



**João Paulo Roquim Romanelli**

**Uma generalização da equação de Riccati e  
as singularidades da sua Aplicação de  
Poincaré**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática

Orientador: Prof. Nicolau Corção Saldanha

Rio de Janeiro  
Março de 2011



**João Paulo Roquim Romanelli**

**Uma generalização da equação de Riccati e  
as singularidades da sua Aplicação de  
Poincaré**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

**Prof. Nicolau Corção Saldanha**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Carlos Tomei**

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Prof. César Camacho**

Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA

**Prof. Hamilton Bueno**

Departamento de Matemática – UFMG

**Prof. Jairo Bochi**

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Prof. Márcio Soares**

Departamento de Matemática – UFMG

**Prof. Paul Schweitzer**

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 28 de Março de 2011

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

## João Paulo Roquim Romanelli

Bacharel e Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais.

### Ficha Catalográfica

Romanelli, João Paulo Roquim

Uma generalização da equação de Riccati e as singularidades da sua Aplicação de Poincaré / João Paulo Roquim Romanelli; orientador: Nicolau Corção Saldanha. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2011.

v., 75 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (Doutorado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Equação de Riccati; Singularidades; Aplicação de Poincaré; Equações Diferenciais Polinomiais; Soluções Periódicas. I. Saldanha, Nicolau Corção. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

a Ana Carolina, meu anjo...

## Agradecimentos

À PUC-Rio, pela bolsa de isenção.

Ao CNPq e à Capes, que me concederam bolsas de estudo durante meu doutorado.

Ao Prof. Nicolau Saldanha, meu orientador, pela paciência, pelas discussões e pelo acompanhamento deste trabalho.

Ao Prof. Carlos Tomei, pelo apoio e incentivo.

Aos professores e , em especial, aos funcionários Creuza, Otávio, Orlando e Kátia, da PUC-Rio.

A meus pais, pelo apoio constante, e a meus familiares, pela torcida.

Aos amigos de Minas, Gu, Allan, Gilozão, Ana Paula, Duba, Daila, Marianna, Dani, Higor, Stephan, Reynaldo, Ana Rafaela, Geleinha, Dogão, que estiveram sempre por perto nesse período.

Aos amigos Carlos, Profeta, Miguel, Camilla, Kennedy, Eduardo, Betina, Inês, Felipe, Zé Cal, Débora e Yuri, Rodrigo e Fábio XP, do Rio de Janeiro, pelo tempo dividido comigo e pelas conversas vagas.

Aos companheiros de república, Neto, Erick, Fabrício, Luciano e Wellington.

Em especial, a Ana Carolina, pela amizade, pelo carinho, pelos sorrisos e pela paciência.

Ao insubstituível amigo Renato, pela amizade incondicional. Certamente devo a você muito mais do que as palavras e os agradecimentos podem expressar. Saudades sempre!

## Resumo

Romanelli, João Paulo Roquim; Saldanha, Nicolau Corção. **Uma generalização da equação de Riccati e as singularidades da sua Aplicação de Poincaré**. Rio de Janeiro, 2011. 75p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A generalização da equação de Riccati estudada neste trabalho é  $z'(t) = z(t)^n + a_{n-1}(t)z(t)^{n-1} + \dots + a_1(t)z(t) + a_0(t)$ . A Aplicação de Avanço leva  $z_a$  em  $z_b$  se o problema de valor inicial, com  $z(a) = z_a$ , tem solução definida em  $[a, b]$  com  $z(b) = z_b$ . Quando  $a = 0$  e  $b = 1$ , a Aplicação de Avanço é conhecida como Aplicação de Poincaré. O conjunto singular é o subconjunto da esfera de Riemann contendo as singularidades da aplicação de avanço. No caso genérico, o conjunto singular é a união de curvas com um número finito de descontinuidades: correspondentes às soluções que alcançam o infinito pelo menos duas vezes. Como consequência será apresentado um método, baseado na configuração do conjunto singular, para determinar o número de soluções periódicas. Será exibida uma família de equações não autônomas cuja Aplicação de Poincaré é a Identidade num aberto do plano complexo.

## Palavras-chave

Equação de Riccati; Singularidades; Aplicação de Poincaré; Equações Diferenciais Polinomiais; Soluções Periódicas.

## Abstract

Romanelli, João Paulo Roquim; Saldanha, Nicolau Corção(Advisor). **A generalization of the Riccati Equation and the singularities of its Poincaré Map**. Rio de Janeiro, 2011. 75p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The generalization of the Riccati equation studied in this work is  $z'(t) = z(t)^n + a_{n-1}(t)z(t)^{n-1} + \dots + a_1(t)z(t) + a_0(t)$ . The Advance Map takes  $z_a$  at  $z_b$  if the initial value problem, with  $z(a) = z_a$ , has a solution defined on  $[a, b]$  with  $z(b) = z_b$ . When  $a = 0$  and  $b = 1$  the Advance Map is known as Poincaré Map. The singular set is the subset of the Riemann sphere containing the singularities of the advance map. In generic case, the singular set is the union of curves with a number finite discontinuities: corresponding solutions that reach infinity at least twice. As a consequence will be presented a method, based on configuration set singular, to determine the number of periodic solutions. A family of non-autonomous equations whose Poincaré Map is the Identity in a non-empty open subset of the complex plane will be presented.

## Keywords

Riccati Equation; Singularities; Poincaré Map; Polynomial Differential Equations; Periodic Solutions.

# Sumário

1	Introdução	10
2	Soluções Generalizadas e Conjuntos Singulares	14
2.1	Soluções Generalizadas	14
2.2	Conjuntos singulares	25
3	Equações Excepcionais	34
3.1	Descontinuidades de $\Gamma_k$	34
3.2	Exemplos	40
3.3	Equações com infinitas soluções periódicas	44
4	Número de soluções periódicas	51
4.1	Número de voltas	51
4.2	Análise qualitativa	53
4.3	Uma interseção em infinito	57
4.4	Interseção em um ponto além de infinito	63
4.5	Último exemplo	69
	Referências Bibliográficas	71

*o conector foi conectado...*