorre por meio de locuções imperativas no texto (“Seja B um ponto em AC”). As locuções indicativas, por seu turno, não podem constituir momentos de especificação. Elas caracterizam as derivações, e estas em geral dependem de aspectos métricos. Assim, não é *afirmado* no texto que o ponto C em I,1 é o ponto onde os dois círculos se encontram. Antes, é *ordenado* que se o tome o ponto C, explicitamente apresentado então como o ponto de intersecção, e a partir dele se tracem as retas CA e CB. Poder-se-ia conceder que fosse possível tal operação mesmo sem a existência deste comando, afinal o ponto C é utilizado para nomear cada um dos dois círculos descritos, mas esta não é a prática euclideana. E atribuir determinada posição ou propriedade a um ponto no diagrama baseando-se em tais aspectos é fazer mal uso da ferramenta diagramática. Há um certo cuidado com o processo de fixação de referência. Algumas das letras que aparecem no texto são completamente especificadas, como a que designa o centro de um círculo, por exemplo. Outras são especificadas pelo contexto, pelo que são denominadas sub-especificadas. Este é o caso de A e B em “Seja um círculo com raio AB”, onde não fica claro a princípio qual letra representa o centro e qual representa um ponto na circunferência. Por fim, há letras no texto das demonstrações geométricas clássicas que não são especificadas pelo texto, como, utilizando-se o exemplo anterior, seria o caso de D quando o texto dissesse algo como “Digo que DB é o dobro de BC”. Neste caso, poder-se-ia supor que C é o centro do círculo, B é um ponto na circunferência, e D também é um ponto na circunferência, na intersecção da mesma com o prolongamento do raio BC na direção de C. Mas a situação diagramática, no entanto, poderia ser bem diferente desta.

Não fica muito claro até que ponto casos do último tipo são encontrados nos Livro I dos *Elementos* – Netz toma como base o Livro XIII, de Euclides, e as *Cônicas*, de Apolônio. Mesmo assim, algumas conclusões interessantes podem ser extraídas desta classificação. Não há, por exemplo, um momento de especificação no texto cujo propósito seja somente fixar a referência. Ela é

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

fixada conforme a demonstração se desenvolve. Em “Seja traçada uma linha AB”, são mencionados os pontos extremos da linha, mas suas posições relativas são deixadas sem menção (um caso de sub-especificação, portanto). Mais ainda, não são mencionados pontos sobre esta linha que porventura possam ser utilizados no decorrer da demonstração (casos de não-especificação). Isto aponta para o fato de que o diagrama não é desenhado no momento da demonstração, sendo apenas nomeado, ou *letrado*, de acordo com a terminologia de Netz, em tal ocasião.

Uma das conclusões a que Netz chega, e que parece ir de encontro ao que diz Avigad, é a de que nem o diagrama é recuperável a partir do texto, nem vice-versa. Que o texto não seja recuperável a partir do diagrama é ponto pacífico[48], mas que o diagrama não seja recuperável a partir do texto é discutível, frente aos argumentos apresentados por Avigad. O conflito, no entanto, é apenas aparente, já que o motivo para tal impossibilidade seria a existência de tais letras completamente sem especificação que por vezes são encontradas no texto. A reconstrução do diagrama, nestes casos, exigiria apenas que se experimentassem casos alternativos sugeridos pelo contexto da demonstração. Deste modo, mesmo que os diagramas originais de Euclides não tenham sobrevivido, não seria impossível recuperá-los. Ao que tudo indica, o que Netz quer dizer é que o diagrama não é descrito de maneira inequívoca pela parte textual em muitos casos, e que por isso não se pode dizer que ele seja dispensável em geral. Ou seja, o autor não quer ceder espaço tanto às teses que defendem a dispensabilidade do diagrama quanto às que alegam insuficiência em termos de rigor das demonstrações em questão. Avigad, por sua vez, tampouco alega que o diagrama seja desnecessário, mas apenas que é possível reconstruí-lo com base no texto – e provavelmente também com algum conhecimento de geometria. Embora não seja possível determinar a aparência do diagrama em passos determinados da demonstração, é possível deduzir sua

[48] Seria possível reconstruir o texto a partir do diagrama se os diagramas fossem marcados com vistas a estabelecer igualdades entre suas partes, bem como o aparecimento de constantes como o ângulo reto, ou ainda casos que o diagrama é insuficiente para representar, como o de retas paralelas. Embora Greaves sustente que este tipo de marcação já era usado na época (Greaves 2002, p. 37), tudo indica que sua posição é equivocada. Como bem observa Manders, tal procedimento seria significativo demais para que fosse negligenciado pelos primeiros editores (Manders 1995, p. 97)..

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

aparência com base nas informações que o texto da demonstração como um todo oferece.

O texto não pode ser visto como estipulando uma relação entre símbolos (letras) e objetos (pontos). As letras não estão *por* objetos, mas sim *sobre* eles: as letras, em certo sentido, *são* os pontos, e tanto o texto quanto o diagrama são maneiras de dispor informações a seu respeito. Neste sentido, elas não seriam *símbolos*, mas *índices*, de acordo com a classificação de Peirce – ou, numa expressão mais requintada "nós anafóricos" entre texto e diagrama. Euclides não utilizaria uma expressão como "Entre o ponto B e o ponto C, seja traçada a linha reta BC", mas sim algo como "Entre o B e o C, seja traçada a BC". Referir-se aos diagramas como objetos pode sugerir, por um lado, que eles estão sendo considerados *qua* entidades físicas, ou, por outro lado, que eles próprios sejam os objetos da geometria, ou metáforas para referir-se a eles. Nenhum dos casos, no entanto, corresponderia ao uso que se faz deles na geometria euclideana.

Netz propõe uma interpretação mais adequada: dado que o diagrama é como que o universo de discurso da proposição, que faz com que seja evitado o que hoje se denomina "metalinguagem"; e dado que o diagrama é imperfeito para representar alguns aspectos dos objetos geométricos; eles devem ser vistos *como se* fossem indefectíveis com relação a tais pormenores. Eles podem ser vistos como atores em uma peça. Imagine-se, por exemplo, uma cena de *Hamlet* ensaiada por um grupo de atores. Imagine-se então que João, o ator que faz o personagem principal, use uma camiseta de futebol com o número 5. Alguém que, neste contexto, comenta algo sobre João, está se referindo à performance daquele ator. Se o comentário é sobre Hamlet, a referência é ao conturbado personagem de Shakepeare. Mas se o comentário é sobre o número 5, a referência pode ser a ambos. Neste sentido, as letras nas proposições gregas são como o número da camiseta; os pontos no diagrama como os atores; e os objetos geométricos como os personagens.

Com esta interpretação, afastam-se os inconvenientes que apresentam as interpretações da geometria grega como falando a respeito de *objetos em si*. Os "quadrados-em-si", de acordo com Netz[49], não são o tema da geometria simplesmente porque o quadrado sobre a hipotenusa do quadrado-em-si é ainda o mesmo quadrado-em-si, e não seu dobro. Deste modo, as entidades sobre as quais versa a geometria de Euclides não são entidades platônicas, providas unicamente da propriedade que as define e das consequências desta. Elas

[49] Netz 1999, pp. 50-56.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

pertencem a uma dimensão menos abstrata. Levando-se em conta os comandos que o texto das demonstrações pede que sejam executados, e o lugar onde tais execuções podem ter lugar, deve-se concluir que o objeto da geometria euclideana seja o diagrama, entendido no sentido que a metáfora acima apresentada sugere. Eles são como que atores que representam personagens, os quais somente podem ser acessados por seu intermédio. Eles são, nas palavras de Netz, substitutos para a ontologia[50].

Uma característica interessante que o uso das letras no texto e no diagrama permite identificar é a de que o diagrama deve ser considerado como finito e discreto. Afinal, embora as proposições falem de linhas que podem ser estendidas indefinidamente, o diagrama sempre será um objeto finito, e as extensões infinitas simplesmente não são relevantes para as demonstrações[51]. Quanto ao caráter discreto, deve-se lembrar que, embora um segmento possua uma infinidade de pontos, tal coleção também não é utilizada. Os pontos que interessam são nomeados pelo texto, e devem ser sempre distintos dos outros pontos que estão sendo utilizados. Mais especificamente, os pontos relevantes são os das extremidades de segmentos, e os das intersecções. E as intersecções em um diagrama euclideano, embora possam ser numerosas e complexas numa única proposição, formam sempre um sistema discreto e ordenado de entidades – o diagrama ganha letras, e assim também um determinado arranjo, o qual é um sistema finito, discreto e tratável de entidades e relações.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

---

[50] Netz 1999, p. 57. Netz vê razões para esta leitura em evidências como o uso de um discurso restrito a linguagem objeto, evitando qualquer questão meta-teórica, que se observa em obras como os *Elementos*. Em outra frase de impacto, ao argumentar que os diagramas geométricos não evoluíram de representações rudimentares, mas sim nasceram tais como se tornaram conhecidos (esquemáticos mais que descritivos) o autor afirma que a geometria grega "é o estudo da ação espacial, não da representação visual" (Netz 1999, p. 60).

[51] Talvez por não considerar objetos em termos de totalidades infinitas Euclides deixe de definir "segmento de linha", enquanto define no Livro III "segmento de círculo" – o círculo é uma linha cuja totalidade é visualizável, finita, ao passo que a linha reta não. Por isso não é de se estranhar que ele atribua pontos às extremidades das linhas retas. Ora, se fossem entendidas como infinitas não faria sentido dizer que elas possuem extremidades. Para todos os efeitos, portanto, as linhas da geometria euclideana serão sempre segmentos de linhas.

Visto desta maneira, o diagrama não esgota as informações a respeito de seus objetos. Uma linha é vista como uma entidade contínua (tanto no sentido empírico, enquanto uma curva traçada sobre uma superfície, quanto no sentido matemático, como uma coleção de pontos dispostos de uma determinada maneira), mas enquanto parte de um diagrama geométrico, mais especificamente de um diagrama em geometria euclideana, apenas interessam os pontos que determinam suas extremidades ou alguns pontos de intersecção com outras linhas no diagrama, os quais são sempre nomeados pelo texto – mesmo os que dependem de aspectos co-exatos, vale lembrar, são nomeados antes de serem usados na demonstração. Assim, a representação influenciada talvez pela reconstrução analítica, da reta como correspondendo a uma parte do conjunto dos números reais não pode ser uma boa interpretação para a reta euclideana, afinal não são necessários tantos números, pois apenas uns poucos serão usados. Do infinito e contínuo conjunto de pontos que devem ser entendidos como presentes em uma linha, de acordo com a interpretação analítica ou cartesiana, apenas um número finito e relativamente pequeno deles são nomeados, e destes um grupo ainda menor é de fato relevante para a demonstração.

Contra a tese de que os diagramas podem desviar o matemático do rigor que deve acompanhar suas demonstrações, também pode-se encontrar na obra de Netz bons argumentos. Utilizando-se de uma passagem de Knorr[52] na qual é tematizado o uso da palavra grega *diagramma*, o autor descreve como, a partir de Platão, este termo era utilizado tanto para referir-se a proposições matemáticas quanto para referir-se ao rigor que lhes é peculiar. Além disso, o termo também pode ser utilizado para designar o método que se utiliza de linhas (*dia grammon*), em oposição ao que se utiliza de números (*di' aritmon*). Em contextos matemáticos, *diagramma* geralmente é utilizado, de acordo com Netz, para designar uma proposição matemática como um todo, e não o diagrama particular que a acompanha[53]. Por esta razão Netz afirma que os diagramas são metonímias para as proposições, ao apresentarem de uma vez o que o texto vai desvelando passo a passo. Evidência disso seria o uso dos diagramas em proposições como as dos Livro V e VII-IX, que tratam da teoria das proporções e da teoria de números, respectivamente. Nas demonstrações ali presentes o

[52] Knorr 1975, pp. 69-75.

[53] Dentre os termos técnicos apresentados nas definições, "figura" se refere a uma região limitada, e o termo em grego é *schema*.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

diagrama parece mais atrapalhar do que mesmo ajudar, afinal são em geral compostos por segmentos dispostos de maneira não contígua, e sobre eles não são efetuadas construções de novos elementos. Não obstante este fato, eles estão presentes em cada uma das proposições demonstradas nestes livros.

Diagrama e texto são, portanto, interdependentes. E o diagrama é uma espécie de universo de aplicação do texto da proposição, mas não num sentido em que ele, enquanto objeto físico, seja um caso do que está sendo tratado no texto. Tal como o texto, portanto, o diagrama deve ser visto como um portador de informação, a qual deve ser "lida" de determinada maneira, de acordo com o que as pessoas envolvidas consideram válido. Seu aspecto dual pode ser visto na oposição entre sua natureza contínua (linhas desenhadas) e discreta (letras atribuídas), bem como nos signos que são utilizados em sua composição, ícones (formas) e índices (letras). A seguir será tratado com mais detalhe o segundo artefato que de acordo com Manders ajudou a moldar o método dedutivo na matemática grega: o texto.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

4.4.2.
O texto euclideano

Além de lançar nova luz sobre o uso dos diagramas na prática euclideana, outro ponto importante do trabalho de Netz é uma nova maneira de ver o texto das demonstrações de Euclides. Geralmente o texto das demonstrações euclideanas é descrito como uma sequência de asserções ou comandos formulados em linguagem natural, como se pouca ou nenhuma atenção fosse dedicada a sua estruturação. O mérito de Netz está em mostrar que, longe disso, o texto euclideano está muito mais próximo de ser uma sequência de fórmulas do que uma prosa em linguagem natural. Veja-se a seguir os principais argumentos que o autor oferece em suporte a esta tese, começando pelo tratamento que as letras – elos de ligação entre texto e diagrama – recebem na parte textual, e em seguida tematizando o léxico disponível nas demonstrações.

O batismo do diagrama, ou seja, sua marcação com letras, depende de explicitação textual, como foi visto. Além disso, os objetos nomeados são, em geral, pontos no diagrama. Algumas exceções a esta regra, todavia, podem ser observadas em casos como da proposição I,3, na qual a letra C é um segmento, não um ponto. De acordo com Netz, a razão para a existência de casos como este é a sua não-utilização no restante da demonstração. Na proposição mencionada, o segmento C não é usado em combinação com nenhum outro elemento diagramático. Sua magnitude, no entanto, deve ser utilizada na demonstração, pois deve-se cortar de um segmento igual a C de um segmento dado AB. Neste caso, no entanto, C é tratado como AD (segmento cortado de AB e igual a C), ou seja, são utilizados para sua nomeação os pontos que representam suas extremidades. Este é, aliás, o único caso, de acordo com Netz, em que Euclides nomeia segmentos por meio de seus pontos extremos: casos em que os objetos nomeados serão combinados com outros no diagrama.

Deste modo, nomeados dois pontos A e B, AB representará o segmento de reta que os une – não de maneira irrestrita, pois pode ser o caso que os dois pontos devam ser coincidentes. Se, no entanto, os pontos não coincidem, e AB é um nome apropriado para um objeto no diagrama, ele também pode ser designado por BA, já que a ordem das letras não altera a representação no

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

diagrama – em ambos os casos, trata-se de um único segmento[54]. A sequência de batismo, em geral, segue a ordem alfabética, isto é, os primeiros objetos introduzidos são designados pelas primeiras letras do alfabeto, e assim por diante.

O próximo item textual analisado por Netz são as locuções compostas de uma única palavra. Destas as primeiras que recebem atenção são as definições. Após comentar brevemente as dificuldades já bem conhecidas a respeito do papel das definições euclideanas, o autor parte para uma classificação das definições de acordo com o caráter de seus *definienda*: 1) o *definiendum* pode ser um nome, tal como em "*Ponto* é o que não tem partes"; 2) ele pode ser um nome composto (nome+adjetivo), como em "Uma *linha reta*..."; 3) pode ainda ser um nome composto de outros termos que não apenas nomes e adjetivos, como em "O *diâmetro de um círculo*..."; ou 4) ele pode ser uma locução que não se enquadra em nenhum das classificações anteriores, como em "Uma linha é dita *tocando um círculo* se..." (Livro III, Def. 2).

Netz constatou que definições do primeiro tipo são as menos numerosas nas obras matemáticas semelhantes aos *Elementos*. Elas constituem os pontos de partida da teoria[55], e os nomes definidos representam em geral coisas no espaço. Como foi visto, no entanto, a geometria euclideana não menciona tanto os seus possíveis objetos quanto o faz com relação a determinados objetos no diagrama, referidos no texto por meio de suas respectivas letras. Nomes do tipo mencionado aparecem, em geral, nas fases inicial e final das demonstrações (*protasis* e *sumperasma*), sendo substituídos na demonstração propriamente dita pelas letras que nomeiam as representações diagramáticas dos objetos definidos[56].

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

---

[54] E é o diagrama o que torna desnecessária uma cláusula que estabeleça que AB=BA. Diferentemente dos sistemas modernos, a geometria euclideana não conta apenas com a ferramenta textual.

[55] "Aquilo sobre o que a geometria ensina", nas palavras de Netz (cf. Netz 1999, p. 92).

[56] Netz foca sua análise nos termos que aparecem no *definiendum*. Uma abordagem alternativa, e também esclarecedora com relação à importância dos diagramas, pode ser encontrada em Shabel 2000 e Panza 2007. Analisando o *definiens* das primeiras definições, Shabel vê uma utilidade que Netz deixa de notar: o estabelecimento daquilo que, no diagrama, poderá ser usado como informação a respeito dos objetos definidos.

As definições do segundo grupo – o mais numeroso dentre todos, diga-se de passagem – não são definições dos nomes compostos que nelas aparecem. “Linhas retas” e “círculos iguais” não estão sendo definidos como os nomes do primeiro grupo. Netz observa neste tipo de definição o estabelecimento das condições básicas sob as quais objetos classificados de acordo com o nome que aparece no *definiendum* podem ser considerados como portadores das propriedades designadas pelo adjetivo em questão. Assim, uma linha poderá ser dita reta pelo fato de seus pontos estarem dispostos de maneira uniforme entre suas extremidades, e um círculo será igual a outro quando seus raios forem iguais. Por esta razão, as definições deste grupo podem ser consideradas também as mais importantes, pois é por meio delas que o intercâmbio de propriedades entre os objetos aludidos em uma demonstração pode se dar.

O terceiro grupo é interpretado como aumentando o léxico, isto é, introduzindo novos termos por meio dos que já estão disponíveis, e deste modo não estão muito distante do ideal moderno de definição. Já o quarto grupo pode ser visto como o segundo, bastando que se substitua, na interpretação, os adjetivos pelas locuções verbais. Deste modo, eles também estabelecem condições para que propriedades sejam atribuídas a determinados objetos.

Com relação ao arranjo das definições, Netz apresenta outro aspecto que o modo usual como o texto euclideano é apresentado nos dias de hoje fez cair no esquecimento[57]. Trata-se da ausência, no texto original, dos números que acompanham e distinguem as definições. De acordo com Netz, as definições são apresentadas como um texto contínuo, sem separações por linhas ou números – os quais não são utilizados em nenhum lugar dos *Elementos*. Muitas das definições, tidas em geral como inúteis, são vistas por Netz como uma exceção ao *modus operandi* euclideano, restrito em geral exclusivamente à linguagem objeto, como momentos em que são explicados como serão utilizados alguns termos, e quais são os objetos da teoria. A existência desta meta-linguagem, no entanto, não fere o caráter que foi atribuído às demonstrações euclideanas (a saber, na linguagem objeto, exclusivamente), pois não são utilizadas nas demonstrações – pelo que, curiosamente, autores como Kline as consideram inúteis.

Após as definições, como já foi visto no primeiro capítulo, poucos são os termos definidos que reaparecem no texto. A palavra “ponto”, por exemplo, é substituída no texto da demonstração por uma letra determinada – a qual, na

[57] Netz atribui a culpa por tal ostracismo à edição de Heiberg (cf. Netz 1999, p. 94).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

visão de Netz, é a verdadeira unidade funcional da linguagem dos *Elementos*. Por conta disso, Netz é levado a afirmar que as definições não são importantes como reguladoras do texto, funcionando num nível, por assim dizer, meta-teórico. Mas chega a sugerir, ao final de sua exposição sobre o tópico, aquilo que Shabel, Levi e outros também têm sustentado: que as definições menos funcionais sejam como que um guia de leitura do diagrama[58]. Não obstante, reitera que talvez se tenha dado muita importância às definições como reguladoras do texto ao longo da história da prática. E talvez por isso tenha passado despercebido o quão uniforme e esquemático ele é.

O texto de uma demonstração à maneira euclideana é erigido com poucas palavras (tanto de caráter matemático quanto de uso mais comum), utilizadas de maneira tal que algumas podem ser vistas como fórmulas[59], utilizando-se mais das expressões que apontam para o diagrama do que de palavras da linguagem natural. E, mais importante, o léxico não varia significativamente de um autor para outro, o que revela que o texto, tanto quanto o diagrama, deve ser construído e lido de acordo com padrões bem estabelecidos pela prática matemática da época.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

[58] Cf. Netz 1999, p. 102.

[59] Para uma excelente descrição do que Netz considera como sendo fórmula na matemática grega, cf. Netz 1999, pp. 128-167. Em sua exposição, o autor constata, dentre outras coisas, que as fórmulas são de fácil manipulação porque são compostas de poucos elementos primitivos, e possibilitam a dedução dos resultados porque espelham as relações lógicas entre os conceitos – teses que contrariam o ponto de partida das reconstruções formais: o caráter informal do texto euclideano.

4.4.3.
Generalidade e necessidade

Após analisados o texto e o diagrama das demonstrações – os dois responsáveis pelo surgimento da dedução na matemática grega – o autor aborda dois temas que têm sido utilizados como alguns dos principais cavalos de batalha pelos que questionam a prática grega relativamente ao rigor que uma demonstração matemática requer. Tais temas são a generalidade e o caráter necessário que demonstrações matemáticas supostamente devem possuir.

O diagrama enquanto sistema discreto e relativamente simples de pontos e relações, e o texto enquanto um sistema também simples e discreto de fórmulas, composto a partir de um léxico limitado e regimentado, são os dois responsáveis pelo caráter necessário das demonstrações euclideanas, uma vez que as demonstrações mais complexas serão efetuadas por meio dos princípios aceitos sem demonstração. Como este processo é sempre recursivo, deve-se reconhecer a necessidade das conclusões uma vez que se aceite os pontos de partida. Além disso, os resultados alcançados e mantidos sempre ao alcance[60] possibilitam que casos mais complicados sejam tratados com o mesmo rigor. Assim, o diagrama não se torna um emaranhado ininteligível de linhas e pontos, já que resultados já demonstrados não necessitam ser diagramaticamente construídos em cada caso em que sejam utilizados.

Assim, tal como é de se esperar dos sistemas axiomáticos, em Euclides são dadas configurações básicas para a linguagem do sistema, correspondentes aos princípios indemonstráveis, e a partir delas se constroem configurações mais complexas, as quais podem sempre ser decompostas em termos daquelas mais simples. Os resultados obtidos neste processo são vistos como seguindo-se necessariamente dos princípios aceitos. Não há, portanto, lugar para críticas às demonstrações euclideanas que partem do pressuposto de que, por utilizarem-se do diagrama (que os críticos invariavelmente vêem como instâncias e não como parte da linguagem do sistema), elas possuem um caráter irremediavelmente particular.

[60] Que compõem o que, usando uma terminologia que ele toma emprestado de Saito, Netz chama “caixa de ferramentas”. Trata-se de resultados elementares cuja maestria e compreensão deveria ser buscada por todos os que se dedicassem ao tema. Destes resultados, as proposições dos *Elementos* constituem a maior parte.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

A mesma razão é aludida quando se alega que as demonstrações de Euclides não são gerais porque se dão sobre um caso particular – a configuração diagramática escolhida. Partindo do comentário de Mueller sobre a falta de uma justificativa para a generalidade dos resultados alcançados por Euclides, Netz trata de olhar detalhes da prática que faziam com que, embora não explicitamente abordada, a generalidade dos resultados devia ser de alguma forma aceita pelos participantes.

Netz toma um caminho um pouco diferente daquele tomado por Manders e Mumma. Estes estão interessados em mostrar por que uma configuração diagramática particular pode fornecer um resultado geral, e a resposta para a questão foi dada por meio dos aspectos co-exatos dos diagramas, bem como pela análise de casos distintos, quando necessário. Dito de outro modo, os resultados são gerais porque os aspectos dos diagramas que são utilizados na demonstração são aqueles que seriam observados em qualquer diagramação razoável (ou seja, sem deformações exageradas ou anomalias facilmente detectáveis), e portanto não tornam o resultado válido apenas em particular, mas para qualquer caso semelhante.

Utilizando-se como exemplo do problema que abre o Livro III, a saber, encontrar o centro de um determinado círculo, Netz apresenta um dos aspectos pelos quais os gregos aceitavam suas demonstrações como válidas em geral. Após encontrar o ponto que representaria o centro, Euclides apresenta uma *reductio ad absurdum* para mostrar que qualquer ponto distinto daquele não poderá ser o centro do círculo dado. A demonstração é efetuada apenas para um caso, e o autor apenas argumenta que “similarmente” será demonstrado que nenhum outro ponto exceto aquele encontrado será o centro. O argumento de Netz envolve mostrar que casos como este não envolveriam modificação da sequência textual. As mesmas palavras seriam utilizadas, e o mesmo resultado obtido. Estes são os casos, por exemplo, em que as modificações seriam apenas das posições relativas de determinados elementos no diagrama – as quais, apesar de potencialmente infinitas, não necessitariam de um tratamento diferente. Quando, por outro lado, as variações envolvem mudanças significativas, tais que uma mudança no texto da demonstração também fosse necessária, em geral trata-se de casos de mal uso do diagrama (supor que o centro do círculo está fora da área do mesmo, ou sobre sua circunferência, por exemplo). Casos como estes, no entanto, são simplesmente ignorados como irrelevantes – pelo que Netz reitera que não há, na prática grega, preocupações

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

de ordem metalinguística, em virtude das quais casos como estes também deveriam ser considerados.

Este procedimento, todavia, antes de ser uma generalização de um resultado, é a generalização da demonstração mesma: afinal, fica garantido que a mesma demonstração seria efetuada para configurações diferentes. Deste modo, a generalidade que se encontra em casos como estes é mais uma repetibilidade da demonstração do que generalidade no sentido que se costuma atribuir ao termo – a saber, aquela expressa na lógica moderna pelo quantificador universal acoplado a uma fórmula. A repetibilidade da demonstração em lugar da generalização do resultado é, como foi visto, algo semelhante ao que Mueller já havia notado.

Ainda levando em conta texto e diagrama, Netz observa que a liberdade que um praticante pode ter na escolha das configurações é limitada às fases de enunciação e de exposição, onde uma determinada configuração é introduzida. Na fase de construção, embora se possa pensar o contrário, tal liberdade não existe. Uma vez que, por exemplo, é dada uma linha reta AB, e é escolhido fora dela um ponto C a partir do qual se deva traçar uma perpendicular, o ponto de intersecção da perpendicular com a reta dada já estará determinado de maneira unívoca. Por esta razão, não há, em geral, casos para se considerar quando a construção propriamente dita tem lugar na demonstração. Netz alega que, em casos onde há um relativo grau de liberdade na escolha de uma configuração, o texto da demonstração utiliza, para os termos cuja posição pode variar, uma espécie de quantificador acoplado, o qual parece indicar que variações na escolha da posição do objeto designado não afetam o desenvolvimento da demonstração.

Assim, a repetição e a invariabilidade da demonstração frente à variação das ações possíveis são as duas fontes da generalidade nas demonstrações de Euclides. Abaixo, nas respostas às principais críticas dirigidas aos *Elementos*, será apresentado o esquema que Netz utiliza para descrever as demonstrações de Euclides, e com isso tornar mais claro seu ponto de vista. Sua interpretação é feita tendo como pano de fundo a descrição oferecida por Mueller[61] e apresentada no primeiro capítulo deste trabalho, a qual Netz julga incompleta por concluir que a generalidade era alcançada meramente pela repetição da fórmula demonstrada em diferentes partes da proposição.

[61] Mueller 1981, pp. 12-14.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

Ao tratar aqueles fragmentos do texto que ele denomina fórmulas, Netz distingue fórmulas de construção (representadas no esquema por C) e fórmulas de predicado (representadas por P). Assim, a estrutura das demonstrações seguem de maneira geral o esquema[62]:

1) no enunciado (*protasis*) é apresentado uma alegação geral, sem referência a pontos ou objetos específicos no diagrama, a qual pode ser formalmente descrita da seguinte forma: $C(x) \rightarrow P(x)$. O enunciado pode ser visto como estabelecendo que um resultado se segue uma vez que sejam cumpridas algumas condições.

2) na exposição, ou estabelecimento de condições (*ekthesis*), é apresentado um caso particular que cumpre com as condições: $C(a)$. Nesta etapa, o diagrama entra em cena, e é representado no esquema pela constante *a*.

3) em seguida, na especificação ou definição de objetivo (*diorismos*), com as palavras "Eu digo que...", Euclides alega que o consequente do condicional apresentado no enunciado também vale para aquele caso particular: $P(a)$. Juntamente com a exposição, esta etapa forma a segunda repetição do enunciado que se quer demonstrar.

4) após repetir o enunciado para a configuração particular, é apresentada uma série de construções (*kataskeue*) sobre o diagrama escolhido, introduzidas pela palavra "pois". Estas construções, obviamente, não incluem a construção já pressuposta na exposição, e portanto tomam a forma: $C(b),...,C(n)$.

5) em seguida, na parte chamada prova (*apodeixis*), são derivadas propriedades destas construções: $P(b),...,P(a)$. A derivação acaba quando a fórmula apresentada na especificação é alcançada. Por esta razão, a sequência construção-prova é designada para demonstrar $P(a)$, apenas, e não o condicional $C(x) \rightarrow P(x)$.

6) finalmente, na conclusão (*sumperasma*), a proposição é repetida em forma geral: $C(x) \rightarrow P(x)$. Com esta aparição, a proposição demonstrada é repetida pela quarta vez, já que a seqüência construção-prova constitui também uma repetição do enunciado[63].

[62] Cf. Netz 1999, pp. 253-257.

[63] A qual talvez passe despercebida por Mueller por não estar explicitamente vinculando o antecedente e o consequente do condicional.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

O argumento de Netz em favor da generalidade das demonstrações euclideanas baseia-se sobre o fato de que as etapas de construção-prova constituem uma derivação do consequente a partir do antecedente do condicional, que foi apresentado na exposição. E, de acordo com o autor, a prova de *P(a)* a partir de *C(a)* forma a base para a afirmação geral $C(x) \rightarrow P(x)$[64].

Embora concorde com Mueller que demonstrar *P(a)* não é o mesmo que demonstrar $C(x) \rightarrow P(x)$, Netz argumenta que a visão de Mueller é equivocada na medida em que não dá a devida atenção para o fato de que a sequência construção-prova forma apenas uma espécie de apêndice para as fases de exposição-especificação. Após o condicional ser estabelecido de maneira geral, no enunciado, é dito na exposição que um caso particular cai sob a descrição do antecedente, e na especificação é dito que as propriedades estabelecidas no consequente valem para este caso. A construção e a prova que se seguem cumprem o papel de mostrar que o último se segue do primeiro no caso particular em questão. Assim, a combinação da exposição e da especificação, ajudada pela construção e pela prova, demonstram a conclusão, já que mostram que o consequente se seguirá do antecedente para qualquer caso particular[65].

Netz conclui sua obra apontando para uma característica comum entre a matemática grega e a matemática moderna, a saber, o caráter condicional de suas proposições, ou, em outras palavras, sua característica de serem teorias compostas de demonstrações a partir de premissas. Deste ponto de vista, o sistema axiomático euclideano não deixa a desejar frente aos sistemas axiomáticos modernos. Mudanças radicais na linguagem diferenciam os últimos do primeiro, e se pode notar diferenças quanto à natureza das premissas que utilizam (axiomas expressos em linguagem formal nos últimos, e postulados,

[64] Netz faz uma observação interessante com relação à formulação geral da enunciação e da conclusão comparada com as formulações particulares, envolvendo as letras que representam elementos no diagrama, na fase de especificação: quando estão presentes as letras designando o diagrama, a descrição dos elementos é suprimida; assim, em vez de “o ângulo oposto ao vértice”, por exemplo, utiliza-se apenas “o ABC”, indicando que o diagrama é neste caso o encarregado de mostrar que este ângulo é o ângulo oposto ao vértice (cf. Netz 1999, pp.262-263).

[65] Mesmo Russell, que pode ser incluído no grupo dos que rejeitam o uso dos diagramas em demonstrações, parece concordar com os argumentos de Netz. De acordo com suas palavras em “Mathematical Logic Based on the Theory of Types”, a figura particular escolhida para uma demonstração comporta-se como um parâmetro na lógica quantificacional clássica (cf. Macbeth 2009, p. 8).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

definições, noções comuns e assunções vinculadas aos diagramas, no primeiro) mas isto não quer dizer que os tornem mais dignos de serem chamados axiomáticos.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

4.5.
Considerações finais

Como espera-se ter mostrado no segundo capítulo deste trabalho, os diagramas foram ignorados por parte dos que se propuseram reconstruir de maneira supostamente mais rigorosa a geometria de Euclides por conta de vários fatores, nem sempre interligados. Tal negligência pode ser vinculada, em geral, a questões de caráter operacional, como a inadequação dos diagramas a um tratamento formal do ponto de vista moderno[66]. É possível, além disso, vincular o descrédito com relação aos diagramas euclideanos à uma compreensão apenas parcial da história da geometria grega em geral. Por fim, o declínio das representações diagramáticas pode ser visto como oriundo da aceitação, sem uma justificativa adequada do ponto de vista filosófico, da tese que, por um lado, vincula diagramas a intuições, e por outro, o afasta de um estatuto simbólico. Em particular, passou sem ser devidamente escrutinizada a adoção de um simbolismo ao estilo algébrico em detrimento de outras formas de representação. Do ponto de vista filosófico, isto constitui uma falha na medida em que se deixou de investigar devidamente a importância da escolha de um determinado simbolismo para as demonstrações de uma teoria matemática.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

[66] Afinal, como observa Shoenfield, o tratamento de um sistema axiomático em termos de sentenças, e destas em termos de sequências de símbolos, permite uma análise simplesmente combinatorial para fins de demonstrações, facilitando enormemente o aspecto prático da tarefa de verificação, por exemplo, de se um teorema pode se seguir de um grupo de axiomas (cf. Shoenfield 1967).

4.5.1.
Respostas às críticas modernas

No capítulo anterior foram apresentadas as principais críticas ao método sintético nos moldes euclideanos, sintetizadas por Kline em número de cinco, as quais serão aqui retomadas e confrontadas com os argumentos oferecidos pelos trabalhos acima descritos em favor da metodologia clássica. Elas envolvem (i) pontos de intersecção que só aparecem no diagrama, sem licença textual; (ii) a falta de generalidade dos diagramas; (iii) o método de superposição; (iv) casos envolvendo a noção de infinito; e (v) a construtibilidade como critério de existência.

De acordo com o que foi apresentado acima, o item (i) não oferece dificuldades para ser refutado. Com efeito, os únicos pontos de intersecção utilizados da maneira descrita são aqueles que estariam disponíveis em qualquer diagramação, e que por esta razão não podem ser considerados aspectos acidentais dos diagramas. Quando é necessário que se considerem diferentes posições para um ponto determinado pela intersecção de linhas, isto é levado em consideração, e embora Euclides trate apenas de um dos casos, não se deve tomar isso como uma falha sua em perceber a existência de casos alternativos. Além disso, como pode-se ver na obra de Netz, os pontos utilizados não podem ser levados em consideração apenas por estarem presentes no diagrama. Eles devem ser trazidos ao texto, “batizados” com uma letra. E os pontos que podem ser assim tratados, são justamente aqueles oriundos de aspectos co-exatos do diagrama.

A objeção (ii) pode ser confrontada por meio dos argumentos de Manders. Os diagramas utilizados, com efeito, são suficientemente gerais, no sentido de apresentarem aspectos que todos os diagramas adequados ao contexto apresentariam, por um lado, e também porque, quando é impossível que um diagrama sirva a todas as configurações possíveis, é necessária a consideração de casos separados. E mesmo que Euclides não analise-os separadamente, o sistema criado por Avigad, Mumma e Dean mostra que seu procedimento é livre de erro, pois o argumento permaneceria o mesmo para toda uma classe de diagramas equivalentes. Reforça esta tese a constatação de que, mesmo que Euclides use apenas um diagrama por proposição[67], o não surgimento de

[67] Esta afirmação vale apenas para alguns livros dos *Elementos*, uma vez que no Livro III, por exemplo, há diagramas distintos para casos distintos.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

resultados parciais ou incorretos nos *Elementos* revela ao menos uma sorte fora do normal de sua parte. Como foi mencionado na seção anterior, Netz possui um bom argumento para que se conceda às demonstrações euclideanas a generalidade que delas se espera, mesmo desde um ponto de vista moderno.

As críticas (i) e (ii) parecem incorporar a necessidade do que Manders chama de prevenção de atipicalidade, característica da abordagem moderna da geometria sintética. Um diagrama atípico seria aquele que apresentasse de maneira equivocada determinadas características, que incluem desde o caráter reto ou circular de linhas até o surgimento de pontos de intersecção. A prevenção de atipicalidade, que segundo Manders era vista pelos modernos como necessária aos raciocínios diagramáticos, não constitui uma condição para o sucesso da prática. Os aspectos exatos, com efeito, não podem ser lidos do diagrama, e portanto não importa se este os representa de maneira inadequada. Deste modo, não há razões para que se tome a prevenção de atipicalidade como necessária para estes casos. Com relação aos aspectos co-exatos, tampouco é necessário um cuidado especial na escolha e produção do diagrama. Afinal, os aspectos co-exatos são aqueles presentes de maneira inequívoca nos diagramas, os quais devem ser analisados em casos separados conforme haja necessidade – sugerida pela possibilidade de que outro diagrama diferente sirva para a representação da mesma situação.

Além disso, de um ponto de vista que leve em conta o possível contexto da prática, a generalidade não significava o que significa hoje. De acordo com o autor, a apresentação de casos distintos (diagramas alternativos) que estão de acordo com o resultado, ou de objeções que pudessem desqualificá-lo, eram os métodos pelos quais, no longo prazo, se garantiria a generalidade buscada – quando determinado resultado era aclamado por se aplicar a todos os casos propostos de maneira uniforme. Com efeito, Euclides não possuía um artefato poderoso como o utilizado na reconstrução formal de Tarski ou mesmo na de Hilbert, onde a impossibilidade de casos que contrariam o resultado pode ser aferida de antemão. A generalidade, assim, seria alcançada como que por exaustão das possibilidades de casos distintos, de acordo com a visão de Manders. Os comentários de Proclo, repletos de casos e objeções às proposições demonstradas nos *Elementos*, constituem uma boa evidência deste fato. Mas, mesmo que não se saiba se a tese é ou não adequada, não se pode

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

pressupor que aos gregos fosse possível conceber a generalidade como universalidade, no sentido que a lógica moderna confere ao termo[68].

Com relação à observação de Beeson[69] a respeito de I,2 como não atentando para os casos em que o ponto A caia sobre uma extremidade de BC, vale retomar a descrição de Netz da parte textual das demonstrações. Com efeito, mesmo que se considere tal caso como legítimo (o que é questionável do ponto de vista histórico), pode-se perceber que o raciocínio seria o mesmo para casos distintos, bastando para isso que se considerasse o segmento entre A e B (ou C) como possuindo magnitude nula, e com isso estendendo esta propriedade às figuras que a demonstração pede que sejam construídas a partir dele. As igualdades ao final da demonstração revelar-se-ão as mesmas em qualquer caso.

O método de superposição, mencionado no item (iii), e criticado através de toda a história da geometria euclideana, não parece necessitar o uso do diagrama, ao contrário do que se tem afirmado. A proposição I,4, alvo recorrente deste grupo de críticas, não depende do diagrama que a acompanha pelo simples fato de não utilizar aspectos co-exatos, sendo demonstrada apenas com base em elementos textuais – embora a ação de superpor um triângulo ao outro pareça sugerir seu uso efetivo. Mesmo assim, Kline alega que o método pressupõe tanto a movimentação das figuras no plano – sendo que não há base lógica para a adoção desta noção no sistema – quanto a conservação das propriedades das figuras quando elas são movidas – o que implica uma forte pressuposição a respeito da natureza do espaço físico[70].

Todavia, ninguém necessita mover os diagramas para convencer-se do resultado. Do mesmo modo, não é necessário que se pressuponha a preservação das propriedades dos diagramas, uma vez que a igualdade demonstrada não depende daquelas propriedades que seriam relevantes desde um ponto de vista diagramático, como argumentam Avigad e Mumma. Certamente a proposição é das mais pitorescas que se encontram nos *Elementos*, mas ainda assim está longe de comprometer a reputação do sistema – nas reconstruções formais ela é tomada como um axioma, pelo que não se deve dizer que Euclides está errado ao tentar demonstrá-la.

---

[68] Manders 1995, pp. 120-122.

[69] Beeson 2009a, p. 8 e ss..

[70] Kline 1972, p. 87.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

Com relação ao item (iv), soa pelo menos anacrônica a alegação de Kline segundo a qual faltam recursos para tratar casos que envolvam o infinitamente grande ou o infinitamente pequeno. Afinal, não é necessário que se considere tais noções na geometria elementar euclideana. Kline observa que Euclides evita falar da infinitude de uma linha reta, dizendo apenas que ela pode ser prolongada indefinidamente, e do mesmo modo, evita utilizar a noção de infinito no quinto postulado, preferindo falar das condições pelas quais duas retas devem se encontrar em um ponto determinado. Não obstante este fato, deve-se ter em mente que a definição de paralela envolve de certa forma a noção de infinito, e que portanto a formulação do postulado tal como é apresentada pode possuir outras razões de ser que não evitar a noção de infinito. Em suma, as noções de infinitamente grande ou infinitamente pequeno não são utilizadas porque não são necessárias para as demonstrações, nas quais fatores métricos são irrelevantes. E os diagramas, neste caso, estão tão isentos de defeitos quanto o sistema numérico, para o qual estas noções também acarretam problemas.

Finalmente, o caráter construtivo da geometria euclideana, mencionado no item (v) não parece ser um defeito da prática, mas apenas uma restrição imposta pela escolha dos métodos, tal como ocorre com os métodos da aritmética intuicionista, por exemplo[71]. Não se pode dizer, neste sentido, que a aritmética intuicionista é defeituosa por impor o mesmo tipo de restrição com relação as operações que são aceitáveis nas suas demonstrações. É de se esperar, de uma teoria para a qual uma parte do simbolismo contribui de maneira independente nas demonstrações, que haja este tipo de restrição sobre a composição destes símbolos, do mesmo modo que na aritmética finitária as demonstrações – que envolvem a notação de barras – devem possuir caráter construtivo. Além disso, não há um consenso sobre em que medida os postulados de construção e os problemas estão relacionados a afirmações de existência – ou ainda de determinação ou de unicidade.

Citando Mueller em seu favor, Manders afirma que Euclides não parece apresentar nenhuma preocupação com estes tópicos, uma vez que seu método é suficientemente claro a este respeito[72]. A maneira como o texto e o diagrama interagem, como será visto adiante, é suficientemente clara para que se torne

[71] Deve-se lembrar que, para a formalização dos *Elementos*, Avigad, Mumma e Dean utilizam apenas um fragmento construtivo da lógica clássica.

[72] Cf. Manders 1995, p. 100; e Mueller 1981, pp. 19, 32.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

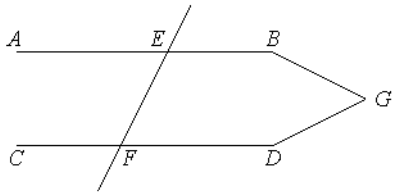
desnecessária sua explicitação. Entre dois pontos A e B pode-se traçar a reta AB, e pela própria maneira como Euclides nomeia os objetos geométricos, não haverá outra reta entre estes dois pontos – não por razões que fiquem claras apenas por meio do diagrama, já que a representação textual desta reta será unívoca (poder-se-á escrever AB ou BA, mas isto – e agora sim por razões diagramáticas – tampouco necessita maiores explicações). Quando necessário, no entanto, Euclides demonstra a unicidade de determinados elementos. Isto acontece, por exemplo, quando as construções não asseguram unicidade: em I,7, por exemplo, demonstra-se que há apenas uma maneira de se fechar um triângulo a partir de três segmentos determinados. Diferentemente do que ocorre com os segmentos AB e BA, cuja unicidade é diagramaticamente assegurada por se tratar de coincidentes, no caso dos triângulos de I,7 não se pode inferir que eles são na verdade um só apenas pela aparência do diagrama, pois neste caso não se trata de coincidentes, e portanto a unicidade da construção depende de estipulações textuais. Em suma, mais uma vez é a impossibilidade de controle total na produção dos diagramas o que determina a necessidade de estipulações de unicidade (não há, com efeito, a possibilidade de que se tracem duas linhas distintas ente dois pontos, ao passo que no caso dos triângulos isto não é diagramaticamente claro).

Além dos itens mencionados, as provas por *reductio* também constituem um ponto polêmico do assim chamado "raciocínio diagramático". Em casos nos quais é necessário o uso do diagrama, este falha claramente em apresentar algumas das condições às quais deveria estar conforme. Em I,6, por exemplo, este é justamente o truque para a derivação da contradição, e nestes casos não se pode apontar nenhum problema, dado que é da natureza deste tipo de demonstração que algumas das atribuições utilizadas não sejam verdadeiras[73]. Em outros, como em I,25, o diagrama não é utilizado, e a derivação das contradições se dá apenas por via textual. Mas alguns casos são no mínimo curiosos, como em I,27, onde o diagrama apresenta, ao que tudo indica de maneira proposital, elementos que não podem ser utilizados, e cuja aparição parece ser apenas a inclusão desnecessária de potenciais fontes de erro. A proposição em questão, como foi visto, estabelece que é impossível que duas

[73] Como Hardy bem descreve, em *A Mathematician`s Apology*, uma prova por absurdo é um gambito muito mais ousado do que qualquer gambito de xadrez, afinal nela, em lugar de oferecer uma peça em sacrifício para a obtenção da vitória, é oferecido o jogo como um todo (citado em Reid, 1963, p. 11.).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

retas que formam com uma terceira ângulos alternos iguais se encontrem em um ponto. A hipótese para a *reductio*, assim, é a de que elas o fazem, e o diagrama da proposição é o seguinte:



Embora EBG e FDG devam ser tomadas como retas, o diagrama as apresenta como compostas de dois segmentos distintos que encerram um ângulo cada. Estes elementos espúrios, no entanto, não são utilizados na demonstração (como seria de se esperar, afinal não são aspectos co-exatos legítimos na medida em que não foram introduzidos pelo texto nem tampouco pela produção de um diagrama apropriado) – são exemplos, portanto, de peculiaridades do diagrama que não fariam parte dos literais no sistema *E*. Manders oferece algumas possíveis razões para a utilização de um diagrama como este sem perda de rigor[74], as quais, embora pertinentes, não parecem necessárias quando se tem uma boa compreensão de como funciona a divisão de tarefas entre texto e diagrama. Além disso, como a) as únicas espécies de linhas que podem ser utilizadas são retas e círculos, b) como as linhas em questão são do primeiro tipo e c) como não há razões para que se escolha uma delas como contendo o ponto G e apenas a outra contendo o ângulo espúrio (o que favoreceria talvez ainda mais o uso de elementos não-autorizados, não há muito o que se estranhar com relação a esta proposição, nem com as demais provas por absurdo que aparecem nos *Elementos*. Em suma, não há mais mistério nas provas por absurdo com diagrama do que há nas que utilizam-se de outros artefatos.

O uso do diagrama em Euclides não pode, pelas razões aludidas acima, ser considerado algo potencialmente prejudicial ao rigor demonstrativo – pelo menos não por conta das razões acima criticadas. Deve, isto sim, receber o tratamento devido por parte dos que se dedicam ao tema, afinal constitui, ao

[74] Manders 1995, pp. 115-118.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

lado de parte da linguagem natural e das letras indicativas de pontos, uma parte importante dos artefatos utilizados na geometria. Uma visão mais compreensiva desta prática revela que as demonstrações de Euclides não deixam a desejar se comparadas com as demonstrações modernas enquanto partes de sistemas axiomáticos. Para que seja possível tal comparação, no entanto, deve-se tomar o sistema euclideano como dotado de uma linguagem mista, afinal é por conta deste caráter que podem ser deixadas sem explicitação textual algumas obviedades trazidas à tona pela notação. Isto vai de encontro à tese por vezes seja sustentada de acordo com a qual o sistema axiomático euclideano é deficiente se comparado a sistemas como o de Hilbert porque seus axiomas são insuficientes para a derivação de todos os resultados.

Visões como esta, no entanto, parecem prescindir de uma boa compreensão a respeito da importância do simbolismo no desenvolvimento de uma teoria formal. Além da inobservância do caráter misto da linguagem dos *Elementos*, ou ao menos a pressuposição da superioridade do texto com relação ao diagrama, os pontos de vista influenciados pela concepção formal ou sentencial de demonstração parecem não dar a devida atenção à importância do simbolismo para a caracterização de uma teoria. Em geral pressupõe-se que a geometria dos *Elementos* e a dos *Grundlagen* podem serem comparadas como se as razões de ser destas teorias fossem as mesmas[75].

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

[75] Deve-se sugerir aqui a leitura das observações de Wittgenstein acerca do estatuto especial das teorias formais. De acordo com seu ponto de vista (que infelizmente não pôde ser apresentado neste trabalho, mas que certamente o influenciou sob diferentes aspectos) as teorias matemáticas são mais bem entendidas como jogos, como sistemas fechados, e não como diferentes maneiras de se referir a uma *mesma coisa*. Suas peculiaridades (dentre elas o método e o simbolismo) nem sempre podem ser compreendidas ou utilizadas desde uma perspectiva externa, e a tradução de umas em termos de outras pode revelar-se inútil – como no caso dos tratamentos formais das teorias matemáticas que visam demonstração de consistência, por exemplo (cf. Waismann. 1973).

4.5.2.
Em defesa dos diagramas na geometria euclideana

Com vistas a suprir as faltas acima mencionadas, começaram a surgir, um século após a reconstrução formal, novas propostas de interpretação das demonstrações euclideanas. Sua característica comum foi o interesse em entender a importância dos diagramas para as mesmas. O trabalho de Manders representa uma retomada do tema em termos filosóficos, na medida em que investiga os motivos que fazem com que os diagramas também demonstrem. O de Avigad, Mumma e Dean, reconhecendo, por meio das idéias de Manders, que os diagramas são símbolos, apresenta um tratamento lógico mais adequado para os *Elementos* do que aquele oferecido por Hilbert. Finalmente, no trabalho de Netz vê-se uma tentativa de suprir a deficiência histórica com relação à geometria grega, e, por conseguinte, também com relação à geometria euclideana.

Como foi mencionado no começo do capítulo, estes trabalhos são alguns expoentes de um movimento de renovação e principalmente ampliação do âmbito de investigação da filosofia da matemática. Tomando-os como base, pretende-se aqui defender, contra as concepções originadas a partir da reconstrução formal da geometria, três teses distintas e interligadas acerca dos diagramas na geometria euclideana:

I – Eles não são ilustrações ou exemplos daquilo de que se trata nas demonstrações.

II – Sua função é, ao lado da formulação sentencial dos axiomas, funcionar como uma notação, como símbolos sujeitos a manipulação regrada.

III – Sua presença no sistema euclideano não torna suas demonstrações menos rigorosas que as do sistema de Hilbert.

Em favor da primeira tese é possível encontrar evidências na descrição oferecida por Netz. Através desta é possível reconhecer que seu papel era bem mais ativo do que até então se supunha: i) pela maneira como os diagramas eram elaborados de maneira paralela à elaboração do argumento; ii) pelo seu caráter indispensável para a compreensão da demonstração; iii) por serem responsáveis pelo surgimento de características cuja derivação é impossível a partir do texto somente. Além disso, o fato de não serem desenhados de maneira a corresponder à situação discutida (como no caso de I,27) também reforça a tese de que eles não são ilustrações. Por fim, as provas por *reductio*, que via de regra repousam sobre aspectos tanto textuais quanto diagramáticos,

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

ajudam a dissipar qualquer dúvida a respeito da primeira tese. Com base nestes argumentos é possível também refutar concepções da geometria euclideana como a geometria do espaço visual. Mesmo que se conceda, contrariando as evidências, que os diagramas euclideanos podem ser vistos como instâncias dos conceitos geométricos, seu uso nas demonstrações não pressupõe tal natureza.

A existência de demonstrações por *reductio* nos *Elementos* também pode ser vista como uma evidência tanto para a primeira quanto para a segunda tese. No entanto, sem uma resposta à pergunta pela confiabilidade dos diagramas como meios de prova, este fato também pode ser usado para desqualificar o sistema euclideano. Tal resposta, entretanto, pode ser encontrada no trabalho de Manders. Por meio da distinção entre aspectos exatos e co-exatos nas demonstrações de Euclides, Manders mostra que as informações que podem ser retiradas do diagrama obedecem a regras que, embora implícitas no sistema, deviam ser suficientemente óbvias para que aqueles que se engajassem na prática da geometria as percebessem e dominassem. Além disso, das informações que um diagrama pode apresentar, enquanto uma figura particular, apenas aquelas que podem ser tidas como necessárias podem ser utilizadas. Diversos trabalhos anteriores aos que foram extensivamente expostos acima, por sua vez, oferecem caracterizações dos símbolos diagramáticos que tanto os diferenciam com relação aos símbolos algébricos, no que diz respeito ao modo como portam informação, quanto os identificam com aqueles enquanto símbolos, ou seja, enquanto recursos confiáveis em uma demonstração[76].

Finalmente, com base nas duas teses precedentes, pode-se sustentar que a reconstrução formal hilbertiana, embora tenha virtudes incontestáveis de um ponto de vista lógico, não constitui um avanço com relação ao sistema original no que diz respeito ao rigor. Pode-se dizer, inclusive, que o sistema de Hilbert é uma versão inversamente proporcional ao de Euclides no que diz respeito à apresentação do conteúdo e da lógica da teoria – se em Euclides vê-se muita geometria e pouca lógica, em Hilbert a situação é inversa. Porém, as alegadas "falhas" que os modernos apontaram em Euclides apenas são detectáveis uma vez que se deixe de levar em conta que os diagramas fazem parte de sua linguagem, e que portanto devem ser considerados em pé de igualdade com as formulações sentenciais dos axiomas.

Além disso, Netz mostrou que há no texto euclideano muito mais formalismo do que se pensava, de modo que não se pode atribuir aos seus

[76] A este respeito, cf., por exemplo, Shimojima 1996, Shin 1994, Stenning 2000.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

argumentos o caráter informal que costumeiramente se lhe atribuía. E as assunções implícitas apenas podem ser assim consideradas quando o sistema euclideano é visto de maneira parcial, desprovido de parte significativa de sua linguagem. Como, além disso, as questões meta-teóricas que o sistema de Hilbert pretende responder mostraram-se passíveis de serem demonstradas mesmo quando se leva em conta o papel dos diagramas, como bem mostra o trabalho de Avigad, Mumma e Dean. Cabe ressaltar aqui que não se está pretendendo desqualificar o trabalho de Hilbert, mas sim elevar a reputação da obra de Euclides no que diz respeito aos padrões de rigor atualmente em voga – reparando um dano que, mesmo que não intencionalmente, a reconstrução formal acabou lhe causando.

Vê-se, portanto, que a rigorização promovida no século XIX, antes de ser um melhoramento do sistema euclideano, é fruto de uma compreensão apenas parcial de seu sistema (causada em partes pela falta de uma boa compreensão da história da prática em questão), bem como do descaso com relação ao papel dos diagramas nas suas demonstrações (devido à falta de investigações de caráter lógico a respeito de seu uso). Talvez pela capacidade de apresentar não apenas as informações que lhe são atribuídas, mas também outras que surgem automaticamente em função delas – "de carona", para usar a expressão de Shimojima – o simbolismo diagramático não foi visto como tal, mas sim como um modelo, uma exemplificação do que se está tratando, e portanto potencialmente perigoso para uma demonstração rigorosa. Assim, em lugar de investigar quais são as informações que podem ser obtidas de carona com outras, preferiu-se recusar o uso deste simbolismo como um todo.

Em filosofia da matemática, ao se aceitar a tese moderna a respeito do que constitui um simbolismo (em geral, caracteres que podem ser arranjados em sequências lineares), deixou-se de lado questões relevantes tais como o papel dos índices nas demonstrações (aquelas peças que, nas apresentações formais das teorias axiomáticas para a matemática, representam os objetos próprios da teoria), e suas relações com os demais símbolos utilizados. Em Euclides, como mostra Netz, o papel das letras é fundamental por fazer a ponte entre as duas dimensões das demonstrações. E em Hilbert, vale lembrar, elas talvez são o único elemento remanescente da geometria euclideana. Nas apresentações da geometria ao estilo analítico, os números fazem este papel, mas não como representantes de unidades, senão mais bem de pontos, ou lugares. Sem estes componentes indicativos, tanto Hilbert quanto o próprio Euclides enfrentariam obstáculos talvez intransponíveis para a execução de seus projetos. Não

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA

obstante, estariam talvez ambos mais próximos de um desenvolvimento puramente linguístico ou sentencial da geometria – se isso se revelasse de fato possível.

Deve-se ressaltar, a título de conclusão, que a diferença dos sistemas simbólicos no que diz respeito à maneira com que os símbolos podem ser veículos de informação (com ou sem geração de informações adicionais) não afeta sua natureza de sistemas simbólicos. As vantagens computacionais do sistemas sentenciais, ou lineares, não podem ser tidas como um diferencial, uma vez que o tratamento computacional das inferências diagramáticas também revela-se possível – embora, talvez por conta da influência da concepção moderna, apenas nos últimos anos tenham surgido propostas neste sentido. Como observa Manders, a redução na diversidade dos artefatos gera uma maior uniformidade nas ações requeridas dos participantes, mas ainda assim sua *participação* é indispensável. Dito de outro modo, especialmente relacionado ao tópico aqui considerado, não há geometria sem geômetras – nem sem algum lugar onde seja possível fazer anotações, desenhar figuras, ou dispor informações em geral. Alguma *esperteza* é sempre requerida dos participantes, tanto na apresentação sentencial quanto na apresentação diagramática desta e de qualquer outra teoria.

Por conta disso, resta investigar de maneira mais aprofundada o modo como um sistema simbólico dispõe informação, e em que sentido os procedimentos demonstrativos que os utilizam podem ser vistos como confiáveis. Pelo que se pode notar à primeira vista, tanto as demonstrações dos *Elementos* quanto as dos *Grundlagen der Geometrie* lançam mão de certas estruturas símbólicas cujo uso obedece determinadas regras (diagramas e estruturas de fórmulas), além de índices cuja função é distribuir informação, pela marcação de lugares determinados em tais estruturas simbólicas (letras). Como ambas revelam-se boas maneiras de se apresentar a geometria – a primeira por seu histórico, e a segunda por ser logicamente equivalente a ela – resta investigar em que medida os sistemas simbólicos se equivalem (de que maneira apresentam o *mesmo*), e em que medida se distinguem (por que uma é mais compreensível ou mais facilmente manipulável do que a outra). A pergunta por qual destes sistemas é *melhor*, pelas considerações que foram tecidas neste capitulo, revela-se simplesmente descabida.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610721/CA