2
Definição do Problema

2.1
Formulação Matemática

O problema do Fluxo Máximo entre todos os pares de nós surge no contexto de redes, estas representadas por grafos, e deriva-se do problema singular de fluxo máximo entre um nó origem e um nó destino. Para entendimento, segue uma introdução à teoria dos grafos e dos fluxos, e uma apresentação do problema de fluxo máximo. Para mais informações sobre grafos e fluxos, ver as referências [3, 6, 11, 13, 30].

Conceitos básicos da teoria dos grafos:

Definição 1. *Um* ***grafo direcionado*** $G = (V, A)$ *consiste de um conjunto V de vértices v, também chamados de nós, e um conjunto A de arcos a, onde cada arco é um par ordenado* (i, j) *de vértices. O vértice i do par é a fonte do arco e o vértice j o alvo.*

Na Figura 2.1, os arcos são: (v1, v4), (v4, v3), (v3, v2), (v2, v3), (v2, v4) e (v1, v2).

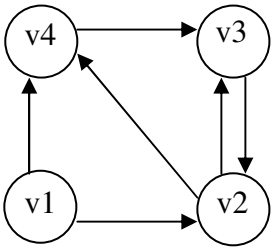


Figura 2.1: Exemplo de grafo direcionado.

Definição 2. *Um grafo direcionado G é dito* ***simétrico*** *se para cada arco* (i, j) *existe um correspondente arco reverso* (j, i).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA

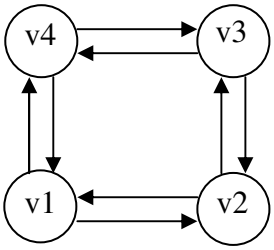


Figura 2.2: Exemplo de grafo simétrico.

Definição 3. *Um **grafo não direcionado** G = (V, E) consiste de um conjunto V de vértices v, também chamados de nós, e um conjunto E de arestas e, onde cada aresta é um par não ordenado (i, j) de vértices.*

Cabe notar que as arestas, representadas pela letra *e*, são diferentes dos arcos, estes representados pela letra *a*. Ao contrário dos arcos, as arestas não possuem sentido, ou igualmente falando, possuem duplo sentido. Dessa forma, um grafo não direcionado possui a mesma estrutura de um grafo direcionado simétrico. Sua representação é ilustrada na Figura 2.3.

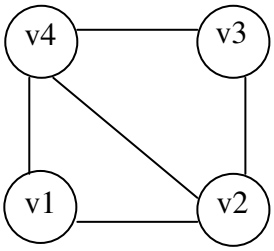


Figura 2.3: Exemplo de grafo não direcionado.

As definições que se seguem são aplicadas a grafos não direcionados, visto que esta dissertação lida apenas com estes casos.

Definição 4. *Uma aresta e = (i, j) é dita **incidente** aos nós i e j. Os nós i e j por sua vez são **adjacentes** entre si e são chamados **extremos da aresta** e.*

Definição 5. *Uma aresta e = (i, i), ou seja, possui o vértice i como seus extremos, é chamada **laço**. Quando duas arestas possuem os mesmos extremos, são chamadas **arestas em paralelo**.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA

A Figura 2.4 ilustra um exemplo de laço e um de arestas em paralelo.

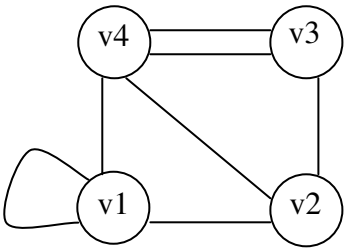


Figura 2.4: Arestas em paralelo ligam os nós v3 e v4 e o laço liga v1 a v1.

Definição 6. *Um grafo que não contém laços e arestas em paralelo é chamado* ***simples****.*

Neste trabalho serão abordados apenas casos de grafos simples.

Definição 7. *É chamado de* ***caminho*** *entre dois nós i e j uma seqüência de arestas* (i, v_1), (v_1, v_2), ..., (v_{k-1}, j), *ou uma seqüência de nós* $i, v_1, v_2, ..., v_{k-1}, j$ *onde dois nós consecutivos são adjacentes. k é o número de arestas no caminho.*

Denota-se i-j ou $P_{i,j}$ *como o caminho de i até j.*

Definição 8. *Um caminho é* ***elementar*** *quando não passa duas vezes por um mesmo nó.*

Neste trabalho, todo caminho referido é um caminho elementar. Na Figura 2.3, um exemplo de caminho entre v1 e v3 é (v1, v2), (v2, v4), (v4, v3).

Definição 9. *Um* ***ciclo*** *é um caminho onde um mesmo nó é o extremo inicial e final do caminho.*

Os ciclos serão sempre elementares nesta dissertação visto que o caminho é sempre elementar. Um exemplo de ciclo na Figura 2.3 é (v1, v2), (v2, v4), (v4, v1).

Definição 10. *Um grafo não direcionado é dito* ***conexo*** *se para todo par de vértices* $\{s, t\}$ *de G, existe um caminho entre s e t.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA

Definição 11. *Um grafo é uma **árvore** se for conexo e não possuir ciclos.*

*Uma **floresta** é um grafo que não possui ciclos.*

A Figura 2.5 ilustra uma árvore e uma floresta.

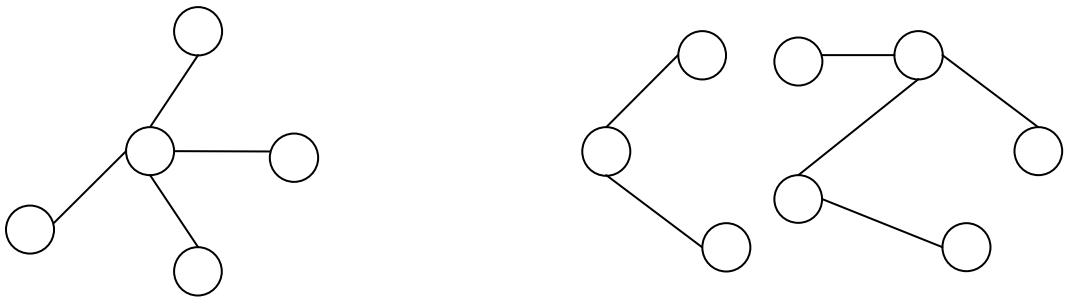


Figura 2.5: Ilustração de uma árvore e de uma floresta.

Definição 12. *Seja G o grafo G = (V, E), V' um subconjunto de V e E' um subconjunto de E. O grafo G' = (V', E') é um **subgrafo** de G.*

*Uma **subárvore** é um subgrafo de uma árvore.*

Definição 13. *Um **grafo parcial** de G = (V, E) é um grafo G' = (V, E'), onde E' é um subconjunto de E.*

Um exemplo de grafo parcial é ilustrado na Figura 2.6.

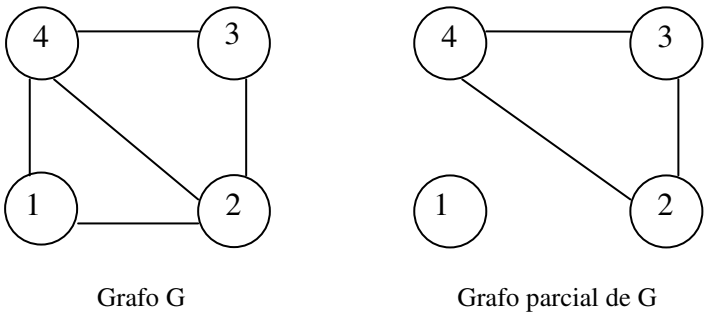


Figura 2.6: Exemplo de grafo parcial.

Definição 14. *É chamada **árvore geradora** de um grafo conexo G, um grafo parcial de G conexo que não contém ciclos.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA

A Figura 2.7 ilustra uma árvore geradora.

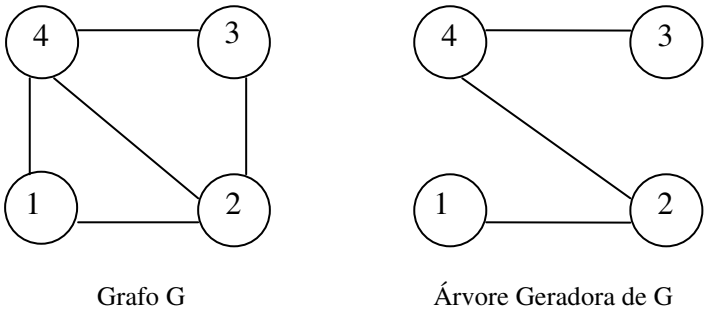


Figura 2.7: Exemplo de árvore geradora.

Como nomenclatura, neste trabalho, a letra *n* representará o número de nós em um grafo, e a letra *m* o número de arestas de um grafo.

Conceitos básicos da teoria de fluxos em rede:

Definição 15. *Uma **rede** (não direcionada) é definida como um grafo G = (V, E) associado a uma função c: E → R+ chamada função de **capacidade**.*

*Dois específicos nós s e t são chamados respectivamente a **origem** (source) e o **destino** (terminal) da rede.*

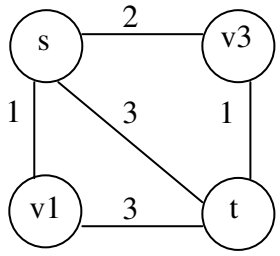


Figura 2.8: Exemplo de rede não direcionada.

Como foi visto, um grafo não direcionado pode ser representado por um grafo direcionado simétrico. Analogamente, uma rede não direcionada possui a mesma estrutura de uma rede direcionada simétrica.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA

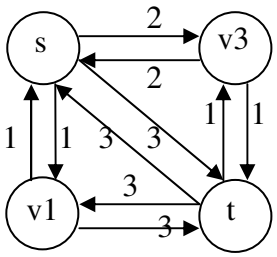


Figura 2.9: Exemplo de rede direcionada simétrica.

Os exemplos das Figuras 2.8 e 2.9 são equivalentes. As arestas em 2.8 são representadas por dois arcos de sentidos opostos em 2.9, onde cada arco possui a mesma capacidade da aresta original, possibilitando assim capacidade igual para qualquer sentido.

Definição 16. *Seja uma rede* $G = (V, E)$ *onde s é o nó origem e t o nó destino. Considere dois subconjuntos complementares* S *e* $\overline{S}$ *de V, ou seja,* $S \cap \overline{S} = \emptyset$ *e* $S \cup \overline{S} = V$*, onde S contém o nó s e* $\overline{S}$ *contém o nó t.* $(S, \overline{S})$ *é o conjunto de arestas com uma das extremidades em S e a outra em* $\overline{S}$*. O conjunto* $(S, \overline{S})$ *é chamado de* ***corte*** *entre, ou que separa, os nós s e t. O corte* $(S, \overline{S})$ *é também simbolizado como corte* $(s - t)$*.*

A ***capacidade do corte*** $(S, \overline{S})$ *é definida como:*

$$c(S, \overline{S}) = \sum_{i \in S, j \in \overline{S}} c(i, j).$$

A remoção de todas as arestas do corte separa a rede em dois componentes. A Figura 2.10 ilustra um corte, representado pela linha tracejada, entre *s* e *t* de capacidade 8.

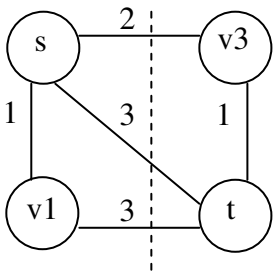


Figura 2.10: Exemplo de corte.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA

Se for considerada uma rede direcionada, um corte $(S, \overline{S})$ será o conjunto de arcos cuja extremidade-fonte se encontra em S e a extremidade-alvo em $\overline{S}$. O corte $(\overline{S}, S)$ por sua vez, é o conjunto dos arcos de sentido inverso aos arcos do corte $(S, \overline{S})$.

Definição 17. *Dentre todos os possíveis cortes que separam s e t, aquele com a menor capacidade é chamado de* ***corte mínimo****.*

Definição 18. *Seja uma rede direcionada G = (V, A) com s sendo o nó origem e t o nó destino, um* ***fluxo*** *em G é uma função f: A → R+ com as seguintes propriedades:*

- ***Restrição de capacidade:*** *o fluxo que passa em cada arco não pode ser superior à capacidade do arco, ou seja,* $\forall i, j \in V, f(i, j) \leq c(i, j)$.
- ***Conservação do Fluxo:*** *o fluxo total que entra em um nó v tem igual valor ao fluxo total que sai de v, exceto para os casos de s e t. Ou seja,* $\forall v \in V \setminus \{s, t\}, \sum_{i \in V} f(i, v) = \sum_{j \in V} f(v, j)$.

O valor do fluxo $|f|$ *na rede pode ser obtido por meio das equações seguintes:*

1. *fluxo total que sai de s menos o fluxo total que entra em s:*

$$|f| = \sum_{i \in V} f(s, i) - \sum_{j \in V} f(j, s)$$

2. *fluxo total que entra em t menos o fluxo total que sai de t:*

$$|f| = \sum_{i \in V} f(i, t) - \sum_{j \in V} f(t, j)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA

Como a grandeza *fluxo* necessita de um sentido, ela foi definida em termos de uma rede direcionada. Mas se esta rede direcionada for simétrica, equivale a um fluxo em uma rede não direcionada. No caso, o fluxo na aresta será a diferença entre os fluxos dos dois arcos. A Figura 2.11 ilustra um exemplo.

Figura 2.11: Exemplo de equivalência de fluxos.

Definição 19. *Determinar o valor máximo do fluxo que se pode enviar do nó origem s para o nó destino t em uma rede, é conhecido como o* ***problema do fluxo máximo****.*

Teorema 1 (Ford e Fulkerson) fluxo máximo - corte mínimo. *Seja f uma função de fluxo de uma rede direcionada de origem s e destino t, e um corte* $(S, \overline{S})$ *separando s e t. Então:*

1. $|f| \leq c(S, \overline{S})$;
2. *Se* $|f| = c(S, \overline{S})$, *então f é máximo e* $(S, \overline{S})$ *é mínimo;*
3. $|f| = c(S, \overline{S})$ *se e somente se:*
   a) *para todo arco a de* $(S, \overline{S})$, $f(a) = c(a)$;
   b) *para todo arco a de* $(\overline{S}, S)$, $f(a) = 0$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA

As Figuras 2.12 e 2.13 ilustram respectivamente o fluxo máximo nas redes das Figuras 2.8 e 2.9, ambas equivalentes.

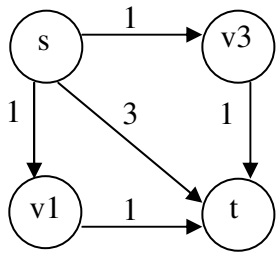


Figura 2.12: Fluxo máximo na rede não direcionada da Figura 2.6.

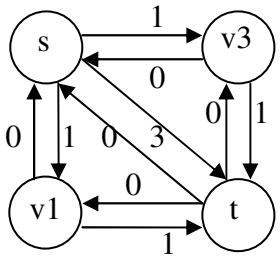


Figura 2.13: Fluxo máximo na rede direcionada da Figura 2.7.

De acordo com o item 3 do **Teorema 1,** no fluxo máximo, os arcos do corte $(\overline{S}, S)$ deverão ter fluxo zero. Desta forma, pode-se deduzir que, em uma rede direcionada simétrica, e, consequentemente, também, não direcionada, o fluxo máximo da origem s para o destino t terá igual valor ao fluxo máximo de t para s.

Denota-se $f_{s,t}$ como o fluxo máximo entre o par de nós *s* e *t*.

Para este trabalho, a menos que seja especificado, toda rede mencionada será uma rede não direcionada.

2.2
Revisão Bibliográfica

Após a introdução à teoria dos grafos e dos fluxos em rede, foi apresentado, também, o *problema do fluxo máximo* (definição 19) entre uma origem e um destino em uma rede. Este problema foi primeiramente resolvido por

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA

Ford e Fulkerson [6] com o Teorema 1 do *fluxo máximo e do corte mínimo*, uma extensão do teorema de Menger [28].

O problema que trata este trabalho é uma derivação do *problema do fluxo máximo*. Em vez de determinar o fluxo máximo entre somente um par de nós, {*s, t*} por exemplo, busca-se calcular o fluxo máximo entre todos os pares de nós de uma rede; o que é conhecido como o *problema do fluxo máximo multiterminal*.

É importante ressaltar que o problema multiterminal é diferente do problema de multifluxos, ou multiproduto. Nestes, os fluxos entre várias origens e destinos são calculados simultaneamente na rede, enquanto naquele, apesar de determinar o fluxo máximo entre todos os pares de nós, é considerado, a cada momento, somente uma origem e um destino na rede.

O *problema do fluxo máximo multiterminal* pode ser obviamente resolvido calculando o fluxo máximo $n(n-1)/2$ vezes, uma para cada par de nós não ordenado da rede. Gomory e Hu [9] mostraram que dentre os $n(n-1)/2$ valores de fluxo máximo, existem no máximo $n-1$ valores distintos, e que estes podem ser obtidos resolvendo o problema de fluxo máximo exatamente $n-1$ vezes. Estes resultados são apresentados por meio do que eles chamaram de árvore de cortes Gomory e Hu, pela qual se pode obter os fluxos máximos entre todos os pares de nós da rede.

É importante notar que o algoritmo de Gomory e Hu resolve o problema multiterminal apenas para o caso de uma rede não orientada, simétrica. Resoluções para o caso de uma rede direcionada foram elaboradas primeiramente em Gusfield e Naor [16] e Schnorr [17], mas Benczúr [20] provou estarem erradas. Para o leitor interessado no estudo do caso de redes direcionadas, ver [22].

Em 1990, Gusfield [10] desenvolveu um simples algoritmo capaz de obter a árvore de cortes de Gomory e Hu com a mesma complexidade. Seu método também utiliza $n-1$ computações do algoritmo de fluxo máximo, porém eliminou a idéia de contração de nós imposta por Gomory e Hu.

Os algoritmos de Gomory e Hu e de Gusfield serão detalhados nas seções que seguem.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA

2.2.1
Método de Gomory e Hu

Após a observação da existência de no máximo $n-1$ valores distintos de fluxo máximo em uma rede, Gomory e Hu desenvolveram um método capaz de obter os $n(n-1)/2$ valores de fluxo máximo por meio de contrações (definição 20) e $n-1$ execuções do algoritmo de fluxo máximo, cujo resultado final é expresso pela árvore de cortes (definição 21).

Definição 20. *Seja a rede G = (V, E). Uma* ***contração*** *de vértices $v_1, v_2,..., v_k$ de G em um único vértice $\bar{v}$, chamado super nó, consiste em:*

1. *substituir em G os vértices $v_1, v_2,..., v_k$ pelo super nó $\bar{v}$.*

2. *substituir, para todo vértice v_i, $i \in \{1,...,k\}$, as arestas (v_i, u), onde $u \in V$ é um vértice não contraído, pela aresta $(\bar{v}, u)$ cuja capacidade $c(\bar{v}, u) = \sum_i c(v_i, u)$.*

Uma rede que possui um super nó é chamada de ***rede contraída****.*

A Figura 2.14 ilustra uma rede e sua forma contraída obtida pela contração dos nós 2 e 3 em um super nó.

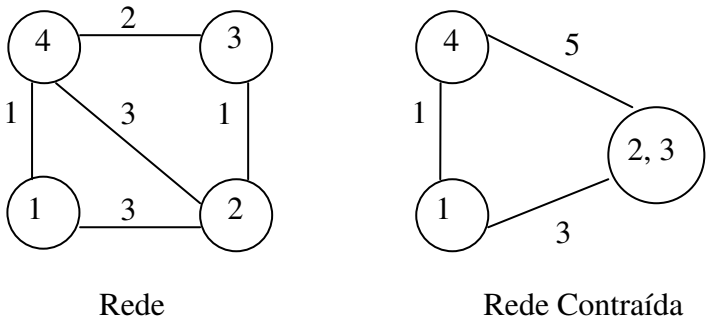


Figura 2.14: Contração em uma rede.

Definição 21. *Seja a rede G = (V, E). Uma* ***árvore de cortes*** *(cut tree) CT é uma árvore com capacidades nas arestas e com os mesmos vértices de G. Suas propriedades são:*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA

1. *Para toda aresta* $(i, j) \in CT$, *a capacidade de* (i, j) *é igual ao valor do fluxo máximo entre i e j em G:*

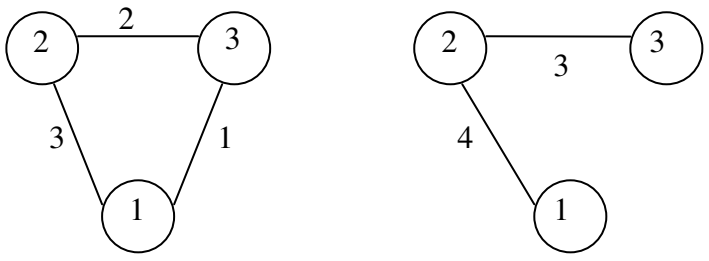
$$\forall (i,\ j) \in CT,\ c(i,\ j) = f_{i,j}.$$

2. *Toda aresta de CT corresponde a um corte mínimo em G. A retirada de uma aresta (i, j) em CT divide-o em dois subconjuntos de vértices X e* $\overline{X}$ *com* $i \in X$ *e* $j \in \overline{X}$. *Assim, o corte* $\left(X, \overline{X}\right)$ *forma um corte mínimo* $(i - j)$, *representado por* $C_{i,j}$, *de G.*

$$\forall (i,\ j) \in CT, (i,\ j) \Rightarrow C_{i,j}.$$

3. *Para todo par de vértices* $\{s, t\}$ *de G, o valor* $f_{s,t}$ *do fluxo máximo entre s e t é a menor capacidade de aresta do único caminho que conecta s e t em CT. Esta aresta de menor capacidade será o corte mínimo* $C_{s,t}$.

A Figura 2.15 ilustra um exemplo de árvore de cortes construída a partir de uma rede. Pode-se observar, pelas propriedades mencionadas, que o corte mínimo entre os nós 2 e 3 e os nós 1 e 2 são respectivamente as arestas (2, 3) e (1, 2) da árvore de cortes *CT*. Seus fluxos máximos são as capacidades destas arestas, no caso, 3 e 4. O corte mínimo entre os nós 1 e 3 é por sua vez a aresta (2, 3), com fluxo máximo igual a 3.



Rede Árvore de Cortes *CT*

Figura 2.15: Uma rede e sua árvore de corte.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA

Definição 22. *A **interseção** entre dois cortes mínimos* $(X, \overline{X})$ *e* $(Y, \overline{Y})$ *ocorre se todos os quatro conjuntos* $X \cap Y$, $X \cap \overline{Y}$, $\overline{X} \cap Y$, $\overline{X} \cap \overline{Y}$ *são não vazios.*

A interseção de cortes é ilustrada na Figura 2.16. Dois cortes $(X, \overline{X})$ e $(Y, \overline{Y})$ se intersectam. X é o conjunto dos nós {1, 4} e $\overline{X}$ dos nós {2, 3}. Y = {1, 2} e $\overline{Y}$ = {3, 4}. De acordo com a Definição 22, a interseção entre os cortes ocorre pois os quatro conjuntos $X \cap Y$ = {1}, $X \cap \overline{Y}$ = {4}, $\overline{X} \cap Y$ = {2}, $\overline{X} \cap \overline{Y}$ = {3} são não vazios.

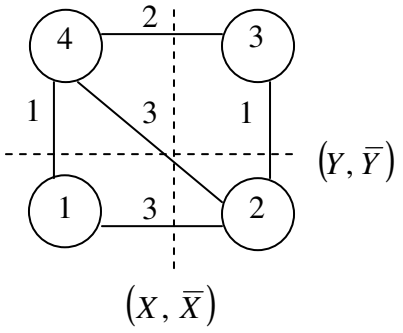


Figura 2.16: Exemplo de interseção de cortes.

O algoritmo criado por Gomory e Hu induz, por meio de processos de contrações de vértices, a formação de cortes mínimos que não se intersectam. Desta forma, eles mostraram que o fluxo máximo calculado entre dois nós não contraídos em uma rede contraída tem igual valor ao calculado na rede original. O corte mínimo encontrado na rede contraída também é corte mínimo na rede original, bastando substituir os super nós pelos nós que os compõem.

A árvore de cortes final é alcançada quando todos os super nós possuem apenas um nó cada, e isto acontece após $n-1$ resoluções do problema de fluxo máximo.

Em geral, é possível encontrar várias árvores de cortes para uma mesma rede. A árvore de cortes apenas será única se todos os cortes (s-t) da rede forem únicos.

A Figura 2.17 ilustra o algoritmo de Gomory e Hu (GH). Um exemplo de sua aplicação segue após.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA

procedimento GH (*G*);

1 Calcule corte mínimo $(X, \overline{X})$ entre dois nós arbitrários da rede *G*;

2 Construa árvore *CT* contraindo X *e* $\overline{X}$ em dois super nós e os ligando através de uma aresta de capacidade $c(X, \overline{X})$;

3 **enquanto** existir super nó com mais de um nó **faça**

4 Selecione arbitrariamente dois nós *s* e *t* de um super nó $\overline{v}$;

5 Contraia, em *G*, cada componente conexo de $CT \setminus \overline{v}$ em um super nó, gerando uma rede contraída;

6 Calcule corte mínimo $(X_1, \overline{X}_1)$ entre *s* e *t* na rede contraída onde $s \in X_1$ e $t \in \overline{X}_1$;

7 Conecte os super nós X_1 e $\overline{X}_1$ com uma aresta de capacidade $c(X_1, \overline{X}_1)$;

8 **se** $\overline{X}$ estiver do mesmo lado do corte que *s*

9 Conecte $\overline{X}$ à X_1;

10 **se não**

11 Conecte $\overline{X}$ à $\overline{X}_1$;

12 **finalize se**

13 **finalize enquanto**

14 **retorne** *CT*;

finalize GH;

Figura 2.17: Pseudocódigo do algoritmo de Gomory e Hu.

O algoritmo de Gomory e Hu será aplicado à rede da Figura 2.18.

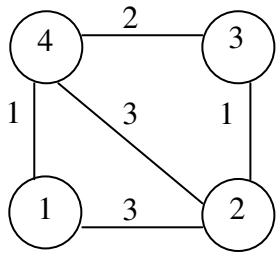


Figura 2.18: Rede *G* aonde será aplicado o algoritmo de Gomory e Hu.

São escolhidos arbitrariamente os nós 2 e 4 para a execução da linha 1 do algoritmo. O corte mínimo (2-4) tem capacidade 5 com $X = \{1, 2\}$ e $\overline{X} = \{3, 4\}$. A Figura 2.19 ilustra a linha 1 e 2 do algoritmo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA

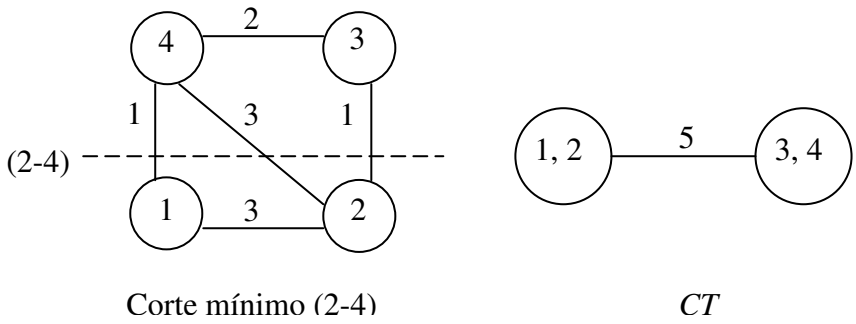


Figura 2.19: Execução das linhas 1 e 2 do algoritmo GH.

Escolhe-se arbitrariamente os nós 1 e 2 do super nó *X* (linha 4). Na linha 5, é determinado $CT \setminus X$, e identificado um componente conexo com os nós 3 e 4 a ser contraído em *G*. Realiza-se o cálculo do corte mínimo entre os nós 1 e 2 na rede contraída (linha 6). O resultado é um corte mínimo (1-2) de capacidade 4 com $X_1 = \{1\}$ e $\overline{X}_1 = \{2, \{3, 4\}\}$. A Figura 2.20 ilustra a execução das linhas 4, 5 e 6 do algoritmo.

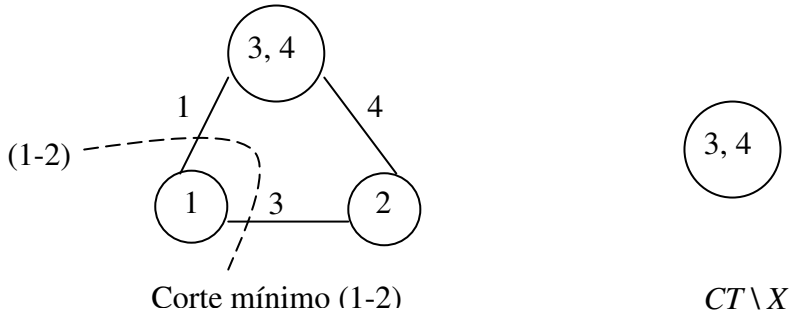


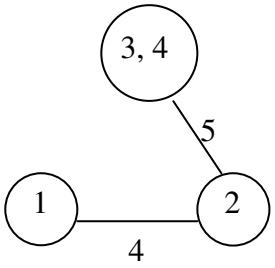
Figura 2.20: Execução das linhas 4, 5 e 6 do algoritmo GH.

As linhas 7 a 11 atualizam a árvore de cortes com o resultado obtido na linha 6. Os vértices 1 e 2, que pertenciam ao super nó *X*, agora estão separados na nova árvore de cortes CT_1. A aresta que os conecta possui a capacidade do corte mínimo (1-2), ou seja, 4.

O super nó que contém os vértices 3 e 4 se encontra do mesmo lado do corte mínimo (1-2) que o vértice 2. Sendo assim, em CT_1 eles estarão conectados.

A Figura 2.21 ilustra a nova árvore de cortes.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA

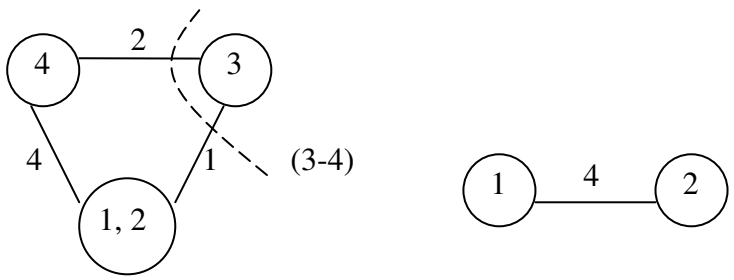


CT_1

Figura 2.21: Nova árvore de cortes CT_1 após primeira iteração do laço **enquanto**.

A condição do laço **enquanto** é analisada novamente (linha 3) e uma segunda iteração se inicia, visto que na árvore de cortes ainda existe um super nó composto por mais de um nó, no caso, $\overline{X} = \{3, 4\}$.

Vértices 3 e 4 são então selecionados como *s* e *t* (linha 4). A Figura 2.22 ilustra $CT_1 \setminus \overline{X}$, e a rede contraída após o processo de contração dos vértices 1 e 2. O corte mínimo (3-4), de capacidade 3 e com $X_2 = \{3\}$ e $\overline{X}_2 = \{4, \{1, 2\}\}$, também encontra-se ilustrado.

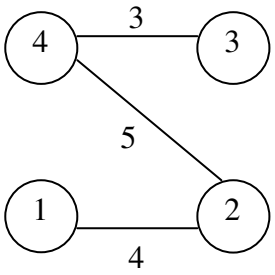


Corte mínimo (3-4) $CT_1 \setminus \overline{X}$

Figura 2.22: Execução das linhas 4, 5 e 6 da segunda iteração.

CT_1 é atualizada dividindo o super nó $\overline{X} = \{3, 4\}$ em dois super nós, estes conectados por uma aresta de capacidade 3. Como o super nó $X = \{1, 2\}$ está contido em $\overline{X}_2 = \{4, \{1, 2\}\}$, o super nó de vértice 2 se conectará, em CT_2, ao vértice 4. A Figura 2.23 ilustra CT_2.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA



CT_2

Figura 2.23: CT_2 e árvore de cortes final de *G*.

A linha 3 do algoritmo é executada novamente. Desta vez não há, na árvore de cortes, nenhum super nó composto por mais de um nó, e o algoritmo chega ao fim. CT_2 é retornada.

Observe que no exemplo foram computados exatamente $n-1$ (no caso três) algoritmos de fluxo máximo/corte mínimo, nos quais os cortes mínimos não se intersectam. O valor do fluxo máximo entre quaisquer dois nós é a menor capacidade de aresta no caminho que os conecta na árvore. O valor de fluxo máximo, por exemplo, entre 2 e 3 é 3, entre 1 e 4 é 4, e entre 2 e 4 é 5.

2.2.2 Método de Gusfield

Gusfield desenvolveu um método muito simples para construir uma árvore de cortes. Apesar de resolver o problema *multiterminal* com a mesma complexidade do método de Gomory e Hu, ou seja, com $n-1$ execuções do algoritmo de fluxo máximo, sua implementação é muito fácil: bastam apenas cinco linhas de código adicionadas a qualquer algoritmo que calcule corte mínimo.

Seu método demonstrou que os princípios básicos do algoritmo de Gomory e Hu, no caso, a formação de cortes mínimos que não se intersectam, e, conseqüentemente, a contração de vértices, não são necessários para a construção de uma árvore de cortes.

A Figura 2.23 ilustra o algoritmo de Gusfield (Gus).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA

procedimento Gus (*G*);

1 Gere uma árvore estrela *T* onde o vértice 1 é a raiz e os outros vértices de 2 a *n* são as folhas ligadas a 1;
2 **para** $s = 2$ a n **faça**
3 Selecione *t* como sendo o (único) vizinho de *s* em *T*;
4 Calcule corte mínimo $(X, \overline{X})$ entre *s* e *t* na rede original G;
5 Marque a aresta $(s, t) \in T$ com a capacidade do corte mínimo $(X, \overline{X})$;
6 **para** todo vértice $i \neq s$ **faça**
7 **se** *i* é vizinho de *t*, e, está do mesmo lado do corte $(X, \overline{X})$ que *s* **faça**
8 Desconecte *i* de *t*;
9 Conecte *i* a *s*;
10 Marque a nova aresta (*i*, *s*) com a capacidade da antiga aresta (*i*, *t*);
11 **finalize se**
12 **finalize para**
13 **finalize para**
14 **retorne** *T*;

finalize Gus;

Figura 2.23: Pseudocódigo do algoritmo de Gusfield.

A título de exemplo, segue uma aplicação do método de Gusfield à rede da Figura 2.24.

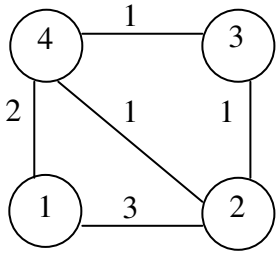


Figura 2.24: Rede *G* aonde será aplicado o algoritmo de Gusfield.

Com os quatro nós cria-se uma árvore estrela de raiz vértice 1 e folhas de vértices 2, 3 e 4 (linha 1). A Figura 2.25 ilustra a execução desta primeira linha.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA

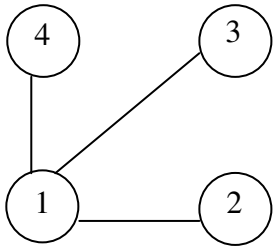


Figura 2.25: Árvore estrela *T*.

O primeiro vértice a ser selecionado como *s* no laço **para** é o 2. Naturalmente, *t* será seu vizinho em *T*, no caso o vértice 1 (linhas 2 e 3). O corte mínimo $(X_1, \overline{X}_1)$ entre 1 e 2 na rede original *G* é calculado na linha 4 do algoritmo (ver Figura 2.26). $X_1 = \{2, 3\}$ e $\overline{X}_1 = \{1, 4\}$. A capacidade deste corte mínimo é igual a 5.

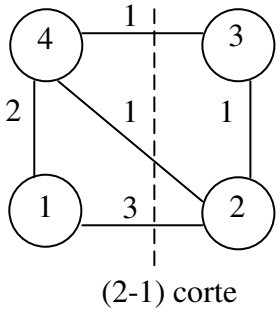
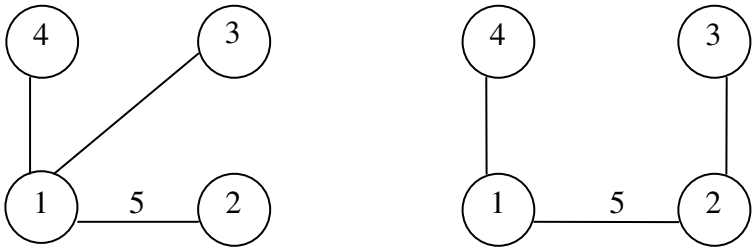


Figura 2.26: Corte mínimo (2-1).

Calculado $(X_1, \overline{X}_1)$, marca-se a aresta (1, 2) em *T* com a capacidade do corte (linha 5). A partir da linha 6 até a 10 ocorre a atualização da árvore *T*. O vértice 3 é diferente de *s* (2), é vizinho de *t* (1) em *T* e encontra-se do mesmo lado do corte $(X_1, \overline{X}_1)$ que *s*. Nesta etapa, o vértice 3 é o único que satisfaz esses três pré-requisitos, e, desta forma, ele se desconecta do nó 1 e conecta-se ao 2 em *T*, gerando T_1. A Figura 2.27 ilustra a marcação e a atualização de *T*.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA



(a) Marcação (b) Atualização

Figura 2.27: Execução da linha 5 em (a) e das linhas 6 a 10 em (b).

Para a segunda iteração do laço **para** da linha 2, o vértice 3 é selecionado como *s*. Seu único vizinho em T_1 é o vértice 2, logo, o nó 2 é *t*. $(X_2, \overline{X}_2)$ é o corte mínimo determinado entre 3 e 2 na rede *G* (linha 4), sendo $X_2 = \{3\}$ e $\overline{X}_2 = \{1, 2, 4\}$. Sua capacidade é igual a 2. A Figura 2.28 ilustra o corte mínimo.

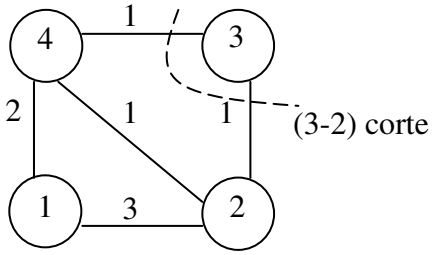
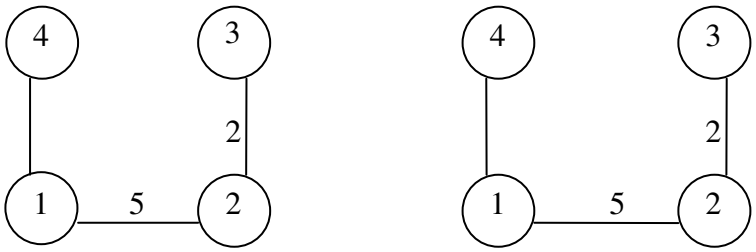


Figura 2.28: Corte mínimo (3-2).

A Figura 2.29 ilustra a marcação e a atualização de T_1 desta iteração. Perceba que nenhum vértice satisfaz os três requisitos (linhas 6 e 7) para a atualização de T_1.



(a) Marcação (b) Atualização

Figura 2.29: Marcação em T_1 (a) e atualização de T_1 em T_2 (b).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA

Na última iteração, para $s = 4$, t é 1. O corte mínimo entre eles é $(X_3, \overline{X}_3)$, sendo $X_3 = \{3, 4\}$, $\overline{X}_3 = \{1, 2\}$ e $c(X_3, \overline{X}_3) = 4$. Esta etapa encontra-se ilustrada na Figura 2.30.

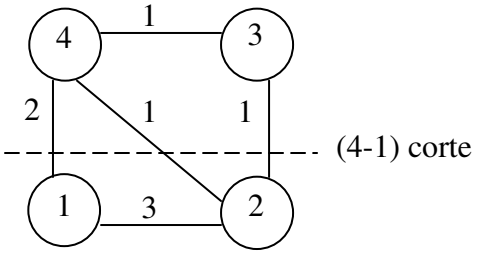


Figura 2.30: Corte mínimo (4-1).

A aresta (1, 4) em T_2 é então marcada com a capacidade 4. Novamente não há vértices na rede que satisfaçam os três requisitos para a atualização da árvore. Desta forma, T_3 será igual a T_2 com a aresta (1, 4) marcada. A Figura 2.31 ilustra a árvore final do algoritmo T_3, que também é a árvore de cortes da rede G.

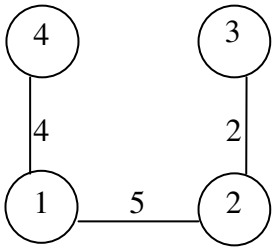


Figura 2.31: T_3 (árvore de cortes de G).

Observa-se, por meio deste exemplo, que não é necessário, pelo método de Gusfield, exigir que os cortes mínimos não se intersectem para construir uma árvore de cortes. O contra exemplo são os cortes mínimos (2-1) e (4-1). Todos os quatro seguintes conjuntos $X_1 \cap X_3 = \{3\}$, $X_1 \cap \overline{X}_3 = \{2\}$, $\overline{X}_1 \cap X_3 = \{4\}$, $\overline{X}_1 \cap \overline{X}_3 = \{1\}$ são não vazios, logo, de acordo com a definição 22, (2-1) e (4-1) se intersectam.

Apesar de o método de Gusfield aparentar ser mais simples do que o de Gomory e Hu, Goldberg e Tsioutsiouliklis [8] e Chekuri *et al.* [12] demonstraram que, com a implementação de certas heurísticas, o método de Gomory e Hu possui complexidade menor do que o de Gusfield. Também se pode perceber que o

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA

método de Gomory e Hu aplica os algoritmos de corte mínimo em redes menores (contraídas) do que a rede original, enquanto que Gusfield utiliza a rede original.

Estes dois métodos apresentados são os principais, na literatura, para a resolução do *problema de fluxo máximo multiterminal*. O ponto crucial é a constatação de que ambos determinam os $n(n-1)/2$ valores de fluxo máximo por, tão somente, $n-1$ execuções do algoritmo de fluxo máximo/corte mínimo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0821420/CA